Exercice 1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, x^2 + y^2 < 9\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, x > y^2\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq (x-1)(x-2)\} \cap A, \quad D = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_-) \cup \{(x,y), x = \sin y\}.$$

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes.

1) f est décroissante.

2) f n'est pas croissante.

3) f est injective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction injective.

4) f n'est pas surjective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction surjective.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux deux propriétés suivantes.

(i) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.

(ii) Les ensembles A_n recouvrent $\mathbb{R}$, c'est à dire, $\cup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$.

1. Écrire ces deux propriétés à l'aide de symboles mathématiques, sans utiliser $\cup$ et $\cap$.
2. Montrer qu'on peut trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
3. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = (]x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
4. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1])$ remplisse les conditions ci-dessus.

Borne supérieure, borne inférieure, limite supérieure.

Exercice 4. Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cet ensemble admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 5. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Déterminer la borne supérieure $\sup f(A)$ où $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$.

Exercice 6. Soit $B = \mathbb{Q} \cap]0,1[$. On considère la fonction $g(x) = x - x^3$.

1. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $g(B)$ dans $\mathbb{R}$.
2. Qu'en est-t'il dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, n nombres réels. Déterminer $\inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Exercice 8. Déterminer $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ de la suite $u_n = \cos(2\pi n/3)$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose $L = \limsup u_n$.

1. Soit une suite a_n convergeant vers a. Déterminer $\limsup(a_n + u_n)$ en fonction de a et de L.
2. Déterminer $\limsup e^{u_n}$ en fonction de L.

Exercice 10. Soient A et B deux parties bornées non vides de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

2) Comparer $\sup(A \cap B)$ avec $\sup A$ et $\sup B$.

3) Mêmes questions pour les bornes inférieures.

4) On note $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

5) On note $A - B = \{a - b,\ a \in A, b \in B\}$. Évaluer $\sup(A - B)$ en fonction des quantités pertinentes pour A et B.

Exercice 11. Soit une application f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, croissante. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. (Note : f n'est pas supposée continue. Un exercice classique est que le résultat est vrai si on remplace le mot "croissante" par le mot "continue" dans l'hypothèse.)

Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble A des $x \in [0, 1]$ tels que $f(x) \leq x$.

a) Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0, 1]$. La suite de l'exercice consiste à montrer que α est un point fixe de f.

b) Exploiter la croissance de f pour démontrer :

i) Si $x \in [0, 1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

ii) Si $x \in [0, 1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

c) En appliquant le résultat i) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \leq \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$.

En appliquant alors le ii) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \geq \alpha$, et conclure.

Rationnels, développement décimal, suites.

Exercice 12. La suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ est-elle convergente ?

Exercice 13. Montrer que la suite $u_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$ (définie pour $n \geq 1$) est divergente.

Exercice 14. Montrer que toute suite de réels, croissante et majorée, est convergente.

Exercice 15. (**irrationnalité de e**) Soient $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire l'existence d'un réel e tel que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers (premiers entre eux) conduit à une contradiction en choisissant une certaine valeur de n dans la double inégalité précédente. Conclure.

Exercice 16. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut 14.

Exercice 17. Montrer que si r est un nombre rationnel non nul et x un nombre irrationnel, $r + x$ et rx sont des nombres irrationnels. Montrer qu'entre deux rationnels, il existe toujours un irrationnel, et qu'entre deux réels il existe toujours un irrationnel et un rationnel. (Ne pas en déduire qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$! cela est faux).

Exercice 18. Soit x un réel.

1) Donner un développement décimal de $\frac{22}{7}$.

2) Démontrer que x est rationnel si et seulement ses développements décimaux sont périodiques à partir d'un certain rang.

3) Donner des exemples de développements décimaux d'irrationnels.

4) Calculer $0.454545... + 0.565656....$