Université Grenoble I
Mathématiques

Topologie L353 A
Vendredi 3 décembre 2010

Contrôle continu n° 2

Durée : 2 H

Avertissement : La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale.

Exercice 1.

A. Soit $E := \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $E_n \subseteq E$ la partie de E constituée des polynômes de degré $\leq n$. Pour $P = \sum_{i=0}^{N} p_i X^i \in E$, on définit

$$\|P\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} \{|P(x)|\} \quad \text{et} \quad \|P\|_1 := \sum_{i=0}^{N} |p_i|.$$

On admet que $(E, \|.\|_\infty)$ et $(E, \|.\|_1)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés.

1) Montrer que, pour tout $P \in E$, on a $\|P\|_\infty \leq \|P\|_1$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(X) := 2^n \prod_{j=1}^{2n} (X - j/(2n))$.
   a) Montrer que $xP_n(x) + (1-x)P_n(1-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Soit $x \in [0, 1/2]$. Montrer que
   $$2^n \prod_{j=1}^{n} \left| x - \frac{j}{2n} \right| \leq 1$$
   puis que $|P_n(x)| \leq 1$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que $\|P_n\|_\infty \leq 1$.
3) Prouver que $\|P_n\|_1 \geq 2^n$. En déduire que les deux normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur E.
4) L'espace $(E, \|.\|_\infty)$ est-il un espace de Banach ? Même question avec $(E, \|.\|_1)$.

B. Soit $L : E \to E$ définie par $L(P)(X) = P(X+1)$.

1) Montrer que, pour tout $P \in E$, on a $\|L(P)\|_1 \leq 2^{\deg P} \|P\|_1$.
2) En déduire que la restriction L_n de L à E_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Soit $|||L_n|||_1 := \sup\{\|L(P)\|_1 \,;\, P \in E_n \text{ et } \|P\|_1 \leq 1\}$. Justifier l'existence de cette borne supérieure et montrer que c'est un maximum.
4) Montrer que $|||L_n|||_1 = 2^n$.

Exercice 2. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach (sur $\mathbb{R}$), $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E et X une partie non vide de E. On dit que X est **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ (ici $B(x_i, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre x_i et de rayon ε).

1) **Question de cours** : Montrer que si F est de dimension finie alors F est un fermé de E.
2) a) **Question de cours** : Montrer que si X est compact alors X est complet.

b) Montrer que si X est compact alors X est précompact.

c) Montrer que si X est précompact alors X est bornée. Montrer que la réciproque est fausse.

3) Pour $e \in E$, on définit $\mathrm{d}(e, X) := \inf\{\|e - x\|\,;\ x \in X\}$. Justifier l'existence de $\mathrm{d}(e, X)$.

4) Soit $e \in E$. Montrer que si F est de dimension finie alors $\mathrm{d}(e, F)$ est un minimum.

5) Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}^+$, $e \mapsto \mathrm{d}(e, X)$ est 1-lipschitzienne. En déduire qu'elle est uniformément continue sur E (on le redémontrera).

6) Soit $r > 0$. Montrer que si F est de dimension finie et si X est borné alors $Y_F(r) := \{x \in F\,;\ \mathrm{d}(x, X) \leq r\}$ est un compact de F.

7) On admet que X *est compact si et seulement si* X *est complet et précompact.* Montrer alors que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) X est compact,

   (ii) X est fermé, borné et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace E_ε de E de dimension finie tel que, pour tout $x \in X$, on a $\mathrm{d}(x, E_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

   `Indication` : Pour (ii)$\Longrightarrow$(i), on pourra considérer $Y_{E_{\varepsilon'}}(r)$ avec r et ε' bien choisis.

8) Que dit l'énoncé précédent lorsque E est de dimension finie (justifier) ?

9) (**Hors barème**) Soit ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\|x\| := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ converge. On admet que $(\ell^1, \|.\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Montrer que $X \subseteq \ell^1$ est compact si et seulement si X est fermé, borné et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, on a $\sum_{n\geq N} |x_n| \leq \varepsilon$.