Feuille d'exercices 7
Connexes

Cours de Licence 3

Année 10/11

Exercice 1. *$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont-ils connexes ?*
Quelles sont leurs composantes connexes ?

Exercice 2. *Montrer l'équivalence :*
(i) E est connexe.
(ii) E admet une seule composante connexe.

Exercice 3. *Soit (E, d) un espace métrique connexe non borné. Montrer que toute sphère (i.e. tout ensemble de la forme $\{x \in E/\ d(x_0, x) = r\}$ où $x_0 \in E$ et $r > 0$) est non vide.*

Exercice 4. *Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$ et B une partie connexe tels que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$.*
Montrer que $B \cap \partial A \neq \emptyset$. (Passage des douanes)

Exercice 5. *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques non vides.*
Montrer que $E_1 \times E_2$ est connexe si et seulement si E_1 et E_2 sont connexes.
Montrer que si $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x_1) \times \mathcal{C}(x_2)$.
En déduire les composantes connexes de $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^*$.

Exercice 6. *Soit (E, d) un espace métrique, et A, B deux parties connexes de E telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$.*
1) *a) Montrer que $A \cup B$ est connexe (indication : tout ouvert contenant B rencontre A).*
b) Obtenir ce même résultat en vérifiant que toute application continue $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ est constante.
2) *Donner un exemple où la conclusion est fausse si on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.*

Exercice 7. *Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, muni de l'une des distances usuelles. Montrer que :*
1) *$\mathbb{R}^n \setminus H$ a deux composantes connexes C_1 et C_2.*
2) *Si $a \in H$, alors $C_1 \cup \{a\} \cup C_2$ est connexe par arcs.*
3) *Si A est un sous-ensemble strict de H, alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ est connexe.*

Exercice 8. *Montrer que la sphère* $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$, $n \geq 2$ *est connexe par arcs, puis que* $\mathbb{R}^n \setminus S_{n-1}$ *a deux composantes connexes.*

Exercice 9. 1) *Soit* A *une partie d'un espace métrique* (E, d)*. On suppose que pour tout* x, y *dans* A*, il existe une partie connexe* $A_{x,y}$ *de* A *contenant* x *et* y*. Montrer que* A *est connexe.*
2) *Soit* $GL(n, \mathbb{C})$ *le groupe des matrices* $n \times n$ *inversibles à coefficients complexes, et* A *et* B *dans* $GL(n, \mathbb{C})$*. Montrer qu'il existe une partie connexe* H *de* $GL(n, \mathbb{C})$ *qui contient* A *et* B*. (Indication : Construire* H *à l'aide de l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} / \text{dét}(\gamma(z)) \neq 0\}$*, où* γ *est l'application définie par* $\gamma(z) = zA + (1-z)B,\ z \in \mathbb{C}$*).*
3) *En déduire que* $GL(n, \mathbb{C})$ *est connexe.*

Exercice 10. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Soit* x *et* y *dans* E *et* $\epsilon > 0$*.*
On dit qu'il existe une ϵ*-chaine reliant* x *et* y *s'il existe une suite finie de points de* E $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *telle que* $x_0 = x,\ x_n = y$ *et* $d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon$ *pour tout* $0 \leq i \leq n-1$*.*
1) *Soit* $x \in E$ *et* $\epsilon > 0$*. Soit* $E(x, \epsilon)$ *l'ensemble des points de* E *tel qu'il existe une* ϵ*-chaine les reliant à* x*.*
Montrer que $E(x, \epsilon)$ *est non vide, ouvert et fermé.*
2) *Montrer qu'un espace métrique connexe est bien enchainé, c'est à dire que pour tout* x *et* y *dans* E *et* $\epsilon > 0$*, il existe une* ϵ*-chaine reliant* x *et* y*.*
La réciproque est-elle vraie ?
3) *Montrer qu'un espace métrique compact est connexe si et seulement si il est bien enchainé.*

Exercice 11. *Soit* $(K_n)_{n \geq 0}$ *une suite décroissante de compacts non vides d'un espace métrique* (E, d)*.*
1) *Montrer que* $K = \cap_{n=0}^{\infty} K_n$ *est un compact non vide et que pour tout ouvert* U *contenant* K*, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $K_n \subset U$*.*
2) *Montrer que si tous les compacts* K_n *sont connexes alors* K *est connexe. (Indication : On considérera deux fermés disjoints* F_1 *et* F_2 *tels que* $K = F_1 \cup F_2$*. On montrera qu'il existe* U_1 *et* U_2 *disjoints ouverts avec* $F_i \subset U_i$ *et on utilisera la question précédente avec* $U = U_1 \cup U_2$*.)*
3) *Montrer que ce résultat est faux si on remplace "compact" par "fermé".*

Exercice 12. *Montrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints.*