Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly)
Corrigé de l'examen du 11/05/2018

1. *Automorphismes du disque et du demi-plan de Poincaré*
On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$, et si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $\operatorname{Aut}(\Omega)$ le groupe des automorphismes (holomorphes), c'est-à-dire des bijections holomorphes $\Omega \to \Omega$, avec comme loi de composition interne la composition des applications.
(a) Si $a \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, on pose pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \qquad h_\lambda(z) = \lambda z.$$

Vérifier par le calcul que

$$\varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}, \qquad 1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1+\overline{a}z|^2},$$

et en déduire que φ_a et h_λ définissent des automorphismes de $\mathbb{D}$.
On a en effet

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_a(z)|^2 &= 1 - \frac{(z+a)(\overline{z}+\overline{a})}{(1+\overline{a}z)(1+a\overline{z})} = \frac{(1+\overline{a}z + a\overline{z} + |a|^2|z|^2) - (|z|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + |a|^2)}{(1+\overline{a}z)(1+a\overline{z})} \\ &= \frac{1 - |z|^2 - |z|^2 + |a|^2|z|^2}{|1+\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1+\overline{a}z|^2} > 0 \end{aligned}$$

pour tous $a, z \in \mathbb{D}$, ce qui montre en particulier que $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\varphi_{-a} \circ \varphi_a(z) = \frac{\frac{z+a}{1+\overline{a}z} - a}{1 - \overline{a}\frac{z+a}{1+\overline{a}z}} = \frac{z + a - a(1+\overline{a}z)}{1+\overline{a}z - \overline{a}(z+a)} = \frac{z(1-|a|^2)}{1-|a|^2} = z$$

et donc aussi $\varphi_a \circ \varphi_{-a}(z) = z$ en échangeant les rôles de a et $-a$. Ceci implique $\varphi_a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$. Comme $|h_\lambda(z)| = |z|$, il est évident que $h_\lambda \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ et que $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$.

(b) Soit $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$. On pose $a = \varphi^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ et $\psi = \varphi \circ \varphi_a$. Que vaut $\psi(0)$? Déduire du lemme de Schwarz appliqué à ψ et ψ^{-1} que ψ est une homothétie h_λ et en conclure que tous les éléments de $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ sont des homographies (quelle est leur forme ?)
Nous avons $\varphi_a(0) = a$, donc $\psi(0) = \varphi(a) = 0$. Comme $\psi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$, on a en particulier $|\psi(z)| \le 1$ sur $\mathbb{D}$. Le lemme de Schwarz nous dit alors que $|\psi(z)| \le |z|$ sur $\mathbb{D}$ (ceci résulte du principe du maximum appliqué à $\psi(z)/z$, qui est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et atteint donc son sup en approchant du bord de $\mathbb{D}$, là où $\limsup_{|z|\to 1} |\psi(z)/z| \le \limsup_{|z|\to 1} 1/|z| = 1$). Mais ψ^{-1} est également un automorphisme tel que $\psi^{-1}(0) = 0$, donc on a aussi $|\psi^{-1}(z)| \le |z| \Rightarrow |w| \le |\psi(w)|$. On voit alors que $|\psi(z)/z| = 1$ sur $\mathbb{D}$, ce qui entraîne que $\psi(z)/z$ est une constante λ de module 1, i.e. $\psi = h_\lambda$. On en déduit $\varphi = \psi \circ (\varphi_a)^{-1} = h_\lambda \circ \varphi_{-a}$, et on voit ainsi que tout automorphisme $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ est une homographie de la forme

$$\varphi(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \text{où } a = \varphi^{-1}(0),\ |\lambda| = 1.$$

(c) On pose $u(z) = \frac{z-i}{z+i}$ et $v(z) = i\frac{1+z}{1-z}$. Montrer en notant $z = x + iy$, $y > 0$, que $|u(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, et que

$$\operatorname{Im}(v(z)) = \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \text{si } z \in \mathbb{D}.$$

En déduire que $u : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ et $v : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

En posant $z = x + iy$, il vient

$$|u(z)|^2 = \left|\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}\right|^2 = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} < 1$$

car $(y-1)^2 = (y+1)^2 - 4y < (y+1)^2$ si $y = \operatorname{Im} z > 0$. Ceci montre que $u(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$. D'autre part

$$\operatorname{Im}(v(z)) = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{\operatorname{Re}(1+z-\overline{z}-|z|^2)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \text{si } z \in \mathbb{D},$$

donc $v(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$. On vérifie enfin par des calculs immédiats que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$, donc $u : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ et $v : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ sont des biholomorphismes (= isomorphismes de surfaces de Riemann) inverses l'un de l'autre.

(d) Montrer que les homographies $z \mapsto f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ réelle vérifient

$$\operatorname{Im}(f_M(z)) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

et en déduire qu'elles définissent des automorphismes de $\mathbb{H}$ si $ad - bc > 0$. Montrer réciproquement que les automorphismes de $\mathbb{H}$ s'identifient à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser les questions précédentes pour voir que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est constitué d'homographies qui préservent $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$ dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.)

Si, a, b, c, d sont réels, un calcul direct donne

$$\operatorname{Im}(f_M(z)) = \operatorname{Im}\frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{(cz+d)(c\overline{z}+d)} = \operatorname{Im}\frac{ac|z|^2 + adz + bc\overline{z} + bd}{|cz+d|^2} = \frac{ad\operatorname{Im} z - bc\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

Si $ad - bc > 0$, on a donc $f_M(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$. Or, on sait d'après le cours que $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$, ce qui montre que $f_M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ et $f_{M^{-1}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Réciproquement, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, la question (c) entraîne que $g = u \circ f \circ u^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, par conséquent g est une homographie complexe, et il en est alors de même pour $f = u^{-1} \circ g \circ u$ (en utilisant le fait que l'ensemble des homographies est un groupe isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$). Mais comme toute homographie $f \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ s'étend en un homéomorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et que le bord $\partial\mathbb{H}$ dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{H}$ s'identifiant en fait à un hémisphère ouvert de la sphère de Riemann), on en conclut que f et f^{-1} doivent préserver le bord $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On sait alors (par préservation du birapport via f^{-1}) que f est donnée par

$$f(z) = [\infty, 0, 1, f(z)] = [\alpha, \beta, \gamma, z]$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est l'image du repère projectif canonique $\infty, 0, 1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par f^{-1}. On voit donc que f est une homographie f_M à coefficients réels, associée à une matrice réelle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. La formule donnant $\operatorname{Im}(f_M(z))$ et l'hypothèse $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ imposent $\Delta = ad - bc > 0$. Quitte à multiplier les coefficients a, b, c, d par $1/\sqrt{\Delta}$, on peut tout aussi bien imposer $ad - bc = 1$. La seule ambiguïté sur le choix de a, b, c, d est alors un changement de signe simultané des 4 coefficients. Par conséquent

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm\,\mathrm{Id}\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

On pouvait aussi traiter cette question en observant que les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sont les composées $u^{-1} \circ h_\lambda \circ \varphi_{-a} \circ u$, et en vérifiant qu'il s'agit bien d'homographies à coefficients réels de déterminant > 0.

(e) Montrer que les automorphismes de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ préservent la métrique dite de Poincaré sur $\mathbb{D}$, à savoir la forme quadratique

$$q_{\mathbb{D}}(z) = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \qquad z \in \mathbb{D}, \qquad \text{i.e. } q_{\mathbb{D}}(z)(\xi) = \frac{|\xi|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

pour tout vecteur ξ du plan $\mathbb{C}$ pris au point z. Ceci signifie par définition que la métrique $\varphi^* q_{\mathbb{D}}$ obtenue par la substitution $z = \varphi(\zeta)$, où $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, coïncide avec $q_{\mathbb{D}}$.

Les calculs des questions 1 (a) et 1 (b) donnent $z = \varphi(\zeta) = \lambda \dfrac{\zeta - a}{1 - \overline{a}\zeta}$ et

$$1 - |\varphi(\zeta)|^2 = \frac{(1-|\zeta|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}\zeta|^2}.$$

Par ailleurs

$$d\varphi(\zeta) = \varphi'(\zeta)\, d\zeta = \lambda \frac{1\cdot(1-\overline{a}\zeta) - (-\overline{a})(\zeta - a)}{(1-\overline{a}\zeta)^2}\, d\zeta = \frac{\lambda(1-|a|^2)}{(1-\overline{a}\zeta)^2}\, d\zeta,$$

d'où

$$\varphi^* q_{\mathbb{D}}(\zeta) = \frac{|d\varphi(\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\zeta)|^2)|^2} = \frac{\dfrac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}\zeta|^4}\,|d\zeta|^2}{\dfrac{(1-|\zeta|^2)^2(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}\zeta|^4}} = \frac{|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} = q_{\mathbb{D}}(\zeta).$$

On a donc bien $\varphi^* q_{\mathbb{D}} = q_{\mathbb{D}}$, i.e. tout $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est une isométrie pour $q_{\mathbb{D}}$.

(f) Montrer de même que les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ préservent

$$q_{\mathbb{H}}(z) = \frac{|dz|^2}{4\,(\mathrm{Im}\, z)^2}, \quad z \in \mathbb{H},$$

et qu'en fait v est une isométrie de $(\mathbb{D}, q_{\mathbb{D}})$ sur $(\mathbb{H}, q_{\mathbb{H}})$ (et u l'isométrie inverse).

Si l'on pose $z = f(\zeta) = \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$ pour $f = f_M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, des calculs similaires donnent

$$\mathrm{Im}\, f(\zeta) = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}\,\zeta}{|c\zeta+d|^2},$$
$$df(\zeta) = f'(\zeta)\, d\zeta = \frac{ad-bc}{(c\zeta+d)^2}\, d\zeta,$$

par conséquent

$$f^* q_{\mathbb{H}}(\zeta) = \frac{|df(\zeta)|^2}{4\,(\mathrm{Im}\, f(\zeta))^2} = \frac{\dfrac{(ad-bc)^2}{|c\zeta+d|^4}\,|d\zeta|^2}{4\dfrac{(ad-bc)^2(\mathrm{Im}\,\zeta)^2}{|c\zeta+d|^4}} = \frac{|d\zeta|^2}{4(\mathrm{Im}\,\zeta)^2} = q_{\mathbb{H}}(\zeta).$$

D'autre part $dv(\zeta) = v'(\zeta)\, d\zeta = \dfrac{2i}{(1-\zeta)^2}\, d\zeta$ et

$$v^* q_{\mathbb{H}}(\zeta) = \frac{|dv(\zeta)|^2}{4(\mathrm{Im}\, v(\zeta))^2} = \frac{\dfrac{4|d\zeta|^2}{|1-\zeta|^4}}{4\dfrac{(1-|\zeta|^2)^2}{|1-\zeta|^4}} = \frac{|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} = q_{\mathbb{D}}(\zeta),$$

ce qui montre que v est une isométrie de $(\mathbb{D}, q_{\mathbb{D}})$ sur $(\mathbb{H}, q_{\mathbb{H}})$. L'application $u = v^{-1}$ est l'isométrie inverse.

2. *Quelques propriétés basiques des surfaces de Riemann compactes.*
Dans cet exercice, X désigne une surface de Riemann compacte et *connexe*.

(a) Expliquer pourquoi toute fonction holomorphe globale f sur X est nécessairement constante.

Comme X est compacte, l'application continue $|f| : X \to \mathbb{R}_+$ doit y atteindre son maximum en un point $x_0 \in X$, et le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe f montre alors que f est constante.

(b) Soit $g : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe sur X, non identiquement égale à 0 ou ∞. Montrer que la somme des multiplicités des zéros et des pôles de g (celles des pôles étant par convention comptées négativement) est nulle.

Toute fonction méromorphe g sur X peut être vue comme un morphisme $g : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de surfaces de Riemann, et on sait alors que la somme des multiplicités des préimages d'un point quelconque $w \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est une constante, égale par définition au *degré* de g. Ceci s'applique en particulier à $w = 0$ et $w = \infty$. On en conclut que la somme des multiplicités des zéros et des pôles de g est nulle (en comptant négativement la multiplicité des pôles).
Autre méthode: la formule bien connue de variation de l'argument donne que la somme $\mathrm{ind}_K(g)$ des multiplicités des zéros et des pôles de g contenus dans un domaine $K \subset X$ est

$$\mathrm{ind}_K(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{dg}{g},$$

pourvu que K soit inclus dans un ouvert de coordonnées de X et que ∂K ne contienne ni zéros ni pôles. Mais par triangulation, ceci reste vrai pour un domaine K de X quelconque à bord C^1 par morceaux, non nécessairement contenu dans un ouvert de coordonnées (les arêtes des triangles adjacents sont d'orientations opposées et se compensent). On peut appliquer ceci à $K = X$ tout entier dont le bord est vide pour voir que $\mathrm{ind}_X(g) = 0$ (ou bien on prend pour K le complémentaire d'un petit disque ne contenant pas de zéros et de pôles, de sorte que $\mathrm{ind}_X(g) = \mathrm{ind}_K(g)$).

(c) On appelle forme méromorphe α sur X (resp. champ de vecteurs méromorphe β sur X) toute expression s'écrivant $\alpha = a(z)\,dz$ (resp. $\beta = b(z)\frac{\partial}{\partial z}$) dans toute carte $\tau : U \to \Omega$ de X, avec a et b des fonctions méromorphes au sens usuel sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, relativement à la coordonnées locale $z = \tau(x)$. Si α et β sont tous deux holomorphes, montrer que $f = \alpha \cdot \beta$ est nécessairement une constante.

En effet, f est alors une fonction holomorphe globale sur X (donnée en coordonnées locales sur toute carte par $f(z) = a(z)b(z)$), et on applique 2 (a).

(d) On suppose ici α et β méromorphes non nuls. L'indice de α, noté $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}_X(\alpha)$, est par définition la somme des multiplicités des zéros et des pôles de α (ces dernières comptées négativement), et de même pour $\mathrm{ind}(\beta) = \mathrm{ind}_X(\beta)$. Montrer que $\mathrm{ind}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{ind}(\beta) \in \mathbb{Z}$ sont des entiers indépendants de α et β et que $\mathrm{ind}(\beta) = -\mathrm{ind}(\alpha)$.

On notera que le produit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ (resp. le quotient γ_1/γ_2) de formes ou champs méromorphes non nuls sur X est une section méromorphe dont la somme de multiplicités des zéros et des pôles dans un domaine $K \subset X$ quelconque vérifie trivialement (en supposant que le bord ∂K est disjoint des zéros et des pôles)

$$\mathrm{ind}_K(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \mathrm{ind}_K(\gamma_1) + \mathrm{ind}_K(\gamma_2), \qquad \mathrm{ind}_K(\gamma_1/\gamma_2) = \mathrm{ind}_K(\gamma_1) - \mathrm{ind}_K(\gamma_2).$$

Si $\widetilde{\alpha}$ est une autre forme méromorphe non nulle, le quotient $g = \widetilde{\alpha}/\alpha$ est une fonction méromorphe globale sur X. Par conséquent

$$\mathrm{ind}(\widetilde{\alpha}) - \mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}(g) = 0$$

et $\mathrm{ind}(\widetilde{\alpha}) = \mathrm{ind}(\alpha)$. On voit de même que $\mathrm{ind}(\widetilde{\beta}) = \mathrm{ind}(\beta)$ si $\widetilde{\beta}$ est un autre champ de vecteurs. Enfin, l'accouplement de dualité $f = \alpha \cdot \beta$ donne une fonction méromorphe globale f sur X, donc

$$\mathrm{ind}(\alpha) + \mathrm{ind}(\beta) = \mathrm{ind}(f) = 0.$$

(e) On suppose ici $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on pose $\alpha_0 = dz$, $\beta_0 = \frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{C}$. Déterminer α_0 et β_0 en termes de la coordonnée locale $\zeta = 1/z$ au voisinage de l'infini, et en déduire les valeurs de $\mathrm{ind}(\alpha_0)$ et $\mathrm{ind}(\beta_0)$. Déterminer dans ce cas l'expression des champs et formes méromorphes quelconques α et β sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, et retrouver ainsi quels sont ceux qui sont *holomorphes* sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tout entier.

La forme $\alpha_0 = dz$ n'a ni zéro ni pôle sur $\mathbb{C}$, mais à l'infini $\alpha_0 = d(1/\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$ admet un pôle d'ordre 2. Par conséquent $\mathrm{ind}(\alpha_0) = -2$. On a la dualité $\alpha_0 \cdot \beta_0 = 1$ et $\beta_0 = -\zeta^2 d/d\zeta$, donc β_0 admet un zéro de multiplicité 2 à l'infini ($\zeta = 0$). Ceci donne bien $\mathrm{ind}(\beta_0) = 2$. Comme les fonctions méromorphes sont $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont les fractions rationnelles $R(z) = P(z)/Q(z)$, les formes méromorphes globales sont les $\alpha(z) = R(z)\,dz$ et les champs méromorphes globaux sont les $\beta(z) = R(z)\,d/dz$. Comme $\mathrm{ind}(R) = 0$, on a (conformément à la question 2 (d)) que $\mathrm{ind}(\alpha) = -2$ et $\mathrm{ind}(\beta) = 2$. Pour que α soit holomorphe, il faut déjà que R n'ait pas de pôle sur $\mathbb{C}$, ce qui impose que $R(z) = P(z)$ soit un polynôme. Mais si $\delta = \deg(P)$, on a alors δ zéros et un pôle de multiplicité $\delta + 2$ à l'infini, la seule forme holomorphe α sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est donc $\alpha = 0$. Pour un champ $\beta = R(z)\,d/dz$, on a la possibilité que $R(z) = P(z)$ soit un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, soit $R(z) = az^2 + bz + c$. Les champs de vecteurs holomorphes globaux sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont les champs $z \mapsto (az^2 + bz + c)\,d/dz$ et forment un espace vectoriel de dimension 3.

(f) On suppose ici que $X = \mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique. Déterminer quels sont les formes holomorphes globales α et les champs de vecteurs globaux β sur X, et les valeurs de $\mathrm{ind}(\alpha)$ et $\mathrm{ind}(\beta)$. [*Indication* : les coefficients $a(z)$ et $b(z)$ sont alors des fonctions holomorphes périodiques de période Λ.]

Les coefficients $a(z)$ et $b(z)$ doivent être des fonctions holomorphes périodiques de période Λ. Par compacité de $\mathbb{C}/\Lambda$, elles doivent être constantes, donc sur une courbe elliptique, les formes et champs holomorphes sont les sections constantes $\alpha = a\,dz$, $\beta = b\,d/dz$. On a $\mathrm{ind}(\alpha) = \mathrm{ind}(\beta) = 0$ dans ce cas.

(g) On suppose ici que $X = X_m$ est la courbe algébrique “de Fermat” $X_m \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de degré m, définie par l'équation $x^m + y^m + z^m = 0$ dans les coordonnées homogènes $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. On se place dans la carte affine $z \neq 0$ et on y utilise les coordonnées affines $u = x/z$, $v = y/z$. Préciser quels sont les points à l'infini de X_m dans ces coordonnées, et déterminer en quels points de X_m la fonction u (resp. v) est une coordonnée locale sur X_m.

Relativement à la carte affine $z \neq 0$, les points à l'infini sont donnés par l'intersection de X_m avec la droite à l'infini $z = 0$. Ces points sont tels que $x^m + y^m = 0$, ce qui donne à homothétie près les points $[1 : \zeta : 0]$ avec $\zeta^m = -1$. On obtient m points $[1 : \zeta_k : 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donnés par $\zeta_k = \exp((2k + 1)i\pi/m)$, $0 \leq k \leq m-1$. Dans les coordonnées affines $u = x/z$, $v = y/z$, l'équation de X_m devient $u^m + v^m + 1 = 0$, et la différentielle de cette équation est $(m - 1)(u^{m-1}du + v^{m-1}dv)$. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut exprimer v comme fonction de u là où la dérivée partielle en v est non nulle, donc $u = x/z$ est une coordonnée locale en dehors des points à l'infini $[1 : \zeta_k : 0]$ et des points d'intersection de X_m avec la droite $v = 0$ ($\Leftrightarrow y = 0$), qui sont les points $[\zeta_k : 0 : 1]$. Par permutation des coordonnées, on voit que $v = y/z$ est une coordonnée locale en dehors des points à l'infini $[1 : \zeta_k : 0]$ et des points d'intersection $[0 : \zeta_k : 1]$ avec $u = 0$ ($\Leftrightarrow x = 0$). De même, $u' = 1/u = z/x$ est une coordonnée locale en dehors des points $[0 : \zeta_k : 1]$ et $[1 : 0 : \zeta_k]$, $v' = 1/v = z/y$ est une coordonnée locale en dehors des points $[1 : 0 : \zeta_k]$ et $[0 : 1 : \zeta_k]$, $w = x/y$ est une coordonnée locale en dehors des points $[1 : 0 : \zeta_k]$ et $[\zeta_k : 1 : 0]$, $w' = 1/w = y/x$ est une coordonnée locale en dehors des points $[0 : 1 : \zeta_k]$ et $[1 : \zeta_k : 0]$.

(h) On reprend les notations de (g). Montrer que $\alpha = du = d(x/z)$ est une forme méromorphe sur X_m, dont les zéros sont les points d'intersection de X_m avec la droite $y = 0$, chacun étant de multiplicité $m - 1$, et montrer que les points à l'infini sont des pôles doubles (on observera pour cela que $u' = 1/u$ est une coordonnée locale au voisinage des points à l'infini). En déduire la formule

$$\mathrm{ind}(\alpha) = 2g - 2$$

où $g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ est ce qu'on appelle le genre de X_m. A quoi correspondent les cas particuliers des petits degrés $m = 1, 2, 3$? Si $m \geq 3$, montrer que $\widetilde{\alpha} = v^{-2}du$ est partout holomorphe, y compris à l'infini, et que la somme des multiplicités de ses zéros vaut $m(m - 3)$.

Comme $u = x/z$ est holomorphe en dehors des m points $p_k = [1 : \zeta_k : 0]$, la différentielle $\alpha = du = d(x/z)$ est holomorphe sur $X \smallsetminus \{p_k\}$. Aux points p_k, on a $\alpha = d(1/u') = -(u')^{-2}du'$ et u' est une coordonnée locale, donc α est méromorphe avec un pôle double en p_k. D'autre part α ne peut s'annuler que là où elle est holomorphe et où u n'est pas une coordonnée locale, c'est-à-dire aux points $q_k = [\zeta_k : 0 : 1]$. Mais aux points q_k, la relation $u^{m-1}du + v^{m-1}dv = 0$ donne

$$(*) \qquad \alpha = du = -\frac{1}{u^{m-1}} v^{m-1} dv$$

où v est une coordonnée locale et $u = u(v)$ est holomorphe non nulle, donc α admet un zéro d'ordre $m-1$ en q_k. Au total

$$\mathrm{ind}(\alpha) = m(m - 1) + m \times (-2) = m(m - 3).$$

Ceci est équivalent à la formule “du genre” $\mathrm{ind}(\alpha) = 2g - 2$ où $g = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Pour $m = 1$ (resp. $m = 2$), la surface X_m est une droite projective (resp. un conique projective), on sait que $X_m \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et l'indice des formes méromorphes quelconques est toujours égal à -2. Maintenant, si $m \geq 3$, $\widetilde{\alpha} = v^{-2}du$

est encore holomorphe sur la carte $z \neq 0$, mais n'admet plus qu'un zéro d'ordre $m-3$ aux points q_k d'après $(*)$. Aux points "à l'infini" $p_k = [1 : \zeta_k : 0]$, on peut écrire

$$\widetilde{\alpha} = v^{-2}du = (z/y)^2 d(1/u') = -(z/y)^2(u')^{-2}du' - (z/y)^2(z/x)^{-2}du' = -(x/y)^2du' = -(w')^{-2}du'$$

et comme u' est une coordonnée locale et que $w' = \zeta_k \neq 0$ en p_k, on voit que $\widetilde{\alpha}$ n'a ni zéro ni pôle en p_k. Par conséquent $\widetilde{\alpha} = v^{-2}du$ est partout holomorphe sur X et $\mathrm{ind}(\widetilde{\alpha}) = \mathrm{ind}(\alpha) = m(m-3)$. Pour $m = 3$, X_m est une cubique, et $\widetilde{\alpha}$ n'a ni zéro ni pôle (en fait X_3 est une courbe elliptique).

3. *Morphismes entre surfaces de Riemann*
(Cet exercice reprend la notion d'indice défini en 2 (d) et suppose la question 2 (f) résolue).
Soit $F : Y \to X$ un morphisme non constant de surfaces de Riemann compactes et connexes. Si $\alpha = a(z)\,dz$ est une forme holomorphe sur X, on note $F^*\alpha$ la forme obtenue en effectuant le "changement de variable" $z = F(w)$ en coordonnées locales, c'est-à-dire $F^*\alpha = a(F(w))\,F'(w)\,dw$.

(a) Décrire ce qui se passe dans le cas où $X = Y = \mathbb{C}/\Lambda$ est courbe elliptique. Que peut-on dire alors de F ? [*Rappel* : F' est alors une fonction holomorphe périodique]. Montrer que si $p \in \mathbb{Z}^*$, le morphisme $F(\dot{z}) = p \cdot \dot{z}$ est de degré p^2 (et n'est donc pas un isomorphisme si $p \neq \pm 1$).

Dans ce cas $\alpha = a\,dz$ est une forme constante, et la dérivée F' est une fonction holomorphe périodique, nécessairement constante. Ceci implique que F est induite par une fonction affine $z \mapsto pz + q$, et que $F^*\alpha = pa\,dz$. Pour qu'une telle fonction affine passe au quotient et induise un morphisme $F : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda$, il faut et il suffit que $p\Lambda \subset \Lambda$, ce qui est le cas pour $p \in \mathbb{Z}^*$ (mais on a parfois d'autres situations possibles, dits "à multiplication complexe" : par exemple, si $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\sqrt{5}$, on peut prendre $p = i\sqrt{5}$). Pour évaluer le degré de $F(\dot{z}) = p \cdot \dot{z}$, il suffit d'évaluer le nombre de préimages de $\dot{0}$. Or, si $\Lambda = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, ce sont les points $(j\alpha + k\beta)/|p|$ avec $0 \leq j, k \leq |p| - 1$, donc $\deg(F) = |p|^2 = p^2$. (En général, même dans la situation de multiplication complexe, on peut montrer que le degré est encore $\deg(F) = |p|^2 \in \mathbb{N}^*$, mais la preuve est arithmétiquement un peu plus subtile).

(b) Montrer en général que l'on a nécessairement $\mathrm{ind}(F^*\alpha) \geq \mathrm{ind}(\alpha)$, et que si $\mathrm{ind}(\alpha) > 0$ l'égalité ne peut avoir lieu que si F est de degré 1 (i.e. un isomorphisme).

On sait que tout morphisme F non constant est surjectif. Chaque zéro z_j de $\alpha = a(z)\,dz$ donne au moins un zéro w_j de $F^*\alpha = a(F(w))\,F'(w)\,dw$ en prenant $w_j \in F^{-1}(z_j)$, et la multiplicité de w_j est au moins égale à celle de z_j. Elle sera strictement plus grande si $\mathrm{ind}(\alpha) > 0$ et s'il y a plusieurs préimages, i.e. si $\deg(F) > 1$ (ceci vaut également dans le cas où w_j est un point multiple de F, car dans cette situation la multiplicité de $a(F(w))$ en w_j est le produit de la multiplicité de F en w_j par la multiplicité de $a(z)$ en z_j). Pour $\mathrm{ind}(\alpha) > 0$, on voit donc que l'on ne peut avoir $\mathrm{ind}(F^*\alpha) = \mathrm{ind}(\alpha)$ que si F est de degré 1, c'est-à-dire si F est un isomorphisme.

(c) Montrer qu'il existe des morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de tous degrés dans $\mathbb{N}^*$.

Il suffit de prendre $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ défini par un polynôme $F(z)$ de degré $\delta \in \mathbb{N}^*$. Le degré comme morphisme coïncide avec le degré comme polynôme d'après le théorème de d'Alembert.

(d) Existe-t-il des morphismes $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}/\Lambda$ non constants ? des morphismes $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ non constants ?

Il ne peut pas exister de morphisme $F : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}/\Lambda$ non constant, car sinon on aurait $\mathrm{ind}(F^*dz) \geq \mathrm{ind}(dz) = 0$, or on sait que l'indice d'une forme méromorphe sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ est -2 (et, de toutes façons, on sait aussi que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ n'a pas de forme holomorphe !). En revanche, la fonction $\wp$ de Weierstrass définit un morphisme $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 2, et sa dérivée un morphisme $\wp' : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de degré 3. On peut montrer qu'il existe des morphismes $F : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de tout degré $\delta \geq 2$ en prenant $F = \wp^a \wp'^b$ et $\delta = 2a + 3b$, mais le degré 1 n'est pas possible car sinon $\mathbb{C}/\Lambda$ et $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ seraient isomorphes (et le début de cette question montre que ce n'est pas le cas !)

(e) On désigne par X_m la courbe de Fermat de degré m. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(x, y, z) \mapsto (x^p, y^p, z^p)$ induit une application bien définie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et, par restriction, un morphisme de $X_{mp} \to X_m$. Quel est son degré ?

C'est à peu près trivial. Le degré de F est p^2, car pour un point $[x', y', z']$ de coordonnées toutes non nulles, les préimages sont de la forme $[\zeta\, x, \eta\, y, z]$, si $[x, y, z]$ est l'une d'entre elles et si on fait varier ζ et η parmi les racines p-ièmes de l'unité.

(f) Montrer que s'il existe un morphisme non constant $X_{m'} \to X_m$ avec $m \geq 3$, alors $m' \geq m$, et que si $m' = m \geq 4$ il s'agit nécessairement d'un isomorphisme [*Indication* : utiliser 2 (h).]

Soit $F : X_{m'} \to X_m$ un tel morphisme non constant. Pour $m \geq 3$, on sait qu'il existe des formes holomorphes α non nulles sur X_m (question 2 (h)) et leur indice $m(m-3)$ croît strictement avec m pour $m \geq 3$. Par conséquent, d'après 3 (b), il n'est pas possible que l'on ait $3 \leq m' < m$, car on aurait alors $\mathrm{ind}(F^*\alpha) = m'(m'-3) < m(m-3) = \mathrm{ind}(\alpha)$. Il n'est pas possible non plus que $m' = 1, 2$, car dans ce cas $X_{m'} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ne possède pas de forme holomorphe non nulle. Ceci montre que l'on doit avoir $m' \geq m \geq 3$. Dans le cas $m' = m \geq 4$, l'égalité $\mathrm{ind}(F^*\alpha) = \mathrm{ind}(\alpha) = m(m-3) > 0$ entraîne que le degré de F est 1, et donc que F est un isomorphisme.

Remarque. En revanche, pour $m = 3$, on sait que X_3 est une courbe elliptique et il existe donc des morphismes $F : X_3 \to X_3$ qui ne sont pas des isomorphismes. Il existe également des morphismes $F : X_1 \to X_2$ de degré quelconque, puisque $X_1 \simeq X_2 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.