Densité et Valeurs d'adhérence

Exercice 1. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Soit A une partie de E et soit $f\ : A \to F$ une application continue. Si $A' \subset A$ est dense dans A montrer que $f(A')$ est dense dans $f(A)$.

Exercice 2. Soit α un nombre réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $u_n = n\alpha\ [2\pi]$, où $n\alpha\ [2\pi]$ est l'unique $x \in [0, 2\pi[$ pour lequel il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha = x + 2k\pi$.

1) Soient n et p deux entiers distincts de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ non nul tel que $u_q = |u_n - u_p|$. En déduire que s'il existe n et p distincts tels que $u_n = u_p$ alors α/π est rationnel.

2) Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est fini si et seulement si α/π est rationnel.

3) On suppose que α/π est irrationnel. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $n \neq p$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $|u_n - u_p| < \varepsilon$. En déduire que $\{u_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 2\pi[$. L'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est-il dense dans $[0, 2\pi]$?

4) On suppose que α/π est irrationnel. Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 3. En utilisant les exercices précédents, déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ données par :

1) $u_n = \big(n, (-1)^n\big)$ 2) $u_n = \big((-1)^n, (-1)^{n+1}\big)$ 3) $u_n = \big(1/n, \cos(n)\big)$ 4) $u_n = z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

Continuité

Exercice 4. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et N une norme sur E.
Montrer l'équivalence des propriétés
i) $||.||$ est plus fine que N.
ii) N est continue sur $(E, ||.||)$ entier.
iii) N est continue en 0.

Exercice 5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur $(E, ||.||)$. On suppose que $f(E) \subset \mathbb{N}$. Montrer que f est constante.
Indication : si $x, y \in E$, considérer $g(t) = f(tx + (1-t)y)$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.

1) Montrer que la formule $||P|| = \sum_{k=1}^{\infty} |P^{(k)}(0)|$ définit une norme sur E.

2) Est-ce que $f : (E, ||.||) \to (E, ||.||)$ définie par $f(P) = P^2$ est continue ?
Indication : On pourra considérer la suite (P_n) où $P_n(X) = \dfrac{X^n}{(n+1)n!}$.

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe une unique écriture sous forme de fraction irréductible $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$. On considère les fonctions f, g définies sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :
a) $f(x) = \dfrac{p}{p+q}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{Q}$.
b) $g(x) = \dfrac{p^2}{p+q}$. Montrer que g n'est continue en aucun point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 8. Est-ce que les fonctions $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$? sur $[0, 1]$?

Normes triples

Exercice 9. Soit sur $\mathbb{R}^2$ la forme linéaire $f(x,y) = x - \sqrt{3}y$. Déterminer $|||f|||$ dans les deux cas :

a) $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_\infty$.

b) $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $||.||_2$.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||P|| = \sup\{|P(t)| \,\big|t \in [0,1]\}$ (pourquoi c'est une norme sur E ?). Soit $a \in \mathbb{R}$ et f_a la forme linéaire définie par $f_a(P) = P(a)$.

1) Montrer que f_a n'est pas continue pour $||.||$ si $a \notin [0,1]$.

2) Montrer que f_a est continue pour $||.||$ si $a \in [0,1]$. Déterminer alors $|||f_a|||$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme dont $A = (a_{ij})$ est la matrice par rapport à la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$. Déterminer $|||f|||$ dans les deux cas :

a) $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $||.||_\infty$ [Réponse : $|||f||| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$]

b) $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $||.||_1$.

Ouverts, fermés, adhérence, intérieur

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Donner un point qui est dans l'intérieur de A, un point qui est adhérent à A et dans A, un point qui est adhérent à A mais pas dans A et un point qui n'est pas adhérent à A.

La partie A est-elle ouverte, fermée ? Donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.

Reprendre les mêmes questions avec $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et avec $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Pour chaque partie suivante, dire si elle est ouverte ou fermée (ou ni l'une ni l'autre) et donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.

$A = [3, \infty[\cup [1, \sqrt{2}]$

$B = \{1\} \cup]2,\ +\infty[$

$C = \cup_{n\in\mathbb{N}} [n, n + 1/2]$

$D = \cap_{n\in\mathbb{N}}] - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[$

$E = \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\}$

$F = (] - 1, 0] \cap \mathbb{Q}) \cup \{4(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \geq 1\}$

$G = \mathbb{Q} \cup [1, 3[$

$H = \mathbb{Z} + x\mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. En considérant la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 + x^2$ et l'ensemble $E =] - \infty, 0[$, montrer que $f^{-1}(\overline{E})$ n'est pas toujours égal à $\overline{f^{-1}(E)}$. Y a-t-il forcément une inclusion dans un sens ?

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance usuelle. Pour chaque partie suivante, dire si elle est ouverte ou fermée et donner son intérieur, son adhérence et sa frontière.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\ \max(x + y, x - y) < 1\}$

$B = [0, 1[\times \{0\}$

$C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 2] \times [-1, 0[)$

$E = \{(x, \min(x^2, 1)),\ x \in \mathbb{R}\}$

$F = \cup_{x\in\mathbb{R}} [-|\cos x|, |\cos x|] \times \{x\}$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ réelles que l'on munit de la norme $||A||_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}|$. Dire pour les parties suivantes si elles sont ouvertes, ou fermées, et donner leur intérieur et leur adhérence.

1) L'ensemble des matrices inversibles.

2) L'ensemble des matrices orthogonales (i.e. $\{A \in E,\ {}^tA.A = Id\}$).

3) L'ensemble des projecteurs (i.e. $\{A \in E,\ A^2 = A\}$).

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) Si E est de dimension finie, montrer que $F = \overline{F}$.

3) Montrer que dans $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$, l'ensemble $\{f \in E,\ f(0) = 0\}$ est un sev de E qui n'est pas fermé.

4) Dans le cas général, montrer que $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ ou $F = E$.