Topo B 2013-2014 **Feuille d'exercices 9**

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer à l'aide du théorème de Weierstrass que $f = 0$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé dénombrable. Montrer que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base de H [Indication : considérer (par exemple) la série $\sum_0^\infty 2^{-n}e_n$].

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

a) $(E, ||.||_\infty)$ est-il un espace vectoriel normé complet ?

Soient $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $L : E \to E$ l'application linéaire définie par $L(f)(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,t)f(t)dt$.

b) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $||L(f)||_\infty \leq k||f||_\infty$ pour tout $f \in E$.

c) Montrer qu'il existe un entier $p > 0$ tel que l'application L^p (L composée p fois) soit contractante.

d) En déduire que si $h \in E$ est donnée, il existe $f \in E$ unique solution à l'équation fonctionnelle $f(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,t)f(t)dt + h(x)$.

e) On considère le cas $K(x,t) = xt$ et on suppose que h est de classe C^2, déduire de d) l'existence d'une solution f à l'équation différentielle $f''(x) - x^2f'(x) - 3xf(x) = h''(x)$.

Exercice 4. Soit $P = \mathbb{R}^2$ le plan muni de la norme $||.||_\infty$ et $E = P^3 = \mathbb{R}^6$ muni de la norme $||.||_\infty$.

On considère $f : E \to E$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\big(y+z, x+z, x+y\big)$ et $g = f - \mathrm{id}$.

1) Montrer que $g \circ f = -\dfrac{1}{2}g$.

Soit pour $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$ donné, la suite $(u_n) = (x_n, y_n, z_n)$ de E définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n), \forall n$.

2) En considérant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) converge vers $w \in E$.

3) Montrer que $w = (x,y,z)$ avec $x = y = z = \dfrac{1}{3}\big(x_0, y_0, z_0\big)$.

4) On note T_n le domaine triangulaire fermé de sommets $x_n, y_n, z_n \in P$. Retrouver le résultat précédent en considérant la suite des parties $T_n \subset P$.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)$ bornées, et F le sous espace vectoriel des suites u telles que $\sum |u_n|$ converge. Pour $u \in E$, on pose $||u||_\infty = \sup_n |u_n|$, et pour $u \in F$, on pose $||u||_1 = \sum |u_n|$. On fixe $a \in E$, et on considère l'application $f : E \to E$ qui envoie u sur $au = (a_nu_n)_n$.

1) Montrer que f est une application linéaire continue et calculer sa norme.

2) Montrer que l'espace E n'est pas un Hilbert.

3) Montrer que $f(F) \subset F$, et calculer la norme de la restriction $f_{|F}$ par rapport à la norme $||\ ||_1$ sur F.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. L'endomorphisme $L : E \to E$ défini par $L(f)(t) = t^2f(t)$.

Montrer que $|||L||| = 1/2$ [pour une fonction $f \in E$, on introduira $F(t) = \int_0^t |f(u)|\,du$)].

Exercice 7. On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

1) Montrer que l'application φ: $f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ est continue.

2) Montrer que l'ensemble $X = \{f \in E \mid 1 < \int_0^1 f(t)\,dt < 3\}$ est ouvert.

3) Donner son adhérence $\overline{X}$ et sa frontière.

4) Montrer que $\overline{X}$ n'est pas compacte [*Indication :* on pourra montrer que la partie $\overline{X}$ n'est pas bornée en exhibant une suite non bornée de fonctions de X].

5) Est-ce que la partie $J = \overline{X} \cap \{f \in E \mid \|f\|_\infty \leq 42\}$ est compacte ?

Exercice 8. On considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles et sur E les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ définies par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

1) Montrer que l'application identique $id : (E, \|.\|_\infty) \to (E, \|.\|_1)$ est continue bijective mais que sa réciproque n'est pas continue.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $\sin(f(x)) - 2f(x) + 2 = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 9. Soit $E = l^\infty = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\}$ l'espace des suites bornées de réels muni de la norme sup $||(u_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Montrer que dans $(E, ||.||_\infty)$ la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte en considérant la suite $(x_n) \in E$ où pour n fixé (x_n) est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le nième qui vaut 1.

Exercice 10. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit pour toute fonction $f \in E$,

$$T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x uf(u)du \right) \, dx \; .$$

Montrer que T est contractante de E dans E.
En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f telle que $f'(0) = f(0) = 0$ et qu'il s'agit de la fonction nulle.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit $f : E \longrightarrow E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p (p-ième itérée de f) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12. Soit $\phi \in C^0[0,1]$ non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'il existe une unique solution $f \in C^1([0,1])$ de l'équation fonctionnelle $f(0) = \alpha, \;\; f'(x) = f(\phi(x))$.

Soit $E = C^0[0,1]$ muni de $\|.\|_\infty$ et $T : E \longrightarrow E$ défini par $T(f) = g$ où $g(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x f(\phi(t)) \, dt$.
Montrer que T^2 est contractante. Utiliser l'exercice précédent et conclure.

Exercice 13. Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels de carré sommable muni du produit scalaire $< u|v >= \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$. On note C le sous-ensemble des suites positives ou nulles.

1) Démontrer que E est complet.

2) Démontrer que C est un convexe fermé de E.

3) Soit $u \in E$, déterminer la projection Pu de u sur C.

4) Vérifier que pour tout $v \in C$, $< u - Pu|v - Pu > \leq 0$.