# Corrigé du devoir topologie numéro 1

Cours de Licence 3

Année 10/11

**Partie 1**
**1)** Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n}$ est un point isolé de $\{\frac{1}{n},\ n \geq 1\}$.
En effet, si $\epsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ alors $]\frac{1}{n} - \epsilon, \frac{1}{n} + \epsilon[ \cap \{\frac{1}{n},\ n \geq 1\} = \{\frac{1}{n}\}$.
**2)** $\mathbb{Q}$ n'a pas de points isolés car entre deux rationnels, on peut toujours en trouver un autre.
**3)** Première méthode : Pour tout $x \in E$, il existe $\epsilon_x > 0$ tel que $]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[ \cap E = \{x\}$.
On en déduit que si $x \neq y$ sont deux éléments de $E$, $]x - \frac{\epsilon_x}{2}, x + \frac{\epsilon_x}{2}[ \cap ]y - \frac{\epsilon_y}{2}, y + \frac{\epsilon_y}{2}[ = \emptyset$.
En effet supposons par exemple que $\epsilon_x \leq \epsilon_y$. Si $z \in ]x - \frac{\epsilon_x}{2}, x + \frac{\epsilon_x}{2}[ \cap ]y - \frac{\epsilon_y}{2}, y + \frac{\epsilon_y}{2}[$, on a alors

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_y}{2} \leq \epsilon_y$$

On en déduit donc que $x \in ]y - \epsilon_y, y + \epsilon_y[$ ce qui est contradictoire avec la définition de $\epsilon_y$.
Soit alors $\varphi$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
On définit l'application $\psi$ de $E$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\psi(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} / \varphi(n) \in ]x - \frac{\epsilon_x}{2}, x + \frac{\epsilon_x}{2}[\}$$

Cet inf est un plus petit élément qui existe car l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / \varphi(n) \in ]x - \frac{\epsilon_x}{2}, x + \frac{\epsilon_x}{2}[\}$ est non vide, $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$.
Grâce au fait que $]x - \frac{\epsilon_x}{2}, x + \frac{\epsilon_x}{2}[ \cap ]y - \frac{\epsilon_y}{2}, y + \frac{\epsilon_y}{2}[ = \emptyset$, $\psi$ est injective On en déduit donc la dénombrabilité de $E$.
Deuxième méthode :
Grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(q_x, t_x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tels que $]q_x, t_x[ \cap E = \{x\}$.
Alors l'application de $E$ dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $x \mapsto (q_x, t_x)$ est injective, d'où la dénombrabilité de $E$.
**Partie 2**
Notons $\overline{f}_\epsilon(a) = \sup\{f(y),\ y \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \cap I\}$ qui est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $\epsilon < \epsilon'$, $]a - \epsilon, a + \epsilon[ \cap I \subset ]a - \epsilon', a + \epsilon'[ \cap I$ donc $\overline{f}_\epsilon(a) \leq \overline{f}_{\epsilon'}(a)$.
Ainsi $\epsilon \to \overline{f}_\epsilon(a)$ est croissante donc admet une limite quand $\epsilon$ tend vers 0 par valeurs supérieures. (on démontrera ce résultat à la question 2)) On a $\overline{f}(a) = \inf_{\epsilon > 0} \overline{f}_\epsilon(a)$.
En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, $\overline{f}(a) \leq \overline{f}_\epsilon(a)$ et pour tout $\lambda > \overline{f}(a)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in ]a - \epsilon, a + \epsilon[ \cap I$, $f(x) < \lambda$.**(*)**

On traite de même $\underline{f}(a)$ qui est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Pour tout $\epsilon > 0$, $a \in ]a-\epsilon, a+\epsilon[ \cap I$, donc $\inf\{f(y),\ y \in ]a-\epsilon, a+\epsilon[ \cap I\} \leq f(a) \leq \sup\{f(y),\ y \in ]a-\epsilon, a+\epsilon[ \cap I\}$.
Par passage à la limite, on a donc $\underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a)$.
Si $J$ est un intervalle ouvert contenant $a$ et inclus dans $I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[ \subset J$
D'où $\inf_J f \leq \underline{f}_\epsilon(a) \leq \underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a) \leq \overline{f}_\epsilon(a) \leq \sup_J f$.
$\omega(f,a)$ est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
$\omega(f,a) = 0$ si et seulement si $\underline{f}(a) = \overline{f}(a)$ et ce nombre est alors fini et égal à $f(a)$ .
Supposons $f$ continue en $a$. Soit $\epsilon > 0$.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in ]a-\eta, a+\eta[ \cap I$, $f(a)-\epsilon < f(y) < f(a)+\epsilon$.
En appliquant ce qui précède à $J = ]a-\eta, a+\eta[ \cap I$, on a :

$$f(a) - \epsilon \leq \inf_J f \leq \underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a) \leq \sup_J f \leq f(a) + \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit :

$$f(a) \leq \underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a) \leq f(a)$$

d'où $\underline{f}(a) = f(a) = \overline{f}(a)$ et $\omega(f,a) = 0$.
Supposons maintenant $\omega(f,a) = 0$.
On a donc grâce à $\underline{f}(a) \leq f(a) \leq \overline{f}(a)$, $\underline{f}(a) = f(a) = \overline{f}(a)$
Alors en utilisant **(*)**, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\displaystyle\sup_{]a-\eta_1, a+\eta_1[ \cap I} f \leq f(a) + \epsilon$
et il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\displaystyle\inf_{]a-\eta_2, a+\eta_2[ \cap I} f \geq f(a) - \epsilon$.
En prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a :

$$\forall y \in ]a-\eta, a+\eta[ \cap I,\ f(a) - \epsilon \leq f(y) \leq f(a) + \epsilon$$

On en déduit la continuité de $f$ en $a$.
**2)** Considérons la fonction$f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
Alors $f$ n'admet pas de limite à droite en 0.
En effet si $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $x_n$ tend vers 0 par valeurs supérieures et $f(x_n) = 1$.
Si $y_n = \frac{1}{\pi+2n\pi}$, $y_n$ tend vers 0 par valeurs supérieures et $f(y_n) = 0$.
On veut maintenant montrer que si $f$ est une fonction croissante, elle admet en tout point des limites à droite et à gauche .
Soit $a \in I$ et $b \in I, b > a$ tel que $[a,b] \subset I$. L'ensemble $\{f(x)/x \in ]a,b[\}$ est non vide et minoré par $f(a)$. Il admet donc une borne inférieure qu'on notera $l$.
Alors pour tout $\epsilon > 0$, $l + \epsilon$ n'est pas un minorant de $\{f(x)/x \in ]a,b[\}$, donc il existe $y \in ]a,b[$ tel que $l \leq f(y) < l + \epsilon$.
Mais $f$ étant croissante, pour tout $x \in ]a,y]$, $l \leq f(x) \leq f(y) < l + \epsilon$.
On a donc montré qu'il existait $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y > a$ et pour tout $x \in ]a,y]$, $|f(x) - l| \leq \epsilon$.
On traite de façon analogue la limite à gauche.

**3)** Soit $\epsilon > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in ]a, a+\eta[$, $|f(x) - f(a+)| < \epsilon$ et pour tout $x \in ]a-\eta, a[$, $|f(x) - f(a-)| < \epsilon$.
On a donc pour tout $x \in ]a - \eta, a + \eta[$, $f(x) \leq \max(f(a+), f(a-), f(a)) + \epsilon$.
En utilisant la question **1)**, on en déduit que $\overline{f}(a) \leq \max(f(a+), f(a-), f(a)) + \epsilon$ et ceci pour tout $\epsilon > 0$ donc $\overline{f}(a) \leq \max(f(a+), f(a-), f(a))$.
Soit $\epsilon > 0$. On sait par **(*)** qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in ]a - \eta, a + \eta[\cap I$, $f(x) < \overline{f}(a) + \epsilon$. En passant à la limite quand $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures, on en déduit que $f(a+) \leq \overline{f}(a) + \epsilon$ et de même que $f(a-) \leq \overline{f}(a) + \epsilon$.
Comme $f(a) \leq \overline{f}(a) + \epsilon$, on en déduit que $\max(f(a+), f(a-), f(a)) \leq \overline{f}(a) + \epsilon$ et ceci pour tout $\epsilon > 0$. Donc $\max(f(a+), f(a-), f(a)) \leq \overline{f}(a)$.
D'où $\overline{f}(a) = \max(f(a+), f(a-), f(a))$.
On montre de même que $\underline{f}(a) = \min(f(a+), f(a-), f(a))$.
Soit $\epsilon > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in ]a, a+\eta[$, $|f(x) - f(a+)| < \epsilon$ et pour tout $x \in ]a-\eta, a[$, $|f(x) - f(a-)| < \epsilon$.
En appliquant le résultat de **1)** à $J = ]a, a + \eta[$ qui est un intervalle ouvert contenant $x \in ]a, a + \eta[$, on a :

$$f(a+) - \epsilon \leq \underline{f}(x) \leq \overline{f}(x) \leq f(a+) + \epsilon$$

et donc $\omega(f, x) \leq 2\epsilon$.
De même, pour tout $x \in ]a - \eta, a[$, $\omega(f, x) \leq 2\epsilon$.
On a donc montré que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in ]a - \eta, a + \eta[\setminus\{a\},\ \omega(f, x) \leq 2\epsilon$$

donc $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \omega(f, x) = 0$.
**4) a)** Pour tout $n$, $D_n \subset D$.
Si $x \in D$, $f$ n'est pas continue en $x$ et $0 < \omega(f, x) < +\infty$. On en déduit qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \omega(f, x)$ et donc $x \in D_n$.
**b)** Soit $x \in D$.
D'après la question précédente, $\lim\limits_{y \to x, y \neq x} \omega(f, y) = 0$.
Donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in ]x - \eta, x + \eta[\setminus\{x\}$, $\omega(f, y) < \frac{1}{n}$.
On en déduit donc que $y \notin D_n$ et que $]x - \eta, x + \eta[\cap D_n = \{x\}$.
**c)** On déduit de la première partie que l'ensemble des points de discontinuité de première espèce de $f$ est dénombrable.
**5) a)** On peut voir $f$ comme une série de fonctions et utiliser les résultats connus.

$$f = \sum_{n \geq 1} f_n \quad \text{où } \forall x \in [0, 1]\ f_n(x) = \alpha_n \mathbf{1}_{]x_n, +\infty[}$$

Comme pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n < +\infty$, on en déduit la convergence normale donc uniforme.
Les fonctions $f_n$ sont toutes continues à gauche, il en est donc de même pour $f$.

$f_n$ est continue sur $[0,1]$ sauf en $x_n$ où elle admet une limite à droite égale à $\alpha_n$.
On en déduit que $f$ est continue sur $[0,1] \setminus A$, est continue à gauche sur $]0,1]$ et admet en tout point de $A$ une limite à droite.
De plus pour tout $n \geq 1$, $f(x_n+) = f(x_n) + \alpha_n$.
Soit $x < y$ deux éléments de $[0,1]$. Comme $A$ est dense dans $[0,1]$, il existe $n \geq 1$ tel que $x < x_n < y$.
Comme $f(y) - f(x) = \displaystyle\sum_{k/x \leq x_k < y} \alpha_k$, on a $f(y) - f(x) \geq \alpha_n > 0$. $f$ est donc strictement croissante.
**b)** $f$ étant strictement croissante est injective. On en déduit donc que $f$ est une bijection de $[0,1]$ dans $f([0,1])$.
Si $y < z$ sont deux éléments de $B$, alors il existe $x$ et $a$ tels que $y = f(a)$ et $z = f(x)$. Or $f$ étant strictement croissante $a < b$ c'est à dire $f^{-1}(y) < f^{-1}(z)$.
**c)** Notons pour $y \in [0,1]$, $g(y) = \sup\{x \in [0,1] / f(x) \leq y\}$.
$g$ est bien définie car l'ensemble $\{x \in [0,1] / f(x) \leq y\}$ est non vide (contient 0) et majoré par 1.
De plus pour tout $z < g(y)$, $f(z) \leq y$. $f$ étant continue à gauche, on en déduit que $f(g(y)) \leq y$ et donc l'équivalence :

$$x \leq g(y) \iff f(x) \leq y$$

Il est clair que $g$ est croissante.
Si $y \in B$ Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $y = f(x)$ et on a donc $g(y) \geq x$ et grâce à la croissance de $f$, $f(g(y)) \geq f(x) = y$. Or $f(g(y)) \leq y$ donc $f(g(y)) = f(x)$ et donc $g(y) = x = f^{-1}(y)$. $g$ prolonge donc $f^{-1}$ sur $[0,1]$.
Reste à montrer l'unicité. Soit $h$ une fonction croissante prolongeant $f^{-1}$ sur $[0,1]$.
Soit $y \in [0,1]$. On a $f(g(y)) \leq y$. On a donc $g(y) = h(f(g(y))) \leq h(y)$ par croissance de $h$.
Soit $x > g(y)$. On a donc $f(x) > y$ et donc $h(f(x)) = x \geq h(y)$. Ceci étant vrai pour tout $x > g(y)$, on en déduit que $g(y) \geq h(y)$.
**d)** $g$ étant croissante, elle admet en tout point des limites à droite et à gauche. Supposons qu'il existe un point $y$ point de discontinuité de première espèce pour $g$. Soit alors $x$ tel que $g(y-) < x < g(y+)$.
$g(y-) < x$ donc il existe $z_0 < y$ tel que pour tout $z \in ]z_0, y[$, $g(z) < x$ et donc $z < f(x)$ Par passage à la limite, on en déduit que $y \leq f(x)$.
$x < g(y+)$ donc il existe $z_0 > y$ tel que pour tout $z \in ]y, z_0[$, $x < g(z)$ et donc $f(x) \leq z$. Par passage à la limite, on en déduit que $f(x) \leq y$.
Donc pour tout $x \in ]g(y-), g(y+)[$, $f(x) = y$ Ceci contredit la stricte croissance de $f$.
$g$ est donc continue.
**e)** Pour tout $n \geq 1$, les intervalles $[f(x_n), f(x_n+)]$ sont 2 à 2 disjoints. De plus la restriction de $g$ à $[f(x_n), f(x_n+)]$ est constante et vaut $x_n$. On montre facilement que si $x < y$ et $g(x) = g(y)$ alors il existe $n \geq 1$ tel que $x$ et$y$ appartiennent à $[f(x_n), f(x_n+)]$.
Or $f(x_n+) = f(x_n) + \alpha_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \alpha_n = 1$. On en déduit que la somme des longueurs des intervalles de $[0,1]$ sur lesquels $g$ est constante est égale à 1.