Université de Grenoble I **Année 2010/2011**
Institut Fourier **Examen du 18 mai 2011**

Corrigé de l'épreuve de L3 de Calcul différentiel

Question de cours

0.a. Énoncer les deux théorèmes fondamentaux sur l'existence (respectivement l'existence et l'unicité) des solutions d'une équation différentielle $dy/dt = f(t,y)$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$: il s'agit des théorèmes de Cauchy-Peano-Arzelà (existence d'une solution maximale du problème de Cauchy de donnée initiale $y(t_0) = y_0$ lorsque f est continue) et Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf (existence et unicité de la solution maximale du problème de Cauchy si l'on suppose f continue et localement lipschitzienne en y).

0.b. Si l'on prend $n = 1$ et $f(t,y) = f(y) = |y|^\alpha$ avec $\alpha \in \,]0,1[$, on voit facilement que le problème de Cauchy de donnée initiale $y(0) = 0$ admet plusieurs solutions maximales, par exemple $y(t) = 0$ et $y(t) = \mathrm{signe(t)}\,((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $t\in\mathbb{R}$ (on peut voir qu'il y a en fait dans ce cas une infinité de solutions maximales pour toute donnée initiale (t_0,y_0)). On notera en revanche que f est bien de classe C^1 si $\alpha \geq 1$, donc dans ce cas il y a unicité.

0.c. Un raisonnement par récurrence sur k montre facilement que si f est de classe C^k, $k\in\mathbb{N}$, alors les solutions $t\mapsto y(t)$ sont de classe C^{k+1}.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble S des points (x,y,z) tels que $z^2 - P(x,y) = 0$ où P est un polynôme à coefficients réels.

1.a. Montrons que si le système d'équations $P = \partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$ n'a pas de solutions (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ alors S est une sous-variété de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$. En effet, si f est la fonction de classe C^∞ telle que $f(x,y,z) = z^2 - P(x,y)$, on a $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\ f(x,y,z) = 0\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Si la différentielle Df s'annule en un point $(x,y,z)\in S$, on a donc déjà $z = 0$, ce qui implique $P(x,y) = z^2 = 0$, et aussi $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$. Sous l'hypothèse que le système d'équations $P = \partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$ n'a pas de solutions (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, on voit donc que Df ne s'annule pas sur S. Ceci entraîne d'après le théorème des fonctions implicites que S est une sous-variété de classe C^∞ de codimension 1 de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que S est une surface ($\dim S = 2$).

1.b. On sait que le sous-espace *vectoriel* tangent à S en un point (x_0,y_0,z_0) est le noyau de la différentielle $\ker Df(x_0,y_0,z_0)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$-\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)\,u - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\,v + 2z_0\,w = 0.$$

Il s'agit d'un plan vectoriel. Le plan *affine* tangent à S est donné par l'équation

$$-\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + 2z_0\,(z-z_0) = 0.$$

1.c. On pose

$$g(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}\qquad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

Comme la fonction racine carrée est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, on voit déjà que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}},\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Pour voir ce qui se passe au voisinage de $(0,0)$, passons en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. On a

$$x^4 + y^4 = r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = r^4\big((1+\cos 2\theta)^2 + (1-\cos 2\theta)^2\big)/4 = r^4(1+\cos^2 2\theta)/2,$$

par conséquent on a l'encadrement $r^4/2 \le x^4 + y^4 \le r^4$. Ceci implique la majoration

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \le \frac{2r^3}{\sqrt{r^4/2}} = 2\sqrt{2}\,r, \qquad \text{et de même} \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| \le 2\sqrt{2}\,r.$$

On voit que $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ se prolongent par continuité en $(0,0)$ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$, donc g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées secondes sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ sont données quant à elles par

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6x^2(x^4+y^4) - 4x^6}{(x^4+y^4)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4x^3y^3}{(x^4+y^4)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6y^2(x^4+y^4) - 4y^6}{(x^4+y^4)^{3/2}}.$$

On voit facilement qu'elles n'admettent pas de limite en $(0,0)$, ainsi on a par exemple $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$ tandis que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,x) = -\sqrt{2}$. Ceci implique que g n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$.

Complément: on notera que g est homogène de degré 2, c'est-à-dire $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 g(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. C'est un exercice très facile de voir qu'une fonction homogène de degré 2 qui est 2 fois différentiable en $(0,0)$ vérifie nécessairement $Dg_{(0,0)} = 0$ et $g(x,y) = \frac{1}{2}D^2 g_{(0,0)}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que g est une forme quadratique (pour le voir il suffit d'utiliser un développement limité à l'ordre 2 de $\lambda \mapsto g(\lambda x, \lambda y)$ en $\lambda = 0$). Donc ici on peut en conclure que g n'est même pas 2 fois différentiable en $(0,0)$.

1.d. On suppose que $P(x,y) = x^4 + y^4$. Dans ce cas, les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x} = 4x^3$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3$ s'annulent simultanément en $(x,y) = (0,0)$, et on a aussi $P(0,0) = 0$. Ceci ne se produit que pour ce seul point. Le raisonnement du 1.a montre que $S \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ est une sous-variété de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ de dimension 2. On voit également de manière évidente que $S = S_+ \cup S_-$ où S_+ et S_- sont respectivement les graphes $z = g(x,y)$ et $z = -g(x,y)$ des fonctions $\pm g(x,y) = \pm\sqrt{x^4+y^4}$, qui sont de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Donc S_+ et S_- sont des surfaces de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$; d'après 1.b, $S_+ \smallsetminus \{(0,0,0)\}$, $S_- \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ sont de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ mais S_+, S_- ne sont pas de classe C^2 près de $(0,0,0)$. Pour tout voisinage V de $(0,0,0)$ on voit que $V \cap (S \smallsetminus \{(0,0,0)\})$ se compose de deux parties disjointes fermées dans $V \smallsetminus \{(0,0,0)\}$ qui sont $V \cap (S_\pm \smallsetminus \{(0,0,0)\})$; donc $V \cap (S \smallsetminus \{(0,0,0)\})$ possède au moins deux composantes connexes, ce qui implique que S ne peut être une sous-variété au voisinage de $(0,0,0)$. Le point $(0,0,0)$ est bien un point singulier de S. Le plan $z = 0$ est le plan tangent commun aux deux nappes S_+ et S_- en $(0,0,0)$.

1.e. On considère ici l'intersection C de l'ensemble S défini par $f_1(x,y,z) = z^2 - (x^4+y^4) = 0$ avec la sphère unité d'équation $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. La fonction $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est polynomiale donc de classe C^∞, et dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, elle admet une application linéaire tangente Df de matrice

$$\mathrm{Mat}(Df_{(x,y,z)}) = \begin{pmatrix} -4x^3 & -4y^3 & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de déterminer le rang de cette matrice ; le rang n'est pas constant puisque que l'on a par exemple $Df_{(0,0,0)} = \mathbf{0}$. Les mineurs de rang 2 sont

$$\begin{vmatrix} -4x^3 & -4y^3 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = -8xy(x^2-y^2), \qquad \begin{vmatrix} -4x^3 & 2z \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = -4xz(2x^2+1), \qquad \begin{vmatrix} -4y^3 & 2z \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = -4yz(2y^2+1).$$

Ils s'annulent simultanément si et seulement si $xy(x^2-y^2) = xz = yz = 0$. Si $z \ne 0$, ces conditions équivalent à $x = y = 0$ (axe Oz privé de l'origine), tandis que si $z = 0$, on a la réunion des quatre droites $x = 0$, $y = 0$ et $y = \pm x$ du plan Oxy. Au total on obtient 5 droites ; Df est de rang 2 sur le complémentaire de ces 5 droites, de rang 1 en tout point de l'une ces 5 droites autre que l'origine, et de rang 0 à l'origine.

Il est facile de constater que chacune des 5 droites en question rencontre $S = \{z^2 = x^4 + y^4\}$ au seul point $(0,0,0)$, donc ces droites sont disjointes de $C = \{(x,y,z)\,;\ f(x,y) = (0,0)\}$ qui est inclus dans la sphère unité. Par conséquent le rang de Df est 2 en tout point de C, et d'après le théorème des fonctions implicites C est une sous variété de classe C^∞ et de codimension 2 de $\mathbb{R}^3$; autrement dit $\dim C = 1$, i.e. C est une courbe de $\mathbb{R}^3$ (compacte). Si $\Sigma = \{x^2 = y^2 = z^2 = 1\}$ désigne la sphère unité, on a par définition $C = S \cap \Sigma$ et donc $C = C_+ \cup C_-$ avec $C_+ = S_+ \cap \Sigma$ et $C_- = S_- \cap \Sigma$. Comme C_+ et C_- sont des parties fermées disjointes, on voit que C admet au moins deux composantes connexes. À l'aide d'un dessin, il est graphiquement assez clair que C_+ doit être une courbe connexe (C_- qui lui est symétrique par rapport au plan $z = 0$ sera donc elle aussi connexe). Pour le vérifier formellement on peut constater que C est l'ensemble des solutions du système d'équations $f_1(x,y,z) = 0$, $f_2(x,y,z) - f_1(x,y,z) = 0$, et donc C_+ (resp. C_-) est obtenu comme un graphe $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ (resp. $z = -\sqrt{x^4 + y^4}$) au dessus de la courbe plane Γ d'équation

$$h(x,y) := f_2(x,y,z) - f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + x^4 + y^4 - 1 = 0.$$

En coordonnées polaires, ceci donne

$$r^2 + r^4(1 + \cos^2(2\theta))/2 - 1 = 0.$$

Comme la fonction $r \mapsto r^2 + r^4(1 + \cos^2(2\theta)) - 1$ est strictement croissante pour $r > 0$, on voit qu'il y a une unique solution $r = \rho(\theta) > 0$ pour chaque angle $\theta \in [0, 2\pi[$, dépendant de manière C^∞ de θ. La courbe Γ est homéomorphe (et même difféomorphe) à un cercle, elle est donc connexe, de même que C_+ et C_- qui lui sont homéomorphes par projection sur le plan Oxy. Si on le veut vraiment, on peut d'ailleurs calculer la solution positive de l'équation "bicarrée" précédente :

$$r = \rho(\theta) = \sqrt{(-1 + \sqrt{3 + 2\cos^2 2\theta})/(1 + \cos^2 2\theta)}.$$

Ceci aurait permis d'établir toutes les propriétés de C de manière élémentaire – quoique très obscure – sans utiliser le théorème des fonctions implicites ; mais le premier raisonnement fonctionnerait encore par exemple avec $P(x,y) = 3x^{10} + 5x^6y^8 + 7y^{12}$, bien que C ne soit alors plus explicitable par radicaux ...

1.f. D'après le théorème dit des "extrema liés", les extrema de la fonction $(x,y,z) \mapsto z$ sur chacune des composantes connexes de C sont obtenus aux points où la différentielle de la fonction $(x,y,z) \mapsto z$ est linéairement dépendante de Df_1 et Df_2. Ceci conduit à étudier les zéros du déterminant

$$\begin{vmatrix} -4x^3 & -4y^3 & 2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8xy(x^2 - y^2).$$

Il s'agit des plans $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$. Le plan $y = 0$ coupe C_+ aux points tels que $z = x^2$ et $x^2 + x^4 - 1 = 0$, soit $x = \pm\sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$ et $z = x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \simeq 0.618$. Le plan $x = 0$ coupe de même C_+ aux points tels que $y = \pm\sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$ et $z = y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Pour les plans $y = \pm x$, on trouve les équations $z = \sqrt{2}\,x^2$ et $2x^2 + 2x^4 - 1 = 0$, soit $x = \pm\sqrt{(-2 + \sqrt{12})/4}$ et $z = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \simeq 0.517$. Ceci donne respectivement les maxima et minima de z sur C_+. Ici, un peu par miracle, on aurait pu aussi retrouver ce résultat "élémentairement" par la formule $z = \sqrt{1 - \rho(\theta)^2}$, les extrema de z correspondent à ceux de $\theta \mapsto \rho(\theta)$, qui sont obtenus pour $\cos(2\theta) = \pm 1$ ou $\cos(2\theta) = 0$.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ouvert $\Omega = \,]R_1, R_2[\, \times \,]0, a[$ avec $0 \le R_1 < R_2$ et $a > 0$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(r,u) = \begin{pmatrix} r\cos(u) \\ r\sin(u) \\ \lambda u \end{pmatrix}$$

pour une certaine constante réelle $\lambda \neq 0$.

2.a. Il est clair que f est de classe C^∞ et que

$$\mathrm{Mat}(Df_{(r,u)}) = (f'_r, f'_u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -r\sin(u) \\ \sin(u) & r\cos(u) \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, il est clair que les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants, par exemple on a $f'_r \wedge f'_u = \begin{pmatrix} \lambda\sin(u) \\ -\lambda\cos(u) \\ r \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$, donc Df est partout de rang 2, i.e. $Df_{(r,u)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est toujours injective. On exprime cette propriété en disant que f est une immersion.

2.b. Si $(f(r,u) = f(r',u')$ alors l'égalité $z = \lambda u = z' = \lambda u'$ implique $u = u'$, et on voit alors que $r = r'$. L'application f est continue injective sur le compact $\overline{\Omega}$, c'est donc un homéomorphisme de $\overline{\Omega}$ sur le compact $f(\overline{\Omega})$. On voit que $f(\Omega)$ est contenu dans le "cylindre épais" ouvert U défini par $R_1 < r = \sqrt{x^2+y^2} < R_2$ et $z \in]0, \lambda a[$. On a $f(\Omega) = f(\overline{\Omega}) \cap U$, donc pour $(r_0, u_0) \in \Omega$ le point $f(r_0, u_0)$ ne peut être adhérent à l'image $f(\Omega \smallsetminus V)$ du complémentaire d'un voisinage V de (r_0, u_0) du fait de la propriété d'homéomorphisme. Ceci implique d'après le cours que $S = f(\Omega)$ est une sous-variété fermée de dimension 2 de U (une surface en "colimaçon").

2.c. Le plan vectoriel tangent à S en un point $M = f(r,u)$ est le plan vectoriel engendré par f'_r et f'_u, le plan affine tangent est le plan passant par $M = f(r,u)$ de base (f'_r, f'_u). D'après la formule générale donnée en cours, l'élément d'aire euclidienne de la surface S s'exprime comme

$$d\sigma = \sqrt{\begin{vmatrix} f'_r \cdot f'_r & f'_r \cdot f'_u \\ f'_r \cdot f'_u & f'_u \cdot f'_u \end{vmatrix}}\, dr\, du.$$

Dans ce cas simple, on observera que ceci donne en fait $d\sigma = \|f'_r \wedge f'_u\|\, dr\, du$. L'une ou l'autre de ces formules implique aussitôt $d\sigma = \sqrt{\lambda^2 + r^2}\, dr\, du$. Comme $\int_0^a du = a$, le théorème de Fubini montre que l'aire totale de la surface S est

$$\sigma = a \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\lambda^2 + r^2}\, dr.$$

Remarque. Ceci peut se calculer plus explicitement si on le souhaite (mais pour cela il faut être suffisamment entraîné au calcul des intégrales !). Quitte à remplacer λ par $-\lambda$, il n'est pas restrictif de supposer $\lambda > 0$. On obtient classiquement une primitive de $\sqrt{\lambda^2 + r^2}\, dr$ en posant $r = \lambda \sinh t$, ce qui donne $dr = \lambda \cosh t\, dt$. Il vient

$$t = \operatorname{Arg\,sinh}(r/\lambda) = \ln(r/\lambda + \sqrt{1 + (r/\lambda)^2}) = \ln(r + \sqrt{\lambda^2 + r^2}) - \ln \lambda$$

et

$$\sqrt{\lambda^2 + r^2} = \lambda\sqrt{1 + \sinh^2 t} = \lambda \cosh t,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda^2 + r^2}\, dr &= \lambda^2 \cosh^2 t\, dt = \lambda^2 \frac{1 + \cosh 2t}{2} dt \\ &= \frac{\lambda^2}{2} d\Big(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\Big) = \frac{\lambda^2}{2} d\big(t + \sinh t \cosh t\big) \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\, d\Big(\ln\big(r + \sqrt{\lambda^2 + r^2}\big) + (r/\lambda)\sqrt{1 + (r/\lambda)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\, d\Big(\lambda^2 \ln\big(r + \sqrt{\lambda^2 + r^2}\big) + r\sqrt{\lambda^2 + r^2}\Big). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule

$$\sigma = \frac{a}{2}\left(\lambda^2 \ln \frac{R_2 + \sqrt{\lambda^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{\lambda^2 + R_1^2}} + R_2\sqrt{\lambda^2 + R_2^2} - R_1\sqrt{\lambda^2 + R_1^2}\right),$$

qui est encore valable pour $\lambda < 0$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - ty \\ \dfrac{dy}{dt} = tx + ay \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante fixée.

3.a. En posant $z = x + iy$, le système différentiel devient

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = (ax - ty) + i(tx + ay) = (a + it)(x + iy) = (a + it)z.$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre sans terme constant. Une primitive de $t \mapsto a + it$ est $t \mapsto at + \frac{i}{2}t^2$, la solution générale est donc $z(t) = \lambda \exp(at + \frac{i}{2}t^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. La solution du problème de Cauchy de donnée initiale (x_0, y_0) en $t_0 = 0$ est donnée par $\lambda = z_0 = x_0 + iy_0$, soit

$$z(t) = z_0 \exp\big(at + \tfrac{i}{2}t^2\big) = z_0 e^{at} \exp\big(\tfrac{i}{2}t^2\big) = z_0 e^{at}\big(\cos(t^2/2) + i\sin(t^2/2)\big).$$

En termes réels, on trouve

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}\big(x_0\cos(t^2/2) - y_0\sin(t^2/2)\big) \\ y(t) = e^{at}\big(x_0\sin(t^2/2) + y_0\cos(t^2/2)\big). \end{cases}$$

3.b. Pour le problème de Cauchy avec $z(t_0) = z_0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, on trouve aussitôt

$$z(t) = z_0 \exp\Big(-at_0 - \frac{i}{2}t_0^2\Big)\exp\Big(at + \frac{i}{2}t^2\Big) = z_0 \exp\Big(a(t - t_0) + \frac{i}{2}(t^2 - t_0^2)\Big).$$

En coordonnées réelles, ceci se récrit

$$\begin{cases} x(t) = e^{a(t-t_0)}\big(x_0\cos((t^2 - t_0^2)/2) - y_0\sin((t^2 - t_0^2)/2)\big) \\ y(t) = e^{a(t-t_0)}\big(x_0\sin((t^2 - t_0^2)/2) + y_0\cos((t^2 - t_0^2)/2)\big). \end{cases}$$

Par conséquent, la matrice résolvante $M(t, t_0)$ est donnée par

$$M(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}\begin{pmatrix} \cos((t^2 - t_0^2)/2) & -\sin((t^2 - t_0^2)/2) \\ \sin((t^2 - t_0^2)/2) & \cos((t^2 - t_0^2)/2) \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la formule du Wronskien est bien satisfaite : $\det M(t, t_0) = e^{2a(t-t_0)} = \int_{t_0}^{t} 2a\, d\tau$, ici $2a$ est bien la trace de la matrice $\begin{pmatrix} a & -t \\ t & a \end{pmatrix}$ qui définit le système.

3.c. Le système différentiel d'ordre un

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - ty + t\,\cos(t^2/2) \\ \dfrac{dy}{dt} = tx + ay + t\,\sin(t^2/2) \end{cases}$$

se récrit sous forme complexe $dz/dt = (a + it)z + t\,e^{it^2/2}$. La méthode de variation de la constante $z(t) = \lambda(t)\exp\big(at + i\frac{t^2}{2}\big)$ conduit à l'équation $\lambda'(t)\exp\big(at + i\frac{t^2}{2}\big) = t\,e^{it^2/2}$, soit $\lambda'(t) = t\,e^{-at}$ et donc $\lambda(t) = \lambda_0 - \big(\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}\big)e^{-at}$ si $a \neq 0$ et $\lambda(t) = \lambda_0 + \frac{t^2}{2}$ si $a = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. On en déduit la solution générale

$$z(t) = \lambda_0 \exp(at + it^2/2) - \Big(\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}\Big)e^{it^2/2} \ \text{ si } a \neq 0, \qquad \text{resp. } \ z(t) = (\lambda_0 + t^2/2)e^{it^2/2} \ \text{ si } a = 0.$$