Surfaces de Riemann (Jean-Pierre Demailly), DM du 20/04/2018

1. (*Degré d'un morphisme de surfaces de Riemann compactes*)

(a) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe non constante sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\overline{D}(z_0, r)$ un disque fermé contenu dans Ω. Montrer que l'intégrale

$$I(w_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz,$$

qui est bien définie si $z \mapsto f(z) - w_0$ ne s'annule pas sur le cercle $\partial D(z_0, r) = \{|z - z_0| = r\}$, est égale au nombre de racines de l'équation $f(z) = w_0$ dans le disque $D(z_0, r)$, comptées avec multiplicités.

(b) Montrer qu'on a alors $I(w) = I(w_0)$ si w est assez voisin de w_0, et plus précisément que cette égalité a lieu dès que $|w - w_0| < \theta(r) := \inf_{|z-z_0|=r} |f(z) - w_0|$.

(c) Soient X, Y deux surfaces de Riemann compactes et connexes, et $F : X \to Y$ une application holomorphe non constante. En utilisant le théorème de l'application ouverte (qui implique que F est ouverte), montrer d'abord que F est nécessairement surjective.

(d) Pour $w \in Y$, on note $d(w)$ la somme des multiplicités des préimages $z_j \in F^{-1}(w)$. On commencera par montrer que ces préimages sont nécessairement en nombre fini ; noter sinon qu'il y aurait un point d'accumulation z_∞ [NB: pour un point z_0 d'image $w_0 = F(z_0)$ on calcule par définition la multiplicité de z_0 en considérant la fonction holomorphe usuelle $f = \tilde{\tau} \circ F \circ \tau^{-1}$ au point $\zeta_0 = \tau(z_0)$, où τ, $\tilde{\tau}$ sont des cartes respectives de X et Y sur des voisinages ouverts de z_0 et de w_0.]

(e) Soit $w_0 \in Y$ et $\tilde{\tau} : V_0 \to D(0, \delta_0) \subset \mathbb{C}$ une carte de Y sur un voisinage V_0 de w_0, telle que $\tilde{\tau}(w_0) = 0$. On pose $F^{-1}(w_0) = \{z_1, \ldots, z_p\}$. Montrer qu'il existe des cartes $\tau_j : U_j \to D(0, \varepsilon_j) \subset \mathbb{C}$ sur des voisinages ouverts $U_j \subset X$ de z_j, 2 à 2 disjoints, de sorte que $\tau_j(z_j) = 0$ et, pour $r > 0$ assez petit ($r < \min \varepsilon_j$), que $\tilde{\tau} \circ F \circ \tau_j^{-1}$ soit bien définie sur $\overline{D}(0, r)$ et ne s'annule pas sur le cercle $|\zeta| = r$. On pose

$$\theta(r) = \min_{1 \le j \le p} \inf_{|\zeta|=r} \left|\tilde{\tau} \circ F \circ \tau_j^{-1}(\zeta)\right| > 0.$$

D'autre part, on considère l'ouvert $U_{j,r} = \tau_j^{-1}(D(0, r))$ et le compact complémentaire $K = X \smallsetminus \bigcup_j U_{j,r}$. En observant que $F(K)$ ne contient pas w_0, montrer que $\tilde{\tau}(V_0 \smallsetminus F(K))$ est un voisinage de 0; on choisit $\rho \in\,]0, \theta(r)]$ assez petit pour que $\tilde{\tau}(V_0 \smallsetminus F(K))$ contienne le disque $D(0, \rho)$. Pour $w \in (\tilde{\tau})^{-1}(D(0, \rho))$, montrer que toute préimage $z \in F^{-1}(w)$ est nécessairement contenue dans l'un des ouverts $U_{j,r}$, et en conclure que la somme des multiplicités de ces préimages est indépendante de w [considérer les fonctions holomorphes $\zeta \mapsto \eta = \tilde{\tau} \circ F \circ \tau_j^{-1}(\zeta)$ sur $\overline{D}(0, r)$, et prendre $\eta = \tilde{\tau}(w)$].

(f) Déduire de ce qui précède que $d(w) = d$ est indépendant de w : on appelle cet entier le *degré* de l'application holomorphe $F : X \to Y$, c'est par définition le nombre de préimages par F d'un point quelconque $w \in Y$, compté avec multiplicités.

(g) Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ une courbe elliptique et $\wp : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la fonction de Weiesrtrass correspondante. Montrer que son degré est égal à 2. [*Indication*: considérer la préimage de ∞].

2. (*Points d'inflexion des courbes projectives planes*)

On considère dans le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ une courbe X définie en coordonnées homogènes $z = (z_0, z_1, z_2)$ par $P(z_0, z_1, z_2) = 0$ où P est un polynôme homogène de degré d.

(a) On se place au voisinage d'un point lisse $[m] \in X$ tel que $P(m) = 0$ et $dP(m) \neq 0$. Montrer, quitte à permuter les coordonnées, que X admet une paramétrisation holomorphe locale $z = f(t)$, $t \in D(0, r)$, avec $[f(0)] = [m]$ et, disons, $f_0(t) \equiv 1$, $(f_1'(0), f_2'(0)) \neq (0, 0)$ [supposer $m_0 \neq 0$ et appliquer le théorème des fonctions implicites avec par exemple $t = z_1/z_0$.]

(b) Montrer, avec les notations de (a), que les autres paramétrisations holomorphes locales $\tau \mapsto g(\tau)$ de $P(g(\tau)) = 0$ avec $[g(0)] = [m]$ et $g'(0) \neq 0$ sont données par $g(\tau) = g_0(\tau) f(\varphi(\tau))$, où g_0 est holomorphe non nulle et φ est un biholomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Montrer que la condition $f''(0) = 0$ équivaut à ce que $g''(0)$ soit colinéaire à $g'(0)$. On dit alors que $[m] \in X$ est un point d'inflexion de X. [Le cas modèle est celui de la courbe $y = x^3$ à l'origine, mais pour $y = x^d$, $d \geq 4$, on a un point osculateur d'ordre plus élevé qui n'est pas toujours un point d'inflexion au sens strict.]

(c) On note $H(P)(z)$ la forme quadratique hessienne sur $\mathbb{C}^3$ définie par la matrice des dérivées secondes $(\partial^2 P/\partial z_j \partial z_k)$, de sorte que

$$H(P)(z)(v) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial z_k}(z)\, v_j v_k.$$

On suppose que $[m]$ est un point d'inflexion. En prenant les 4 dérivées partielles secondes (holomorphes) de la relation $P(uf(t)) = 0$ par rapport aux variables u, t, en $(u,t) = (1,0)$, montrer $H(P)(m)$ est identiquement nulle sur le plan vectoriel de $\mathbb{C}^3$ engendré par $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire que l'on a $\det(H(P))(m) = 0$, où $Q = \det(H(P)) = \det(\partial^2 P/\partial z_j \partial z_k)$ est un polynôme de degré $3(d-2)$.

(d) Réciproquement, on suppose que l'on a un point $m \in \mathbb{C}^3 \smallsetminus \{0\}$ tel que $P(m) = 0$, $\det(H(P))(m) = 0$ et $dP(m) \neq 0$. Il existe alors un vecteur $v \in \mathbb{C}^3 \smallsetminus \{0\}$ tel que $v \in \mathrm{Ker}(H(P))$ [on entend par là le noyau de la matrice $H(P)$]. Montrer en utilisant la relation d'Euler pour les dérivées de P que $m \notin \mathrm{Ker}(H(P))$, de sorte que v et m sont indépendants, et enfin que $v \in \mathrm{Ker}(dP(m))$. Conclure de là que $[m]$ est un point d'inflexion de X.

(e) On admet ici le théorème classique de Bézout qui affirme que l'intersection de deux courbes algébriques projectives planes $Q(z) = 0$, $R(z) = 0$ de degrés respectifs d_1, d_2 admet $d_1 d_2$ points d'intersection comptés avec multiplicités, sauf si Q et R admettent un facteur commun F de degré > 0, auquel cas il y a une infinité de points d'intersection. Déduire du théorème de Bézout que si $d \geq 3$, l'ensemble algébrique $\{[m] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\,;\ P(m) = \det(H(P))(m) = 0\}$ est non vide, et que toute courbe algébrique lisse de degré $d \geq 3$ admet au moins un point d'inflexion, et en fait $3d(d-2)$ tels points si on les compte avec multiplicités.

3. On appelle cubique du plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'ensemble X des points $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tels que $P(x,y,z) = 0$ où $P \in \mathbb{C}[x,y,z]$ est un polynôme homogène de degré 3, non nul.

(a) Montrer qu'un trinôme du troisième degré $x \mapsto x^3 + ax + b$ admet 3 racines complexes simples si et seulement si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ et que dans ce cas l'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ définit une surface de Riemann lisse X' dans le plan affine complexe $\mathbb{C}^2$.

(b) Déterminer les points à l'infini de la projectivisée $X = \{y^2 z - (x^3 + axz^2 + bz^3) = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (pour la carte dont la droite à l'infini est $H_\infty = \{z = 0\}$). Si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, montrer que X est lisse (y compris à l'infini).

(c) Sous les hypothèses du (b), montrer que $F : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $[x : y : z] \mapsto x/z$ est holomorphe de degré 2, et que $G : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $[x : y : z] \mapsto y/z$ est holomorphe de degré 3 [ne pas oublier de vérifier l'holomorphie au(x) point(s) à l'infini de X].

(d) Si $x^3 + ax + b$ admet une racine x_0 triple, montrer après translation qu'on peut se ramener à la courbe dite "cusp" $y^2 = x^3$, dont l'origine est l'unique point singulier, et qui peut se paramétriser "rationnellement" par $t \mapsto (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(e) Si $x^3 + ax + b$ admet une racine x_0 double et une racine $x_1 \neq x_0$ simple, montrer qu'on peut effectuer un changement linéaire affine de la variable x pour se ramener à $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$, et en déduire que la courbe X admet encore une paramétrisation rationnelle $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X$.

(f) L'objet de cette question est de montrer qu'une cubique lisse quelconque $X = \{P(x,y,z) = 0\}$ peut se ramener à la forme dite "de Weierstrass" $y'^2 z' = x'^3 + ax'z'^2 + bz'^3$ par un changement linéaire de variable $(x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. On choisit $m, v \in \mathbb{C}^3$ comme dans la question 2 (d) [en s'appuyant sur le résultat de 2 (e)], et on change les coordonnées en sorte que $v = (1,0,0)$ et $m = (0,1,0)$, où $t \mapsto m + tv$ est la tangente d'inflexion.

– Vérifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(m + tv) = P(t,1,0) = \alpha t^3$, si bien que P est de la forme

$$P(x,y,z) = \alpha x^3 + zQ(x,y,z)$$

où Q est un polynôme homogène de degré 2, c'est-à-dire une forme quadratique.

– On a nécessairement $\alpha \neq 0$, sinon les points d'intersection de $z = 0$ et $Q(x,y,z) = 0$ seraient des points singuliers.

– Quitte à diagonaliser $Q(0,y,z)$ et à changer de nouveau les coordonnées dans le plan $0yz$ (sans toucher à x !), on peut supposer $Q(0,y,z) = \beta y^2 + \gamma z^2$, de sorte que $Q(x,y,z) = \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta x^2 + \varepsilon xy + \theta xz$.

– On a $\beta \neq 0$, sinon le point $[0 : 1 : 0]$ ne serait pas lisse, et un changement $\tilde{y} = y + (\varepsilon/2\beta)x$ permet de supprimer le terme εxy dans Q.

– Un changement $x' = \alpha^{1/3}x + \lambda z$, $y' = \beta^{1/2}y$ permet de se ramener à la forme de Weierstrass.