Topo B 2013-2014 **Feuille d'exercices 4**

Normes

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel réel et $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que f vérifie l'inégalité triangulaire si $f(u+v) \leq f(u)+f(v)$ pour tous $u, v \in E$. Montrer que si f et g vérifient l'inégalité triangulaire alors il en va de même de $f+g$ et $\max(f, g)$. Montrer par des exemples que ce n'est pas le cas pour $f-g$ et $\min(f, g)$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, dire s'il s'agit ou non d'une norme. Si oui, représenter graphiquement la boule unité.
1) $f(x, y) = 1$;
2) $g(x, y) = 0$;
3) $h(x, y) = x + y$;
4) $i(x, y) = |x|$;
5) $j(x, y) = |x + y|$;
6) $k(x, y) = |x + y| + |x - y|$;
7) $l(x, y) = \max(x, y)$;
8) $m(x, y) = \max(1 + x, y - x, 2x - y)$;
9) $n(x, y) = \max(\max(x, 0) + \max(y, 0), \max(-x, 0) + \max(-y, 0))$.

Exercice 3. Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général $u_n(x) = \dfrac{x}{n^3 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$E = \left\{P : [0,1] \to \mathbb{R} |\ \exists n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \cdots, n \text{ avec } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ \ \forall x \in [0,1]\right\}$$

On considère sur E les norme $||.||$ et $||.||_1$ définies par

$$||P|| = \sup\{|P(t)|\ \big| t \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad ||P||_1 = \max_{k=0,\cdots,n} |a_k| \quad \text{si} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Vérifier que $||.||$ et $||.||_1$ sont bien des normes sur E.

2) En considérant les suites de fonctions polynomiales $P_n(t) = t^n(1-t)^n$ et $Q_n(t) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k$ montrer que ces deux normes ne sont pas comparables.

3) Soit la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$. Quel est son rayon de convergence ? converge-t'elle simplement, normalement, uniformément sur $[0, 1]$? qu'en déduit on pour la suite (S_n) de $(E, ||.||)$ définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k}.$$

Exercice 5. 1) Soit $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$. On choisit $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$, $(n+1)$ réels
distincts. Montrer que $\|P\| = \sup_{i=0..n} |P(x_i)|$ définit une norme.
2) Pour $n = 1$, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, déterminer et dessiner l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les polynômes $aX + b$ forment la boule unité de $\mathbb{R}_1[X]$ relativement à la norme ci-dessus. Montrer que cette norme est équivalente à la norme $\|aX + b\|_1 = |a| + |b|$.

Exercice 6. L'expression $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ définit-elle une norme
1) sur l'ensemble des polynômes réels d'une variable réelle définis sur $\mathbb{R}$?
2) sur l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. Soit ρ une fonction continue, positive ou nulle sur $[0,1]$ (appelée "poids"). Pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles, on pose

$$\|f\|_\rho = \int_0^1 |f(x)|\rho(x)\ dx\ .$$

Soit $Z_\rho = \{x \in [0,1],\ \rho(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de ρ.

1) On suppose qu'il n'existe pas d'intervalle $]\alpha,\beta[\subset [0,1]$ tel que $]\alpha,\beta[\subset Z_\rho$ (on dit que Z_ρ est d'intérieur vide). Montrer que $\|.\|_\rho$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$ des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur $[0,1]$.
2) Lorsque Z_ρ vérifie la propriété ci-dessus, montrer que la norme $\|\ \|_\rho$ est équivalente à la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

si et seulement si $Z_\rho = \emptyset$.

Normes sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, caractériser les normes qui proviennent d'un produit scalaire (indication : si la norme provient d'un produit scalaire, comment à partir de la norme pouvez-vous redéfinir le produit scalaire ?). Parmi les normes que vous connaissez, quelles sont celles qui proviennent d'un produit scalaire ?

Exercice 9. Trouver la distance de l'origine de $\mathbb{R}^2$ à $S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Exercices généraux

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé, et $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E, qui définit une norme $\|\ \|$ sur E. Montrer que la sphère $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ ne contient aucun segment $[x,y] = \{tx + (1-t)y \in E \mid t \in [0,1]\}$ avec $x \neq y$.
En déduire que sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

ne provient pas d'un produit scalaire.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, pour tout $r > 0$, la boule $B(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r vérifie

$$B(x_0, r) = \{x_0 + ry,\ y \in B(0,1)\}\ .$$

Exercice 12. Soit $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})$, $i = 1,2$, deux espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times E_2$ l'espace vectoriel produit muni d'une des normes

$$\|(x_1,x_2)\|_E = \max(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}),\quad \text{ou } \|(x_1,x_2)\|_E = \left(\|x_1\|_{E_1}^p + \|x_2\|_{E_2}^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

1) Vérifier que ce sont bien des normes sur E.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ dans E. Montrer que, si $x = (x_1, x_2) \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ dans E, alors, pour chaque $i = 1,2$, x_i est une valeur d'adhérence de la suite $(x_{i,n})_n$ dans E_i. Étudier la réciproque.
3) Montrer qu'une suite d'éléments de E converge si et seulement si chaque composante converge.

Exercice 13. Soit $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
1) Montrer que si f est continue, alors son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in X\}$ est une partie *fermée* de $X \times Y$, c'est-à-dire que tout point de $X \times Y$ limite d'une suite d'éléments de Γ appartient à Γ.
2) Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 14. Donner des exemples d'applications bijectives continues dont la réciproque n'est pas continue.