Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Question de cours : [3 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.

a) Rappeler la définition de la fonction $f(x) = d(x, A)$ *distance de* $x \in E$ *à* A.

b) Montrer que la fonction f est continue.

c) Donner une expression de l'adhérence $\overline{A}$ à l'aide de la fonction f. Justifier cette expression.

Exercice 1. [3 points] Soit sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$ et l'application linéaire entre espaces vectoriels normés $f : (\mathbb{R}^2, ||.||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, 2x - 3y)$. Montrer que f est continue et déterminer $|||f|||$.

Exercice 2. [6 points] Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées 2×2 réelles que l'on munit de la norme $||A||_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$.

1) Dire pour les parties suivantes si elles sont ouvertes, ou fermées, et donner leur intérieur et leur adhérence.

a) L'ensemble $\mathcal{J}$ des matrices inversibles.

b) L'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices orthogonales (i.e. $\mathcal{O} = \{A \in E,\ {}^tA.A = Id\}$).

2) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} 1 + 1/n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que peut-on dire de la diagonalisabilité des suites de matrices (A_n) et (B_n) et de leurs limites ? En déduire que $\mathcal{D}$ n'est ni ouvert ni fermé.

b) En considérant l'ensemble $\mathcal{D}'$ des matrices ayant deux valeurs propres distinctes, déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{D}$.

Exercice 3. [5 points] Soit $E = C^0[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. On considère les deux normes $||.||$ et $||.||_1$ définies respectivement par

$$||h|| = \sup\{|h(t)| \,\big|\, t \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad ||h||_1 = \int_0^1 |h(u)|du.$$

1) Comparer les normes $||.||$ et $||.||_1$. En déduire qu'un ouvert O de $(E, ||.||_1)$ est aussi un ouvert de $(E, ||.||)$

2) Montrer que l'ensemble $U = \{f \in E|\ f(1/2) \neq 0\}$ est un ouvert de $(E, ||.||)$ mais pas un ouvert de $(E, ||.||_1)$. Quel est l'intérieur de U dans $(E, ||.||_1)$?

3) Déterminer l'adhérence $\overline{U}$ de U dans $(E, ||.||)$.

Exercice 4. [4 points]

On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la norme donnée par le module défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Pour $r \geq 0$, on définit la partie $A \subset \mathbb{C}$ par $A = B(0, 1) \cup B_f(2, 1)$
(A est donc la réunion de la boule ouverte $B(0, 1)$ et de la boule fermée $B_f(2, 1)$).

1) Dessiner A.

2) Déterminer l'intérieur $\overset{\circ}{A}$.

3) Déterminer l'adhérence $\bar{A}$.