Devoir topologie numéro 1

Cours de Licence 3

Année 10/11

Partie 1
Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $x \in E$.
Le point x est un point isolé de E si il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\, \cap \, E = \{x\}$.
1) Quels sont les points isolés de $\{\frac{1}{n}, \ n \geq 1\}$?
2) Quels sont les points isolés de $\mathbb{Q}$?
3) Montrer qu'une partie E de $\mathbb{R}$ n'ayant que des points isolés est dénombrable.
(On pourra montrer qu'il existe une réunion d'intervalles ouverts disjoints notée G telle que $E = E \cap G$ et utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.)

Partie 2
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
1) Soit $a \in I$. On définit $\overline{f}(a)$ et $\underline{f}(a)$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par :

$$\overline{f}(a) = \lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} (\sup\{f(y), \ y \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap I\})$$

$$\underline{f}(a) = \lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} (\inf\{f(y), \ y \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap I\})$$

Montrer que les limites précédentes existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Soit J un intervalle ouvert inclus dans I contenant a. Montrer que

$$\inf_J f \leq \underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a) \leq \sup_J f$$

On pose $\omega(f, a) = \overline{f}(a) - \underline{f}(a)$ qui est appelée l'oscillation de f en a.
Montrer que f est continue en a si et seulement si $\omega(f, a) = 0$.

2) Soit $a \in I$.
f admet une limite à droite en a si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]a, a + \eta[\cap I, \ |f(x) - l| < \epsilon$$

Cette limite, si elle existe sera notée $f(a+)$.
On définit de même, si elle existe la limite à gauche $f(a-)$.

On dit que f admet une discontinuité de première espèce en a si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite et $f(a+) \neq f(a-)$.
Donner un exemple d'une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant en 0 une discontinuité autre que de première espèce.
Montrer que si f est croissante, f n'admet que des discontinuités de première espèce.

3) On suppose que f admet en a une discontinuité de première espèce.
Déterminer $\omega(f,a)$ en fonction de $f(a-), f(a), f(a+)$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \omega(f,x) = 0$.

4) On veut montrer que l'ensemble des discontinuités de première espèce de f est dénombrable.
Soit D l'ensemble des discontinuités de première espèce de f.
Soit pour $n \geq 1$, $D_n = \{x \in D / \ \omega(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$.
a) Montrer que $D = \cup_{n \geq 1} D_n$.
b) Soit $n \geq 1$. Montrer que D_n n'a que des points isolés.
c) Conclure

5) Soit $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de points de $]0,1[$ dense dans $[0,1]$.
Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs de somme égale à 1.
Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$f(x) = \sum_{n / x_n < x} \alpha_n$$

a) Justifier l'existence de cette fonction f et montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est A.
b) On pose $B = f([0,1])$. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ dans B . Montrer que son application réciproque f^{-1} définie de B dans $[0,1]$ est strictement croissante.
c) Montrer que f^{-1} se prolonge de façon unique en une application croissante g de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
d) Montrer que g est continue.
e) Montrer que la somme des longueurs des intervalles de $[0,1]$ sur lesquels g est constante est égale à 1.