Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

de

Grégoire Charlot

Géométrie sous-riemannienne en petites dimensions

défendu publiquement le 24 septembre 2014 devant le jury composé de

Gérard Besson	Examinateur
Ugo Boscain	Examinateur
Jean-Paul Gauthier	Examinateur
Frédéric Jean	Rapporteur
Richard Montgomery	Rapporteur
Hervé Pajot	Examinateur
Michael Zhitomirskii	Rapporteur

Remerciements

Je souhaite tout particulièrement remercier les membres du jury. Frédéric Jean, Richard Montgomery et Michael Zhitomirskii qui ont pris la peine de lire en détail mon manuscrit et ont accepté d'être membres du jury. Merci pour vos remarques et vos encouragements. Ugo Boscain et Jean-Paul Gauthier qui me connaissent maintenant depuis plus de 15 ans et qui me font le plaisir d'être membres du jury. Gérard Besson et Hervé Pajot, membres des thèmes "Géométrie différentielle" et "Analyse" de l'Institut Fourier, que je suis heureux de compter parmi le jury.

Je voudrais aussi remercier mes co-auteurs qui pour la plupart sont devenus des amis. A nouveau Jean-Paul Gauthier et Ugo Boscain, mais aussi Mario Sigalotti, Andrei Agrachev, Thomas Chambrion, Bernard Bonnard, Roberta Ghezzi, Francesco Rossi, Davide Barilari et Paolo Mason. J'ai le souvenir ému de Vladimir Zakalyukin qui nous a quitté il y a peu.

Mes remerciements vont aussi aux membres de l'Institut Fourier, mes collègues directs, avec une mention spéciale pour Sylvestre Gallot, que j'ai eu comme enseignant à deux reprises et qui m'a attiré dans les filets de la géo diff.

Un clin d'oeil à Cyril Imbert et David Coudert à qui je dois en partie d'être là où je suis.

Et bien sûr à mes proches. Nedjma, pour ... tout ! François et Khadidja, Majo et Maxime, et Hadda, qui m'ont donné du temps au calme. A mes soeurs Hélène, Louise, Kenza et mon frère Neil.

A mes amis.

A mes oiseaux, Bilal et Anis.
Ils piaillent, ils piaillent, mais ils sont si beaux !

Table des matières

1 Introduction **9**

2 Géométrie sous-riemannienne : une courte introduction **13**
2.1 Le point de vue du géomètre 13
2.2 Le point de vue du contrôleur 15
2.3 Un point de vue unifié 15
2.4 Lieu de coupure, lieu conjugué 16
2.5 Approximation nilpotente 17
2.6 Développement limité d'un front d'onde 19

3 Structures presque-riemanniennes 2D : géométrie locale **21**
3.1 Structures presque-riemanniennes. Définitions et premières propriétés . . 21
3.2 Lieu de coupure et lieu conjugué en un point de type Grushin 24
3.3 Lieu de coupure et lieu conjugué en un point de tangence [C5] 26
3.4 Lieu de coupure du front d'onde issu du lieu singulier $\mathcal{Z}$ au voisinage d'un point de tangence [C2] 29
3.5 Forme normale pour les structures presque-riemanniennes en dimension 2 [C2] 30

4 Structures presque-riemanniennes 2D : résultats globaux **33**
4.1 Formule de Gauss-Bonnet 33
4.1.1 Rappel du cas riemannien 33
4.1.2 Une formule de type Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes presque-riemanniennes [4] 33
4.1.3 Une formule de type Gauss-Bonnet pour les domaines à bord [27] 35
4.1.4 Gauss-Bonnet dans le cas générique [C4] 35
4.2 Classification Lipschitz des surfaces presque-riemanniennes compactes en dimension 2 [C3] 37
4.2.1 Graphe associé à une surface compacte presque-riemannienne . . . 37
4.2.2 Classification Lipschitz des surfaces compactes presque-riemanniennes orientées 38

5 Asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur des métriques riemanniennes et sous-riemanniennes **41**
5.1 Résultats connus en riemannien et sous-riemannien 41
5.2 Résultats de Barilari, Boscain et Neel [13] 42
5.3 Singuarités génériques de l'application exponentielle et asymptotiques du noyau de la chaleur en dimension inférieure ou égale à 5 [C1] 45
5.3.1 Deux lemmes techniques importants 45
5.3.2 Applications au cas riemannien 47
5.3.3 Applications aux cas sous-riemannien de contact et de quasi-contact 49
5.3.4 Application au cas presque-riemannien 50

6 Perspectives **53**
6.1 Etudes des structures presque-riemanniennes en petites dimensions . . . 53
6.2 Etude locale des structures sous-riemanniennes de contact et quasi-contact. A la recherche de $\mathcal{A}_5$ 53
6.3 Singularités génériques sous-riemanniennes en petite dimension 53
6.4 Systèmes contrôlés finslériens et sous-finslériens 53

1 Introduction

Mon principal sujet de recherche est la géométrie sous-riemannienne. L'intérêt pour la géométrie sous-riemannienne est devenu important dans les années 80. Avant, principalement seuls les spécialistes des opérateurs hypoelliptiques s'y intéressaient et encore seulement comme métrique sous-jacente (voir en particulier les travaux de Hörmander, Grushin, Gaveau, Taylor, ...). A partir des années 80 et 90, la communauté du contrôle optimal commence à s'intéresser à la géométrie sous-riemannienne. Pour elle-même ; parce qu'elle représente un domaine où les extrémales anormales apparaissent naturellement dès la dimension 3 et s'avèreront pouvoir être optimales ; parce que les travaux de Léandre et Ben Arous sur l'équation de la chaleur hypoelliptique poussent à l'étude des singularités de la géométrie locale (sphère, front d'onde, lieu de coupure et lieu conjugué) ; mais aussi parce que la communauté s'était déjà intéressée à des problèmes de contrôle invariants sur des groupes de Lie et plus généralement au lien entre contrôle et géométrie. Ce sont alors Brockett [29, 28], Montgomery [47], Sussmann [45], Agrachev [5, 8, 1], Kupka [1, 22, 2, 32], Gauthier [32, 8, 10], Bonnard [2, 1, 20, 21], etc, qui défrichent les propriétés géométriques des structures sous-riemanniennes. Dans la même période, des mathématiciens d'autres communautés, tels Strichartz [55], Varopoulos [57], Bryant [30] et Gromov [37], sintéressent aussi à la géométrie sous-riemannienne.

Aujourd'hui, l'intérêt pour la géométrie sous-riemannienne trouve ses motivations dans plusieurs domaines : théorie du contrôle, opérateurs hypoelliptiques, géométrie riemannienne, géométrie CR, transport optimal de mesure, surfaces minimales, diffusion, etc. Elle trouve des applications en mécanique classique, en contrôle quantique, en reconstruction d'images, en géométrie de la vision, etc. Elle a ouvert le chemin vers de nouveaux domaines tels que la géométrie sous-lorentzienne et la géométrie sous-finslérienne. Les références sont devenues trop nombreuses pour pouvoir être exhaustif.

La géométrie sous-riemannienne a été l'objet principal de plusieurs conférences depuis la fin des années 2000 : à Milan (2009), Bologne (2009), Bélem (2010), Cortona (2012), Trento (2012), et a été le sujet d'une école CIMPA au Liban (2012). Elle apparaît comme un thème important dans de nombreuses conférences ou écoles de théorie géométrique de la mesure, transport optimal ou contrôle géométrique (Trimestre à Trieste en 2003) . Elle sera l'objet d'un trimestre IHP de septembre à décembre 2014.

`http://www.cmap.polytechnique.fr/subriemannian`

Je fais le choix de ne présenter ici que mes résultats de ces cinq dernières années concernant la géométrie sous-riemannienne. Les publications correspondantes sont référencées [C1] à [C5] page 11.

Ce mémoire est organisé en six parties, la première consistant en cette introduction. La deuxième partie contient les premières définitions de structure sous-riemannienne, ainsi que certaines propriétés générales utiles pour la suite. La troisième et la quatrième parties concernent les structures presque-riemanniennes du point de vue local (partie 3) et global (partie 4). La cinquième partie s'intéresse à l'asymptotique en temps petit du noyau de la chaleur en géométrie riemannienne et sous-riemannienne. La sixième et dernière partie présente certains projets de recherche que je souhaite développer dans un avenir proche. Ci dessous un résumé des parties 2 à 5.

Partie 2

Dans la partie 2, introductive au sujet, on définit d'abord de plusieurs façons la notion de métrique sous-riemannienne (2.1 à 2.3). La question étant de savoir si l'on veut considérer ou pas des structures pour lesquels la dynamique n'est pas de rang constant. On définit ensuite le lieu de coupure et le lieu conjugué (2.4), objets géométriques qui interviennent dans les parties 3, 4 et 5. On rappelle la définition d'approximation nilpotente (2.5), qui joue un rôle important dans l'estimation locale de l'application exponentielle et des objets géométriques qui y sont attachés (2.6).

Partie 3

Dans la partie 3, on étudie du point de vue local les structures presque-riemanniennes en dimension 2, ces structures étant des structures sous-riemanniennes dont la distribution de rang non constant est presque partout de la même dimension que la variété ambiente. On s'intéresse dans un premier temps à définir les structures presque-riemanniennes et à donner les premières propriétés locales dans le cas de la dimension 2 (3.1). On présente ensuite le lieu conjugué et le lieu de coupure local pour les points génériques (3.2 et 3.3) ainsi que pour le front d'onde issu du lieu singulier de la métrique (3.4). On construit enfin un système de coordonnées normales aux voisinages des différents types de points génériques : riemannien, de Grushin ou de tangence (3.5).

Partie 4

Dans la partie 4, fort des résultats locaux présentés en partie 3, on présente deux résultats globaux sur les surfaces presque-riemanniennes. Le premier est une généralisation d'une formule de type Gauss-Bonnet démontrée pour les surfaces presque-riemanniennes en l'absence de points de tangence (voir [4, 27]) au cas générique où il y a des points de tangence (4.1). Le second est un résultat de classification Lipschitz des surfaces presque-riemanniennes compactes en termes de graphes étiquetés associés à ces structures (4.2).

Partie 5

Dans cette partie, on présente une série de résultats sur l'asymptotique en temps petit du noyau de la chaleur pour les métriques riemanniennes et sous-riemanniennes. Ces résultats, qui prolongent un travail de Barilari, Boscain et Neel ([13]), s'appuient sur des résultats de Molchanov de 1975 ([46]) et de Léandre et Ben Arous ([44, 43, 18, 17]) de la fin des années 80. On obtient l'asymptotique du noyau de la chaleur au lieu de coupure de métriques riemanniennes et sous-riemanniennes, et conjointement les singularités génériques correspondantes de l'application exponentielle. On montre en particulier que, jusqu'à la dimension 5, les seules singularités génériques au lieu de coupure conjugué sont A_3 et A_5 (voir[11]).

Article soumis

C1 *On the heat diffusion for generic Riemannian and sub-Riemannian structures*, D. Barilari, U. Boscain, G. Charlot, R. Neel, soumis, `http://arxiv.org/abs/1310.0911`.

Publications

C2 *A Normal Form for Generic 2-Dimensional Almost-Riemannian Structures at a tangency point*, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, Differential Geometry and its Applications, 31 (2013), 41-62.

C3 *Lipschitz Classification of Two-Dimensional Almost-Riemannian Distances on Compact Oriented Surfaces*, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, M. Sigalotti, Journal of Geometric Analysis, Volume 23, Issue 1 , pp 438-455.

C4 *Two-Dimensional Almost-Riemannian Structures with Tangency Points*, A. A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, M. Sigalotti, Ann. I. H. Poincaré - AN 27 (2010) 793-807.

C5 *The sphere and the cut locus at a tangency point in two-dimensional almost-Riemannian geometry*, B. Bonnard, G. Charlot, R. Ghezzi, G. Janin, Journal of Dynamical and Control Systems, 2011, Volume 17, Number 1, Pages 141-161.

C6 *Existence of planar curves minimizing length and curvature*, U. Boscain, G. Charlot, F. Rossi, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 270 (2010), n. 1, 43-56.

C7 *Stability of Planar Nonlinear Switched Systems*, U. Boscain, G. Charlot, M. Sigalotti, DCDS Ser. A 15 (2006), no. 2, 415–432.

C8 *Nonisotropic 3-level Quantum Systems : Complete Solutions for Minimum Time and Minimum Energy*, U. Boscain, T. Chambrion, G. Charlot, DCDS Ser. B 5 (2005), no. 4, 957–990.

C9 *Resonance of Minimizers for n-level Quantum Systems with Arbitrary Costs*, U. Boscain, G. Charlot, COCV, Vol. 10, No. 4, pp 593-614, 2004.

C10 *Optimal Control in laser-induced population transfer for two- or three-level quantum systems*, U. Boscain, G. Charlot, J-P Gauthier, S. Guérin & H-R Jauslin, Journal of Mathematical Physics, May 2002, vol 43, Issue 5, pp 2107-2132.

C11 *Optimal control of the Schrödinger equation with two or three levels*, U. Boscain, G. Charlot, J-P Gauthier, Nonlinear and adaptive control (Sheffield, 2001), 33-43, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 281, Springer, Berlin, 2003.

C12 *Quasi-contact S-R metrics : normal form in* $\mathbf{R}^{2n}$*, wave front and caustic in* $\mathbf{R}^4$, G. Charlot, Acta Applicandae Mathematicae, vol 74, No 3, Dec 2002, pp 217-263.

C13 *On subriemannian caustics and wave fronts, for contact distributions in the three-space*, A. A. Agrachev, G. Charlot, J.-P.A. Gauthier & V. M. Zakalyukin, Journal of Dynamical and Control Systems, 6 (2000), no. 3, 365-395.

2 Géométrie sous-riemannienne : une courte introduction

2.1 Le point de vue du géomètre

Classiquement, une structure sous-riemannienne est définie par la donnée d'un triplet $(M, \mathcal{D}, g)$ où M est une variété, $\mathcal{D}$ est un sous-fibré du fibré tangent de rang k (aussi appelé distribution) et g est une métrique sur $\mathcal{D}$. On demande en général que $\mathcal{D}$ satisfasse la condition de Hörmander, c'est-à-dire que la suite définie par récurrence par $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{n+1} = [\mathcal{D}, \mathcal{D}^n]$ soit telle qu'en tout point q de M il existe un entier n pour lequel $\mathcal{D}^n_q = T_qM$. La condition de Hörmander implique trivialement le caractère complètement non intégrable du sous fibré $\mathcal{D}$.

On définit la norme d'un vecteur v de $\mathcal{D}_q$ par $|v|_g = \sqrt{g(v,v)}$, la longueur des courbes $\gamma : [0,t] \to M$ absolument continues dont la dérivée est presque partout dans $\mathcal{D}$ par

$$\ell(\gamma) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)|_g \, ds$$

et la distance entre deux points de M par

$$d(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \dot{\gamma}(s) \in \mathcal{D}(\gamma(s)),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(t) = y\}.$$

On définit aussi l'énergie d'une courbe par

$$energie(\gamma) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)|_g^2 \, ds.$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz permet de remplacer le problème de minimiser la longueur par celui de minimiser l'énergie en temps fixé. En effet elle implique d'une part que, à support et temps fixés, les trajectoires minimisant l'énergie sont paramétrées à vitesse $|\dot{\gamma}(.)|$ constante. Elle assure d'autre part que quand une trajectoire est paramétrée à vitesse constante alors $\ell(\gamma)^2 = t \times energie(\gamma)$. Ainsi, si on trouve les trajectoires qui minimisent l'énergie entre deux points en temps fixé, on obtient celles qui réalisent la distance entre ces deux points modulo reparamétrage.

Le théorème de Chow-Rashevsky ([31, 53]) assure que si M est connexe alors le caractère complêtement non intégrable de la distribution $\mathcal{D}$ implique l'existence de courbes reliant x et y pour tout les couples de points (x,y). La distance est alors bien définie sur tout M et définit la même topologie que celle de la variété M. Si la variété est complête et si les trajectoires admissibles de longueur finie n'atteignent pas le bord, alors le théorème de Filippov assure l'existence de courbes minimisantes reliant x à y.

Les trajectoires localement minimisantes sont appelées les géodésiques. Le principe du maximum de Pontryagin ([52]) fournit des conditions nécéssaires pour qu'une courbe soit une géodésique. Il met en évidence deux catégories de courbes candidates. D'une part les courbes extrémales dites normales qui sont les projections sur M des extrémales normales, trajectoires symplectiques du hamiltonien défini sur T^*M par

$$H(q,\lambda) = \frac{1}{2}\max\{\langle\lambda, v\rangle^2 \mid v \in \mathcal{D}_q, |v|_g = 1\}.$$

Elles sont des géodésiques. D'autre part les courbes extrémales dites anormales qui peuvent être C^1-isolées parmi les trajectoires admissibles reliant x à y et qui sont donc beaucoup plus dures à étudier. Dans les articles que nous présentons, nous considérons toujours des problèmes métriques sans anormales. Les géodésiques sont donc toujours des courbes extrémales normales, projetées de trajectoires hamiltoniennes de H. D'autre part, si une courbe extrémale minimise la longueur entre deux sous-variétés N_0 et N_t alors l'extrémale associée vérifie la condition de transversalité $\lambda(0).T_{q(0)}N_0 = \lambda(t).T_{q(t)}N_t = 0$.

La métrique de Heisenberg. L'exemple canonique de structure sous-riemannienne telle que définie ici est la métrique de Heisenberg sur $\mathbf{R}^3$. Elle est définie par exemple par

$$\mathcal{D} = \ker(dz - \frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy) \qquad g((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Il est maintenant classique que la construction des géodésiques de cette métrique est étroitement liée au problème de Didon. En effet si pour une trajectoire γ on appelle $\overline{\gamma}$ sa projection sur $\mathbf{R}^2$ par $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, alors la longueur de γ est la longueur pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^2$ de $\overline{\gamma}$ et la variation de coordonnée z le long de γ est $\int_{\overline{\gamma}} \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy$ qui n'est autre, au signe prêt, que l'aire entourée par $\overline{\gamma}$ et les segments reliant ses deux points extremaux à 0. Pour relier de façon optimale les deux points extrémaux il faut donc qu'à aire entourée fixée, $\overline{\gamma}$ soit de longueur minimale. La courbe $\overline{\gamma}$ est donc un arc de cercle et γ un de ses relevés dans $\mathbf{R}^3$, tangent à la distribution.

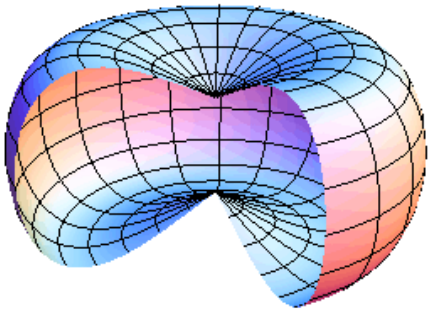

FIGURE 1 – Métrique de Heisenberg : image de la sphère ouverte sur un quart

Les métriques de contact et de quasi-contact. Plus généralement, sur une variété de dimension $2m + 1$ (resp. $2m + 2$), on peut définir une structure de contact (resp. quasi-contact) par la donnée d'une distribution $\mathcal{D}$ qui vérifie que si elle est le noyau d'une 1-forme ω alors $\omega \wedge (d\omega)^m \neq 0$ en tout point. La différence fondamentale entre contact et quasi-contact est que $d\omega_{|\mathcal{D}}$ a un noyau de dimension 1 dans le cas de quasi-contact. Voir [C12] pour plus de détails.

En dimension 3, pour une métrique sous-riemannienne générique, la métrique est de contact en dehors d'une sous-variété plongée sur laquelle $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}$. Sur cette sous-variété, les points q qui vérifient $\mathcal{D}^3(q) = T_qM$ sont dits points de Martinet.

2.2 Le point de vue du contrôleur

Du point de vue du contrôle, on définit *localement* une structure sous-riemannienne, en considérant le système contrôlé :

$$\dot{q}(s) = \sum_{i=1}^{k} u_i(s) X_i(q(s))$$

où on demande à q d'être une courbe absolument continue, à $(u_1, \ldots, u_k)$ d'être une famille de fonctions L^1 et où $(X_1, \ldots, X_k)$ est une famille de champs de vecteurs lisses. On cherche les courbes admissibles paramétrées sur $[0, t]$ de cette dynamique qui minimisent le coût (la longueur)

$$\int_0^t \sqrt{\sum_i u_i^2(s)}\, ds.$$

Les champs de vecteurs X_i forment moralement une base orthonormée de $\mathcal{D}$ tel que défini plus haut. La distribution $\mathcal{D}$ ainsi définie est complètement non intégrable (i.e. vérifie la condition de Hörmander) si en chaque point x il existe m tel que l'ensemble des champs de vecteurs définis par tous les crochets de Lie d'ordre inférieur ou égal à m construits à partir des X_i engendre une famille génératrice de T_qM.

Une petite subtilité se glisse ici : rien n'interdit à ce que les X_i forment en certains points une famille liée. Dans ce cas $\mathcal{D}$ n'est plus un sous-fibré (sa fibre n'est pas de dimension constante). Mais, avec ce point de vue, on peut considérer une classe plus grande de structures sous-riemanniennes.

La métrique de Grushin. L'exemple canonique de structure sous-riemannienne de rang non constant est la métrique de Grushin sur $\mathbf{R}^2$ que l'on peut définir par la donnée d'une base orthonormée :

$$\left(X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En dehors de l'axe $\{x = 0\}$ la métrique est localement riemannienne, mais elle est singulière le long de l'axe.

Le principe du maximum de Pontryagin, appliqué à la minimisation de l'énergie en temps fixé

$$\int_0^t \sum_i u_i^2(s)\, ds,$$

s'énonce comme précédemment avec la précision que le Hamiltonien prend maintenant la forme

$$H(q, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_i \langle \lambda, X_i(q) \rangle^2.$$

2.3 Un point de vue unifié

Une façon d'unifier les deux points de vue et de garder l'avantage de chacun (à savoir le caractère intrinsèque du point de vue géométrique et la possibilité de considérer des structures de rang non constant du point de vue contrôle) est de définir la distribution de la façon suivante (voir aussi [C4] et [7]).

On appelle une (m,k)-distribution la donnée d'une triplet $(M,E,\mathfrak{f})$ tel que M est une variété de dimension m, E est un fibré vectoriel de rang k sur M et $\mathfrak{f} : E \to TM$ est un morphisme de fibré vectoriel qui préserve la base, tel que l'application $\mathfrak{f}_* : \Gamma(E) \to \mathrm{Vec}(M)$ définie par $\mathfrak{f}_*(\sigma) = \mathfrak{f} \circ \sigma$ est injective de l'ensemble des sections de E dans l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

On note $\mathcal{D} = \mathfrak{f}(\Gamma(E))$ le sous-module de $\mathrm{Vec}(M)$ associé à $(M,E,\mathfrak{f})$, $\mathrm{Lie}(\mathcal{D})$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{D}$ dans $\mathrm{Vec}(M)$ et par $\mathcal{D}_q$ et $\mathrm{Lie}_q(\mathcal{D})$ les ensembles des valeurs prises par les éléments de $\mathcal{D}$ et $\mathrm{Lie}(\mathcal{D})$ au point q. On dit que $(M,E,\mathfrak{f})$ satisfait la condition de Hörmander si $\mathrm{Lie}_q(\mathcal{D}) = T_qM$ en tout point q de M.

On appelle (m,k)-structure sous-riemannienne la donnée d'une (m,k)-distribution accompagnée d'une métrique lisse $\langle .,. \rangle$ sur E, c'est à dire d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_q$ sur les fibres E_q de E, dépendant de façon lisse de q. On peut alors définir naturellement plusieurs objets vu précédemment.

On appelle champ de bases orthonormées sur un ouvert Ω de M, pour la structure sous-riemannienne, une famille $(X_1,\dots,X_k)$ de champs de vecteurs définis sur Ω qui vérifient $X_i = \mathfrak{f} \circ \sigma_i$ où $(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$ est un champ de bases othonormées de E sur Ω. Il est à noter que $(X_1(q),\dots,X_k(q))$ ne forme pas une famille libre en chaque point q où $\mathfrak{f}$ n'est pas un isomorphisme de E_q dans $\mathcal{D}_q$.

On définit aussi la norme d'un vecteur v de $\mathcal{D}_q$ par

$$\| v \|_q = \min\{\sqrt{\langle u,u \rangle_q} \mid u \in E_q,\ \mathfrak{f}(u) = v\}.$$

Les courbes admissibles sont les courbes $\gamma : [0,T] \to M$ absolument continues telles qu'il existe $u : [0,T] \to E$ avec $u(t) \in E_{\gamma(t)}$, $\dot{\gamma}(t) = \mathfrak{f}(u(t))$ pour presque tout t, et la fonction $t \mapsto \| \mathfrak{f}(u(t)) \|_{\gamma(t)}$ est intégrable.

La longueur et l'énergie d'une courbe admissible γ, ainsi que la distance entre deux points, sont définie comme précédemment. La connexité de M et la condition de Hörmander assurent la finitude et la continuité de la fonction distance par rapport à la topologie de la variété.

Dans ce contexte, on retrouve la définition géométrique classique de structure sous-riemannienne (de rang constant) quand $\mathfrak{f}$ est injective fibre par fibre. On retrouve le point de vue contrôle local en prenant localement un fibré vectoriel trivial au dessus de M dont les fibres sont $\mathbf{R}^k$ où k est le cardinal de la famille des X_i et où $\mathfrak{f}$ envoie le champ de bases orthonormées canonique de ce fibré sur les X_i.

Généricité : dans la suite on se placera souvent sous des hypothèses "génériques". On entend par là des propriétés qui, à M et E fixés, sont vraies sur un ensemble résiduel (intersection dénombrable d'ouverts denses) de l'ensemble des structures sous-riemanniennes pour la topologie Whitney C^∞. Par exemple, génériquement, une structure sous-riemannienne, dont la distribution est de dimension supérieure ou égale à 2, vérifie la condition de Hörmander.

2.4 Lieu de coupure, lieu conjugué

Dans la suite de ce mémoire on va souvent s'intéresser à deux lieux géométriques : le lieu de coupure et le lieu conjugué associés à un point x.

Le lieu de coupure associé à un point x est l'ensemble des points de M où une extrémale pour le problème de minimiser l'énergie en temps fixé depuis x perd son optimalité

globale. Le temps de coupure correspondant à cette extrémale est la longueur de celle-ci au moment où elle atteint le lieu de coupure. Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de trajectoire anormale, le lieu de coupure contient l'ensemble de Maxwell des points où deux géodésiques optimales s'intersectent avec la même longueur (et ici perdent leur optimalité).

Si l'on considère les géodésiques pour le problème de minimiser l'énergie depuis x en temps fixé 1, comme elles sont projections des solutions de l'équation hamiltonienne associée à H, on peut définir une application exponentielle, $\exp_x$, qui à une condition initiale dans T_x^*M associe le point final de la géodésique correspondante. Les géodésiques s'écrivent alors $\gamma(t) = \exp(t\lambda)$. L'application exp est bien définie au moins au voisinage de $0 \in T_x^*M$, et sur tout T_x^*M si la structure sous-riemannienne est complête c'est-à-dire si aucune courbe de longueur finie n'atteint le bord de la variété. C'est en particulier le cas sur les variétés sous-riemanniennes compactes. Le lieu conjugué à x est le lieu singulier de l'application $\exp_x$. Le premier lieu conjugué est l'ensemble des points où l'application exponentielle est singulière pour la première fois le long d'une géodésique : si λ est la condition initiale, $\exp_x(t\lambda)$ (avec $t > 0$) est un premier point conjugué si le jacobien de l'exponentielle est nul en $t\lambda$ et non nul en $s\lambda$ pour $0 < s < t$.

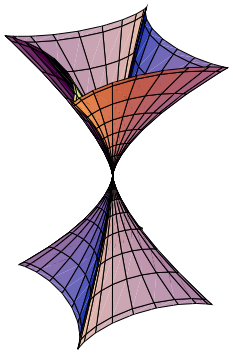

FIGURE 2 – Métrique de contact : image du premier lieu conjugué générique

Dans le cas riemannien, le cas le plus classique où l'on connait le lieu de coupure et le lieu conjugué est la sphère euclidienne. Le lieu de coupure et le premier lieu conjugué d'un point sont confondus et constitués du point symétriquement opposé.

2.5 Approximation nilpotente

On présente ici succintement la notion d'approximation nilpotente, en laissant de côté les propriétés algébriques qui y sont liées et en se concentrant uniquement sur le fait qu'elle permet d'approcher la distance et les longueurs de façon parfois suffisante pour obtenir des informations fortes sur les objets géométriques tels que le lieu de coupure et le premier lieu conjugué. Pour plus de détails voir [16, 41].

En un point q d'une structure sous-riemannienne sur une variété M de dimension m, si la condition de Hörmander est vérifiée, on peut considérer le drapeau

$$\mathcal{D}_q = \mathcal{D}_q^1 \subset \cdots \subset \mathcal{D}_q^r = T_qM$$

où r est le plus petit entier tel que $\mathcal{D}^r = T_qM$. On définit alors la suite croissante

$$w_1 \leq \cdots \leq w_m$$

où $w_i = s$ si $\dim(\mathcal{D}^{s-1}(q)) < i \leq \dim(\mathcal{D}^s(q))$.

Un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_m)$ centré en q est dit adapté si $\frac{\partial}{\partial y_j}$ est dans $\mathcal{D}^{w_j}(q) \setminus \mathcal{D}^{w_{j-1}}(q)$. Il est aisé de voir qu'un tel système existe toujours. w_j est appelé poids de la coordonnée y_j.

Une fonction f est dite d'ordre s respectivement à la distribution $\mathcal{D}$ en q si toutes ses dérivées non holonomes $\mathcal{L}_{X_1} \ldots \mathcal{L}_{X_k} f$ d'ordre k inférieur ou égal à $s-1$ sont nulles en q (où les X_i sont des champs de vecteurs de $\mathcal{D}$) et si au moins une telle dérivée d'ordre s est non nulle. Par exemple, si on regarde la métrique de Heisenberg comme présentée plus haut, elle a pour champ de bases $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z})$ et il est facile de voir que la fonction $(x, y, z) \mapsto x$ est d'ordre 1 en 0 alors que la fonction $(x, y, z) \mapsto z$ est d'ordre 2 en 0.

Un opérateur différentiel P est d'ordre σ si pour toute fonction f d'ordre s, Pf est d'ordre supérieur ou égal à $s + \sigma$ et s'il existe une fonction f d'ordre s telle que Pf soit d'ordre $s + \sigma$. Par exemple, pour la métrique de Heisenberg, $\frac{\partial}{\partial x}$ est d'ordre -1 en 0 et $\frac{\partial}{\partial z}$ est d'ordre -2 en 0.

Un système de coordonnées adaptées est dit privilégié si chaque coordonnée y_j est d'ordre w_j. Un tel système de coordonnées existe toujours (voir [16]) et pour un tel système de coordonnées centré sur q, et sur un voisinage de q suffisamment petit, il existe C et C' strictement positives telles que

$$C \leq \frac{d(0, (y_1, \ldots, y_m))}{|y_1|^{\frac{1}{w_1}} + \cdots + |y_m|^{\frac{1}{w_m}}} \leq C'.$$

Une fois fixé un tel système de coordonnées privilégié centré en q, on dira qu'une fonction lisse f est homogène de degré s en q si c'est un polynôme homogène de degré s en les variables y_j munis des poids w_j. Un champ de vecteurs s'écrivant $X = \sum_{j=1}^m \xi_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ est dit homogène de degré s en q si chaque fonction ξ_j est homogène de degré $s + w_j$ en q. Par exemple, pour la métrique de Heisenberg, le champs de vecteur $z\frac{\partial}{\partial y}$ est homogène de degré 1 et $x\frac{\partial}{\partial z}$ est homogène de degré -1.

Tous les champs de vecteurs de $\mathcal{D}$ sont d'ordre -1, sans être forcément homogènes. Une fois fixé un système de coordonnées privilégié, si on se donne un champ de bases orthonormées $(X_1, \ldots, X_n)$ au voisinage de q, on appelle approximation nilpotente de $(X_1, \ldots, X_n)$ en q la partie homogène de degré -1 de cette famille.

Trois exemples intéressants pour la suite. On va s'intéresser au cas des métriques définies localement sur $\mathbf{R}^2$ par la donnée d'un champ de bases orthonormées de la forme

$$X(x, y) = (1, 0), \quad Y(x, y) = (0, f(x, y)).$$

Si $f(0, 0) \neq 0$ alors $\mathcal{D}_q = T_qM$. Les deux variables sont de poids 1 en 0 et ainsi $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont d'ordre -1 ce qui implique que l'approximation nilpotente en 0 est la métrique euclidienne définie par

$$X(x, y) = (1, 0), \quad Y(x, y) = (0, f(0, 0)).$$

Si $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ alors $\dim(\mathcal{D}_q) = 1$ et $\mathcal{D}_q^2 = T_qM$. La variable x est de poids 1 et la variable y de poids 2 en 0 et ainsi $\frac{\partial}{\partial x}$ est d'ordre -1 et $\frac{\partial}{\partial y}$ est d'ordre -2. Le développement à l'ordre 1 de f en 0 donne donc $f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + o_1(x,y)$ et l'approximation nilpotente est la métrique de Grushin définie par

$$X(x,y) = (1,0), \quad Y(x,y) = \left(0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x\right).$$

Si $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ alors $\dim(\mathcal{D}_q) = \dim(\mathcal{D}_q^2) = 1$ et $\mathcal{D}_q^3 = T_qM$. La variable x est de poids 1 et la variable y de poids 3 en 0 et ainsi $\frac{\partial}{\partial x}$ est d'ordre -1 et $\frac{\partial}{\partial y}$ est d'ordre -3. Le développement à l'ordre 2 de f donne donc $f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + o_2(x,y)$ et l'approximation nilpotente en 0 est la métrique définie par

$$X(x,y) = (1,0), \quad Y(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2\right).$$

En dimension 3, dans le cas de contact l'approximation nilpotente peut prendre la forme

$$X(x,y,z) = (1,0,0), \quad Y(x,y,z) = (0,1,x),$$

et en un point de Martinet l'approximation nilpotente peut prendre la forme

$$X(x,y,z) = (1,0,0), \quad Y(x,y,z) = \left(0, 1, \frac{x^2}{2}\right).$$

2.6 Développement limité d'un front d'onde

Pour étudier localement un front d'onde, on a souvent besoin de faire des développements par rapport à un petit paramètre lié aux conditions initiales. Par exemple, dans le cas de contact, si on fixe la distribution comme étant $\mathcal{D} = \ker(dz - \frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy)$, si l'on veut considérer les géodésiques qui créent du lieu de coupure et du lieu conjugué local, on va regarder celles avec un covecteur initial qui vérifie p_z grand, c'est-à-dire $\frac{1}{p_z}$ petit. Agrachev, Gauthier et al (voir [8, 32, 9]) ont donc fait des développements de l'application exponentielle par rapport à la condition initiale $\rho = \frac{1}{p_z(0)}$ pour étudier la synthèse locale, le lieu de coupure et le lieu conjugué. De même dans les cas de Martinet et de quasi-contact (voir [1, 24, 21, 20, 23] et [C2]).

De façon plus général, on a le lemme suivant issue de la théorie classique des équations différentielles ordinaires

Lemme 1. *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction lisse et l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. On associe à chaque coordonnée x_i un poids m_i. On suppose alors que f_i est d'ordre supérieur ou égal à m_i en 0, et que les conditions initiales sont paramétrées de la façon suivante*

$$x_i(0) = a^{m_i}\bar{x}_i(a)$$

où $a \in \mathbf{R}$ et pour tout i la fonction $\bar{x}_i$ est lisse. Alors, pour $k \in \mathbf{N}$ donné, on peut écrire pour tout $i \leq n$

$$x_i(t) = a^{m_i}x_i^0(t) + \cdots + a^{m_i+k}x_i^k(t) + a^{m_i+k+1}\hat{x}_i^{k+1}(a,t),$$

où les fonctions $\hat{x}_i^{k+1}$ sont lisses et les fonction x_i^ℓ ($\ell \leq k$) vérifient les équations différentielles ne dépendant pas de a

$$\dot{x}_i^\ell = \frac{1}{a^{m_i+\ell}} \mathrm{Hom}_{m_i+\ell}(f_i((a^{m_1}x_1^0 + \cdots + a^{m_1+k}x_1^\ell, \ldots, a^{m_n}x_n^0 + \cdots + a^{m_n+k}x_n^\ell)))$$

où $\mathrm{Hom}_{m_i+\ell}(g(a))$ *est la partie homogène de degré $m_i + \ell$ en la variable a de la fonction g.*

Si dans le lemme 1 on suppose que l'équation différentielle est la dynamique hamiltonienne issue d'un problème sous-riemannien et si les poids des variables sont ceux intervenant dans la construction de l'approximation nilpotente alors la dynamique donnée par les termes de plus bas degré d'homogénéité

$$\dot{x}_i = \frac{1}{a^{m_i}} \mathrm{Hom}_{m_i}(f_i((a^{m_1}x_1^0, \ldots, a^{m_n}x_n^0)))$$

est celle de l'approximation nilpotente. Le premier terme qui apparaît dans les développements limités des coordonnées est donc celui des trajectoires de l'approximation nilpotente.

On verra par la suite que ceci ne s'applique pas uniquement au calcul des jets des géodésiques issues du point où l'on fait le développement de la dynamique. En effet le paramètre a peut intervenir dans les coordonnées "verticales" mais aussi dans les coordonnées "horizontales" : si (x, λ) est un système de coordonnées locales alors la condition initiale paramétrée peut être $(\hat{x}(a), \hat{\lambda}(a))$ avec $\hat{x}$ et $\hat{\lambda}$ lisses et $\hat{x}(0) = 0$. On peut donc au moyen du Lemme 1 étudier les développements limités de fronts issus transversalement de courbes lisses paramétrées par le petit paramètre a, ce qui sera le cas un peu plus loin quand on étudiera le front depuis un lieu singulier (Partie 3.4).

3 Structures presque-riemanniennes 2D : géométrie locale

Dans les parties 3 et 4, on va s'intéresser aux structures presque-riemanniennes qui sont les (m, m)-structures sous-riemanniennes $S = (E, \mathfrak{f}, \langle , \rangle)$ sur M, c'est-à-dire où E et M sont de dimension m, satisfaisant la condition de Hörmander. Pour une telle structure, on note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des points $x \in M$ où $\mathfrak{f}$ n'est pas injective de E_x dans T_xM.

Les structures presque-riemanniennes sont apparues pour la première fois dans le contexte des opérateurs hypoelliptiques [12, 34, 38]. Elles interviennent dans certains problèmes de contrôle quantique [C8,C9,C10,C11] et trouvent des applications au transfert orbital en mécanique spatiale [19]. Elles apparaissent naturellement dans les problèmes modélisés via une métrique riemannienne quand celle-ci a des singularités. Comme nous l'avons vu précedemment, l'exemple typique de telles structures est la métrique de Grushin.

L'étude locale de ces structures est intéressante à plusieurs titres. Elle est bien sûr intéressante en elle-même puisque, comme toute structure sous-riemannienne, l'application exponentielle en un point q de $\mathcal{Z}$ est singulière en 0, ce qui se traduit par l'accumulation en q du lieu de coupure et du lieu conjugué à q. Mais elle est aussi intéressante parce qu'elle permet d'obtenir des résultats globaux que nous présenterons dans les parties 4 et 5.

3.1 Structures presque-riemanniennes. Définitions et premières propriétés

On dit que la structure S est orientable si E est orientable, c'est-à-dire s'il existe une n-forme volume qui ne s'annule pas. Si E et M sont orientés alors on peut définir M_+ et M_- comme la partition de $M \setminus \mathcal{Z}$ telle que les deux orientations coincident via $\mathfrak{f}$ sur M_+ et sont opposées sur M_-. L'orientabilité de M et de E ne sont pas directement liées. On dit que la structure S est trivialisable si le fibré E est trivialisable.

Dans la suite, sauf mention contraire, on va s'intéresser au cas des structures presque-riemanniennes de dimension 2.

Exemples. A nouveau l'exemple canonique de structure presque-riemannienne est la métrique de Grushin. Elle joue un rôle particulier pour les structure presque-riemannienne de dimension 2 : celui d'approximation nilpotente aux points où la dimension de $\mathcal{D}$ est 1 et celle de $\mathcal{D}^2$ est 2.

Un autre exemple de métrique presque-riemannienne apparaît dans des problèmes de contrôle optimal en mécanique quantique (voir [25] et [C8,C9,C10,C11]). Géométriquement, la dynamique est donnée sur la sphère $\mathbf{S}^2$ par deux rotations infinitésimales d'axes orthogonaux, la métrique rendant ces deux rotations infinitésimales orthogonales. Le long du grand cercle passant par les deux axes, ces deux rotations agissent parallèlement, la métrique est donc singulière. Quand les deux rotations sont orthonormées alors, en coordonnées sphériques, un champ de bases orthonormées est $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \tan(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi})$.

Dans [4], les auteurs montrent

Proposition 1. *Soit M une variété lisse de dimension 2. Alors génériquement une structure presque-riemannienne sur M vérifie :*

- *$\mathcal{Z}$ est une sous-variété plongée de dimension 1,*
- *Les points q de $\mathcal{Z}$ où $\mathcal{D}^2(q)$ est de dimension 1 forment un ensemble discret.*
- *En tout point q de M, $\mathcal{D}^3(q) = T_qM$.*

On appelle H_0 l'ensemble de ces propriétés génériques. Sous les hypothèses H_0, on appelle les points de $M \setminus \mathcal{Z}$ les points ordinaires (ou riemanniens), les points q de $\mathcal{Z}$ où $dim(\mathcal{D}^2(q)) = 2$ les points de type Grushin et ceux où $\mathcal{D}^2(q)$ est de dimension 1 les points de tangence. On peut en effet montrer que, sous ces hypothèses, si $\mathcal{D}^2(q)$ est de dimension 1 alors $\mathcal{D}(q)$ est tangente à $\mathcal{Z}$ en q. Sous les hypothèses H_0 il n'y a pas d'extremale anormale minimisante.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des points de tangence.

Ils montrent ensuite

Théorème 1. *Sous les hypothèses H_0, pour tout point q de M il existe un système de coordonnées locales tel que $q = (0, 0)$ et tel qu'un champ de bases orthonormées est donné par*

$$\begin{array}{llll}
(F1) & X(x,y) = (1,0), & Y(x,y) = (0, \mathrm{e}^{\varphi(x,y)}), & \textit{si } q \notin \mathcal{Z} \textit{ (riemannien)}, \\
(F2) & X(x,y) = (1,0), & Y(x,y) = (0, x\mathrm{e}^{\varphi(x,y)}), & \textit{si } q \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{T} \textit{ (Grushin)}, \\
(F3) & X(x,y) = (1,0), & Y(x,y) = (0, (y - x^2\psi(x))\mathrm{e}^{\xi(x,y)}), & \textit{si } q \in \mathcal{T} \textit{ (tangence)},
\end{array}$$

où φ, ψ et ξ sont des fonctions lisses telles que $\varphi(0, y) = 0$ et $\psi(0) = 1$.

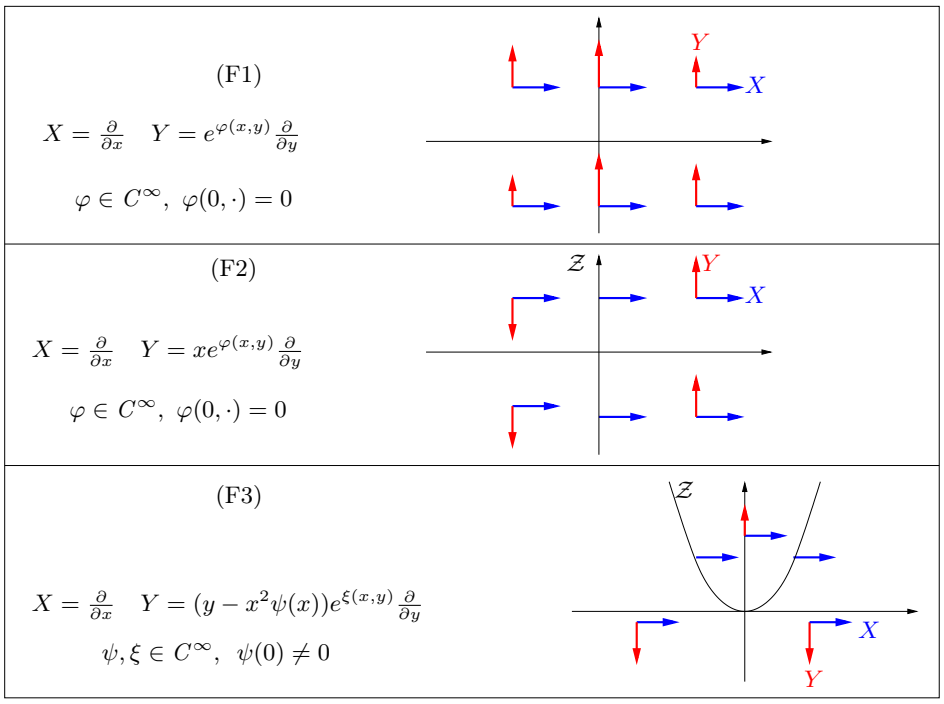

FIGURE 3 – Image de la forme normale établie dans [4]

Idée de la preuve. Nous donnons ici une idée de la preuve car celle-ci est utile pour la compréhension de la suite. La preuve de ce théorème est constructive : fixons γ une courbe transverse à la distribution en q telle que $\gamma(0) = q$, une orientation transverse le long de γ et notons φ_H le flot du hamiltonien H au temps 1. En $\gamma(t)$ on note λ_t l'élément de $T^*_{\gamma(t)}M$ qui annule $\dot{\gamma}(t)$, qui est orienté transversalement positivement, et tel que $H(\gamma(t), \lambda_t) = \frac{1}{2}$. C'est le covecteur initial de la géodésique issue de $\gamma(t)$, paramétrée à vitesse 1, qui réalise la distance au support de γ. On peut maintenant définir l'application

$$\Psi : (s,t) \mapsto \pi(\varphi_H(\gamma(t), s\lambda_t))$$

où π est la fibration cotangente. Cette application est un difféomorphisme local en 0 car $\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t}|_{(0,0)} = \dot{\gamma}(0)$ et $\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial s}|_{(0,0)}$ est la vitesse initiale de la géodésique transverse au support de γ en $q = \Psi(0,0)$. Donc Ψ définit un système de coordonnées locales au voisinage de q.

Il est clair que dans ce système de coordonnées $\frac{\partial}{\partial s}$ est un vecteur de la distribution de norme 1. D'autre part, comme pour tout t il est vrai que $s \mapsto \Psi(s,t)$ est une géodésique paramétrée à vitesse 1 qui réalise la distance au support de γ alors $\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial t}$ est orthogonal à $\frac{\partial \Psi(s,t)}{\partial s}$ ce qui signifie que dans le système de coordonnées $\frac{\partial}{\partial t}$ est orthogonal à $\frac{\partial}{\partial s}$. Ainsi on a construit un système de coordonnées tel qu'un champ de bases orthonormées s'écrit localement $((1,0),(0,f(s,t))$.

Dans le cas où q est un point riemannien il est clair qu'on peut supposer que f est positive au voisinage de q et on obtient donc (F1), modulo reparamétrage de γ.

Dans le cas d'un point de type Grushin, on peut fixer un peu plus les choses en choisissant pour support de γ l'ensemble $\mathcal{Z}$. Alors le long de $\mathcal{Z} = (0,t)$ on doit avoir que $f(0,t) = 0$, car la distribution est de rang 1, et $\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) \neq 0$ car $\mathcal{D}^2_{(0,t)} = T_{(0,t)}M$ pour t assez petit. Ceci implique qu'on peut écrire $f(s,t) = sg(s,t)$ avec $g(0,0) \neq 0$ et on obtient (F2), modulo reparamétrage de $\mathcal{Z}$.

Dans le cas des points de tangence, $\mathcal{Z}$ est tangent à la distribution on ne peut donc pas le prendre comme support pour γ. Fixons une courbe γ transverse à la distribution et appliquons le procédé au dessus. Dans les coordonnées (s,t), $\mathcal{Z}$ étant horizontal en q il s'écrit $t = s^2\psi(s)$ et donc $f(s,t)$ s'écrit $g(t - s^2\psi(s))h(s,t)$ où $h(0,0) \neq 0$ et $g(0) = 0$. Le fait que $\mathcal{D}^2_q = \mathcal{D}_q$ et $\mathcal{D}^3_q = T_qM$ implique $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0,t) \neq 0$ ce qui implique que $g'(0) \neq 0$ et ainsi on peut écrire $f(s,t) = (t - s^2\psi(s))\bar{h}(s,t)$ où $\psi(0) \neq 0$ et $\bar{h}(0,0) \neq 0$. Ce qui termine la preuve, modulo reparamétrage de γ.

Remarque 1. *a) Ces formes normales ne sont pas uniquement déterminées. En effet, elles dépendent du choix fait pour la courbe transverse à la distribution qui sert d'axe vertical (paramétrage compris). Au chapitre 3.5 on s'intéressera à fixer de façon canonique cette courbe et donc à finaliser cette forme normale.*

b) Les trois premiers exemples d'approximations nilpotentes traités dans la partie 2.5 correspondent aux trois types de points génériques mis en évidence ici.

Désingularisation locale. Revenons un peu au cas où la dimension est $m \geq 2$. Supposons que $(F_1, \ldots, F_n)$ est un champ de bases orthonormées défini au voisinage d'un point q tel qu'en q il existe un entier d tel que la famille $(F_1(q), \ldots, F_d(q))$ est libre et $F_i(q) = 0$ pour $i > d$. Définissons alors sur $\bar{M} = M \times \mathbf{R}^{n-d}$ les projections canoniques

$\pi_1 : \bar{M} \to M$ et $\pi_2 : \bar{M} \to \mathbf{R}^{n-d}$ et au voisinage de $(q, 0)$ la métrique dont un champ de bases orthonormées est donné par $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n)$ tel que

$$\begin{cases} \pi_1(\bar{F}_i) = F_i & \forall i, \\ \pi_2(\bar{F}_i) = 0 & \text{if } i \leq d, \\ \pi_2(\bar{F}_i) = \partial/\partial y_{i-d} & \text{if } i > d. \end{cases}$$

La famille $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n)$ est libre, on a donc défini une structure sous-riemannienne au sens classique avec une distribution $\bar{\mathcal{D}}$ de rang constant. π_1 envoie courbes admissibles pour $\bar{D}$ sur courbes admissibles pour $\mathcal{D}$ et préserve les longueurs. Ceci implique que les courbes minimisant la distance entre q_0 et q_1 dans M sont les projections des courbes minimisant la distance entre $\{q_0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$ et $\{q_1\} \times \mathbf{R}^{n-d}$, dont les extremales correspondantes doivent donc vérifier la condition de transversalité à $\{q_0\} \times \mathbf{R}^{n-d}$ et $\{q_1\} \times \mathbf{R}^{n-d}$. Les boules de rayon r sur M sont les projetés des boules de rayon r sur $\bar{M}$.

Si l'on considère la métrique de Grushin, de champ de bases orthonormées $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, la métrique construite par désingularisation est celle de champ de bases orthonormées $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, x\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, qui n'est autre que la métrique de Heisenberg, sous une autre représentation que celle donnée précédemment. Si l'on considère la métrique sur $\mathbf{R}^2$ définie par le champ de bases orthonormées $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, x^2\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, qui est l'approximation nilpotente aux points de tangence, la métrique obtenue par désingularisation est celle de champ de bases orthonormées $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, x^2\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, qui n'est autre que la métrique de Martinet plate sur $\mathbf{R}^3$. Dans les deux cas, les extrémales se relèvent en des extrémales qui vérifient $\lambda_z \equiv 0$. En particulier, les géodésiques paramétrées par la longueur d'arc qui partent de 0 se relèvent en des géodésiques vérifiant $\dot{q}(0) = \pm\frac{\partial}{\partial x}$.

Il est à noter que, malgré cette relation forte, il n'y a pas de lien automatique entre le lieu conjugué (ou le lieu de coupure) de la métrique presque-riemannienne et celui de la métrique issue du procédé de désingularisation. Le cas de Grushin en est un bon exemple. Le temps de coupure d'une géodésique de la métrique de Grushin est la moitié de celui de la géodésique relevée dans la métrique d'Heisenberg. Le temps conjugué d'une géodésique de la métrique de Grushin est la moitié du deuxième temps conjugué de la géodésique relevée dans la métrique d'Heisenberg.

3.2 Lieu de coupure et lieu conjugué en un point de type Grushin

Cas de l'approximation nilpotente. L'approximation nilpotente en un point de type Grushin étant la métrique de Grushin, on commence par étudier cette dernière.

Les équations hamiltoniennes s'intègrent sans difficultés ce qui permet de donner l'expression des géodésiques. Considérons un point q de $\mathcal{Z} = \{x = 0\}$. On peut supposer sans perte de généralité que $q = (0, 0)$. La géodésique issue de $(0, 0)$ avec le covecteur initial $\lambda_x = \pm 1$, $\lambda_y = \alpha$ a pour expression

$$\begin{cases} x(t) = \pm t, & y(t) = 0, & \text{si } \alpha = 0, \\ x(t) = \pm\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}, & y(t) = \frac{2\alpha t - \sin(2\alpha t)}{4\alpha^2}, & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

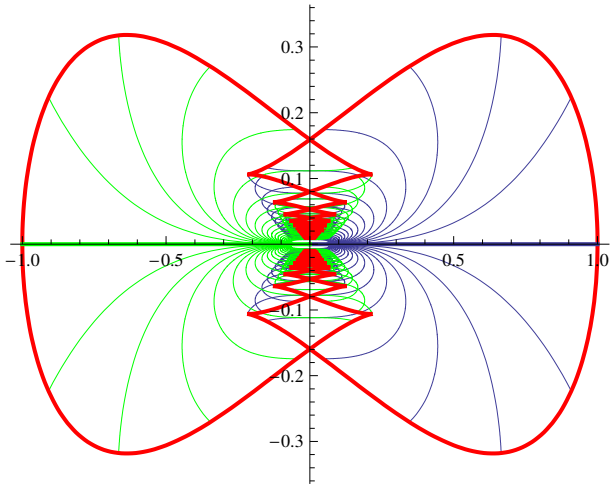

FIGURE 4 – Geodesiques et front d'onde partant d'un point de $\mathcal{Z}$ pour la métrique de Grushin. Figure de [26]

Du fait des symétries évidentes, il est assez aisé de montrer que le lieu de coupure du point $(0,0)$ est $\mathcal{Z} \setminus \{(0,0)\} = \{(0,y) | y \neq 0\}$. Le premier lieu conjugué à $(0,0)$ est l'ensemble

$$\{(r\sin(s), \pm\frac{r^2}{4}(2s - \sin(2s))) \,|\, r \in \mathbf{R}^*\}$$

où s est la plus petite solution strictement positive de l'équation $s\cos(s) - \sin(s) = 0$ et vaut approximativement 4,49340945790906. Le premier lieu conjugué est donc la réunion de deux paraboles tangentes à $\mathcal{D}$ en $(0,0)$, privée de $(0,0)$.

Cas des métriques génériques. Pour faire les calculs des développements limités de l'application exponentielle par rapport au paramètre $\frac{1}{p_y(0)}$, on utilise le lemme 1. Pour un point q de type Grushin d'une métrique vérifiant H_0, la forme normale (F2) donne

$$(F2) \quad X(x,y) = (1,0), \quad Y(x,y) = (0, x + ax^2 + O_3(x,y)),$$

où $O_3(x,y)$ est une fonction d'ordre au moins 3 en 0, pour x de degré 1 et y de degré 2. Les singularités au premier lieu conjugué de la métrique de Grushin sont stables : ce sont des plis. Comme elle est l'approximation nilpotente au point q de la métrique que l'on considère, on peut montrer que le premier lieu conjugué local (construit par les géodésiques courtes) est, comme pour la métrique de Grushin, la réunion de deux courbes lisses dont le support s'écrit dans les coordonnées de la forme normale (F2) :

$$\{(r\sin(s) + r^2 g_1(r,s), \pm\frac{r^2}{4}(2s - \sin(2s)) + r^3 g_2(r,s)) \,|\, r \in \mathbf{R}^*\}.$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions lisses.

Pour le point $(0,0)$ de la métrique de Grushin, le temps de coupure vaut $\frac{\pi}{p_y}$ où (p_x, p_y) est le covecteur initial associé à la géodésique. On montre sans difficulté que le temps de coupure pour la métrique $(F2)$ vaut $t_{cut} = \frac{\pi}{p_y} + O(\frac{1}{p_y^3})$, et le lieu de coupure est l'ensemble

$$\{(-\frac{4a}{p_y^2}, \frac{\pi}{2p_y^2}) + O(\frac{1}{p_y^3}) | p_y \in \mathbf{R}_+^*\} \cup \{(-\frac{4a}{p_y^2}, -\frac{\pi}{2p_y^2}) + O(\frac{1}{p_y^3}) | p_y \in \mathbf{R}_-^*\}.$$

Si $a \neq 0$, en rajoutant au lieu de coupure le point q, on trouve une ligne brisée : ce n'est donc pas le support d'une courbe C^1 dont la dérivée ne s'annule pas.

3.3 Lieu de coupure et lieu conjugué en un point de tangence [C5]

Sans abuser trop sur l'analogie, on peut dire que les points de tangence sont aux points de Grushin ce que les points de Martinet sont aux points de Contact dans le cas des structures sous-riemanniennes en dimension 3. L'application exponentielle a une expression plus compliquée et quand on cherche à en calculer un développement limité, les termes du premier ordre, donnés par l'approximation nilpotente, font apparaître des fonctions elliptiques. Il est quasiment sans espoir de chercher à calculer explicitement les termes du second ordre qui sont pourtant nécessaires pour obtenir une image stable du lieu de coupure. Il a donc fallu feinter quelque peu pour obtenir des informations en particulier sur le lieu de coupure générique.

En dehors de celles énoncées plus haut, une des motivations fortes de l'étude du lieu de coupure en un point de tangence q était, comme nous le verrons plus loin, l'identification d'un support canonique pour une courbe transverse à la distribution en q. En effet, à la différence du cas des points de type Grushin, $\mathcal{Z}$ n'est pas transverse à la distribution, et il n'y a pas de courbe canonique évidente transverse à la distribution. On démontre que le lieu de coupure n'est pas un bon candidat dans le cas générique, à la différence du cas de l'approximation nilpotente.

Cas de l'approximation nilpotente. Considérons le champ de bases orthonormé $(\frac{\partial}{\partial x}, ((y - x^2\psi(x))\mathrm{e}^{\xi(x,y)})\frac{\partial}{\partial y})$ en un point de tangence. Rappelons qu'en $(0,0)$ la coordonnée x est de poids 1 et la coordonnée y de poids 3. Ainsi l'approximation nilpotente est, au signe près,$(\frac{\partial}{\partial x}, -x^2\frac{\partial}{\partial y})$ ce qui modulo un changement de coordonnées affine donne

$$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}).$$

Il est intéressant de noter que le lieu singulier en un point de tangence a une tangente horizontal dans le système de coordonnées associé à la forme normal (F3) alors que pour l'approximation nilpotente le lieu singulier a une tangente verticale.

On pourrait directement intégrer les équations hamiltoniennes de l'approximation nilpotente mais il n'est pas sans intérêt de considérer le lien avec la métrique de Martinet plat dans $\mathbf{R}^3$. Comme on a vu plus haut, le processus de désingularisation relie la métrique nilpotente à celle de Martinet définie par

$$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y})$$

Si l'on remarque de plus qu'une trajectoire optimale pour la première se relève en une trajectoire qui minimise la distance entre deux droites verticales (parallèles à $\frac{\partial}{\partial z}$), il est alors clair que les trajectoires optimales pour l'approximation nilpotente qui nous intéresse sont les projetés des trajectoires dans $\mathbf{R}^3$ qui sont transverses aux droites verticales. Or ces dernières ont déjà été calculées dans [21]. Elles s'expriment en termes de fonctions elliptiques.

Pour la métrique définie par $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y})$, les géodésiques issues de $(0,0)$ paramétrées par la longueur d'arc ($p_x(0) = \pm 1$) sont

- $t \mapsto (\pm t, 0)$ pour les géodésiques transverses au lieu singulier $\{x = 0\}$, dont le covecteur initial vérifie $p_y(0) = 0$.
- $t \mapsto (\eta\, p_x(0) X^0(t/\eta), \eta^3 \,\mathrm{signe}(p_y(0)) Y^0(t/\eta))$ pour les géodésiques avec $p_y(0) \neq 0$ où

$$X^0(s) = -\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(\mathrm{K}+\mathrm{s}), \tag{1}$$

$$Y^0(s) = \frac{1}{3}\left(s + 2\mathrm{sn}(\mathrm{K}+\mathrm{s})\mathrm{cn}(\mathrm{K}+\mathrm{s})\mathrm{dn}(\mathrm{K}+\mathrm{s})\right), \tag{2}$$

  $\eta = \frac{1}{\sqrt{|p_y(0)|}}$, K est l'intégrale elliptique de première espèce $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2(\varphi)}}$ et sn, cn et dn sont les fonctions elliptiques de Jacobi de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et sont de période $4K$ (sn et cn) et $2K$ (dn).

De plus, si $\lambda \neq 0$, le temps de coupure est $t = 2K\eta$ et il correspond au premier retour sur l'axe vertical où la géodésique de condition initiale (p_x, p_y) rencontre celle de condition initiale $(-p_x, p_y)$; le temps conjugué vaut alors approximativement $3K\eta$ où la singularité est un pli et il existe $\alpha > 0$ tel que le lieu conjugué à l'origine est égal à

$$\{(x,y) \,|\, y = \pm\alpha x^3\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Cas d'une métrique générique. On cherche ensuite, en utilisant le lemme 1, à pousser plus loin le développement limité de l'application exponentielle en le paramètre η, afin de faire apparaître des ordres stables pour le lieu de coupure.

Les expressions que l'on trouve pour le lieu conjugué de l'approximation nilpotente en fonction de η sont d'ordre 1 pour la coordonnées x et d'ordre 3 pour la coordonnées y. Il est donc clair que si l'on prend en compte les termes d'ordre 0 et plus du champs de bases orthonormées générique ils apporteront des termes en $O(\eta^2)$ pour x et des termes en $O(\eta^4)$ pour y. Or la singularité au lieu conjugué de l'approximation nilpotente est stable : il s'agit d'une singularité de type pli. Les $O(\eta^2)$ et $O(\eta^4)$ ne changent donc rien ni à la singularité observée ni à l'ordre des coordonnées des points du lieu conjugué. Et on peut donc en conclure que le lieu conjugué s'écrit

$$\{(x,y) \,|\, y = \pm\alpha x^3 + O(x^4)\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Pour le lieu de coupure les choses sont plus compliquées : en effet l'approximation nilpotente fait bien apparaître une intersection transverse au lieu de coupure, par contre si la coordonnée y est bien en η^3 le long du lieu de coupure (ce qui ne pourra pas être changé par les termes d'ordre 0 du champs de bases orthonormées générique) la coordonnée x est nulle alors que les termes d'ordre 0 pourrait faire apparaître des termes en η^2 (ce qui pourrait faire un lieu de coupure en cusp), des termes en η^3 (ce qui pourrait faire apparaître un angle), etc.

Nous devons donc étudier les développements poussés plus loin des extrémales issues de 0. On regarde donc les développements de l'application exponentielle de la métrique

définie par $(\frac{\partial}{\partial x}, (\frac{x^2}{2} + \epsilon y + \epsilon' x^3 + o_3(x,y))\frac{\partial}{\partial y})$ en écrivant

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta X^0(t/\eta) + \eta^2 X^1(t/\eta) + o(\eta^2), & (3)\\ y(t) &= \eta^3 Y^0(t/\eta) + \eta^4 Y^1(t/\eta) + o(\eta^4), & (4)\\ p_x(t) &= P_X^0(t/\eta) + \eta P_X^1(t/\eta) + o(\eta), & (5)\\ p_y(t) &= \eta^{-2} P_Y^0(t/\eta) + \eta^{-1} P_Y^1(t/\eta) + o(1), & (6) \end{aligned}$$

et on regarde les équations différentielles respectées par $X^0, \ldots, P_Y^0, X^1, \ldots, P_Y^1$. Il est quasiment sans espoir de résoudre celles concernant $X^1, \ldots, P_Y^1$, car elles font apparaître comme coefficients X^0, Y^0 et P_Y^0 qui sont, comme nous l'avons vu plus haut, des fonctions de Jacobi. Par contre il est assez claire que si $\epsilon' = 0$ alors la symétrie par rapport à l'axe vertical est conservée et donc le lieu de coupure est toujours l'axe vertical. Ceci nous a amené à chercher des propriétés des fonctions $X^1, \ldots, P_Y^1$ en les écrivant

$$\begin{aligned} X^1 &= X_\epsilon^1 + \epsilon' g_1, & (7)\\ Y^1 &= Y_\epsilon^1 + \epsilon' g_2, & (8)\\ P_X^1 &= {P_X}_\epsilon^1 + \epsilon' g_3, & (9)\\ P_Y^1 &= {P_Y}_\epsilon^1 + \epsilon' g_4, & (10) \end{aligned}$$

où $X_\epsilon^1, \ldots, {P_Y}_\epsilon^1$ sont les solutions quand $\epsilon' = 0$ et où les fonctions g_i ne dépendent ni de ϵ ni de ϵ'. On montre sans difficulté que les fonctions g_i vérifient $g_i(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= g_3, & (11)\\ \dot{g}_2 &= g_1 (X^0)^3 + (X^0)^5, & (12)\\ \dot{g}_3 &= -\frac{3}{2}(X^0)^2 g_1 - \frac{5}{2}(X^0)^4, & (13)\\ g_4 &\equiv 0. & (14) \end{aligned}$$

D'autre part on peut montrer numériquement que $g_1(2K) \sim -2\pi$, $g_2(2K) \sim -\pi$ et $g_3(2K) \sim 0$. Ces propriétés nous permettent de montrer que, au lieu de coupure associé aux covecteurs avec $p_y(0) > 0$, on a

$$\begin{aligned} x &= \eta^2 \epsilon' (g_1(2K) - g_2(2K)) + o(\eta^2), & (15)\\ y &= \eta^3 \frac{2K}{3} + o(\eta^3), & (16) \end{aligned}$$

ce qui indique que quand $\epsilon' \neq 0$ alors le lieu de coupure s'accumule sur $q = (0,0)$ tangentement à la distribution, et non pas transversalement comme dans le cas de l'approximation nilpotente.

Un calcul similaire montre que pour $p_y(0) < 0$ au lieu de coupure on a

$$\begin{aligned} x &= \eta^2 \epsilon' (g_1(2K) + g_2(2K)) + o(\eta^2), & (17)\\ y &= -\eta^3 \frac{2K}{3} + o(\eta^3). & (18) \end{aligned}$$

Le lieu de coupure vient donc s'accumuler sur q comme un cusp asymétrique tangent à la distribution en q (voir Figure 5).

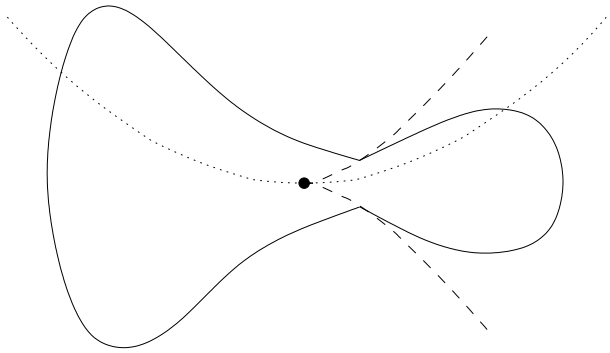

FIGURE 5 – La sphère (ligne continue) et le lieu de coupure (tirets) en un point de tangence dans le cas générique, avec le lieu singulier $\mathcal{Z}$ (en pointillé)

3.4 Lieu de coupure du front d'onde issu du lieu singulier $\mathcal{Z}$ au voisinage d'un point de tangence [C2]

On s'est aussi intéressé dans [C2] à calculer le lieu de coupure du front d'onde issu de $\mathcal{Z}$ au voisinage d'un point de tangence. En un point de type Grushin, la distribution est transverse à $\mathcal{Z}$ donc le front d'onde issu de $\mathcal{Z}$ est localement sans singularité ni point double : il n'y a pas de lieu de coupure local. Par contre, en un point de tangence la distribution n'étant pas transverse à $\mathcal{Z}$ le front d'onde issu de $\mathcal{Z}$ a du lieu de coupure et du lieu conjugué.

La motivation pour étudier ce front et son lieu ce coupure était double : tout d'abord il s'agissait de savoir si nous pouvions confirmer ou comprendre ce qui semble ce dessiner numériquement à savoir que la formule de Gauss-Bonnet telle qu'énoncée dans [4] n'est pas valable en présence de points de tangence ; ensuite, toujours pour la construction d'une forme normale réduite, nous cherchions une courbe lisse transverse à $\mathcal{Z}$ en un point de tangence.

L'étude qui suit montre une disymétrie forte entre les deux parties du front issu de $\mathcal{Z}$ de part et d'autre d'un point de tangence, à la différence de ce qui se passe pour les points de Grushin. Ceci accrédite le fait qu'il n'y a sans doute pas de phénomène de compensation dans les intégrales qui apparaissent pour la formule de Gauss-Bonnet (voir partie 4.1). Elle montre aussi que le lieu de coupure de ce front n'est pas lisse aux points de tangence ce qui le disqualifie comme support d'une courbe lisse transverse à $\mathcal{Z}$ en un point de tangence.

On considère la forme normale donnée plus haut

$$(F3) \qquad X(x,y) = (1,0), \quad Y(x,y) = (0, (y - x^2\psi(x))\mathrm{e}^{\varphi(x,y)}),$$

où $\psi(0) = 1$.

On peut estimer l'ordre du temps de coupure du front issu de $\mathcal{Z}$ pour sa partie au dessus de $\mathcal{Z}$ ainsi que celle au dessous. On peut en effet montrer aisément que les géodésiques partant de $(a, a^2\psi(a))$ ont un temps de coupure de l'ordre de a pour celles qui entrent dans le domaine au dessus de $\mathcal{Z}$ ($y > x^2\psi(x)$) et de l'ordre de $\sqrt{|a|}$ pour celles qui entrent dans le domaine au dessous de $\mathcal{Z}$ ($y < x^2\psi(x)$). Cela suggère que le petit paramètre naturel est dans le premier cas a et dans le deuxième $\sqrt{|a|}$.

Le calcul des jets de l'application exponentielle et du lieu de coupure se fait donc de façon différente pour la partie haute et la partie basse du front.

Pour la partie haute, les calculs se posent bien en donnant les poids 1,2,0 et -1 aux variables x, y, p_x et p_y, en fixant un nouveau paramètre de temps $s = t/a$ et avec les conditions initiales $x(0) = a$, $y(0) = a^2\psi(a)$, $p_x(0) = -\text{signe}(a)$ et $p_y(0) = \frac{\text{signe}(a)}{2a\psi(a)+a^2\psi'(a)}$. On trouve une image stable du lieu de coupure en prenant $k = 1$ dans le lemme 1 et on trouve au lieu de coupure

$$x = -\frac{\psi'(0)}{2}a^2 + 0(a^3) \tag{19}$$

$$y = a^2 + O(a^3) \tag{20}$$

c'est-à-dire une courbe transverse à la distribution au point de tangence.

Pour la partie basse, on fait les calculs en choisissant comme petit paramètre $\eta = \sqrt{|a|}$, en donnant les poids 1,3,0 et -2 aux variables x, y, p_x et p_y, en fixant un nouveau paramètre de temps $s = t/\eta$ et en partant des conditions initiales $x(0) = \eta^2$, $y(0) = \eta^4\psi(\eta^2)$, $p_x(0) = 1$ et $p_y(0) = -\frac{1}{2\eta^2\psi(\eta^2)+\eta^4\psi'(\eta^2)}$ quand $a > 0$ et $x(0) = -\eta^2$, $y(0) = \eta^4\psi(\eta^2)$, $p_x(0) = -1$ et $p_y(0) = \frac{1}{-2\eta^2\psi(-\eta^2)+\eta^4\psi'(-\eta^2)}$ quand $a < 0$. On trouve une image stable du lieu de coupure en prenant $k = 1$ dans le lemme 1 et on trouve au lieu de coupure

$$x = \eta^2 C_x + O(\eta^3) \tag{21}$$

$$y = \eta^3 C_y + O(\eta^4) \tag{22}$$

où C_x et C_y sont des constantes non nulles, c'est-à-dire une courbe tangente à la distribution au point de tangence.

Le lieu de coupure est donc la réunion du support d'une courbe au dessus de $\mathcal{Z}$, qui s'accumule au point de tangence de façon transverse à la distribution, et du support d'une courbe au dessous de $\mathcal{Z}$, qui s'accumule au point de tangence de façon tangente à la distribution. Il a donc un angle au point de tangence ce qui permet d'assurer qu'il n'est pas un bon candidat support d'une courbe transverse à la distribution au point de tangence.

Remarque 2. *La preuve complête de la forme du lieu de coupure est plus technique que ce qui est présenté ici. Elle est détaillée dans [C2].*

3.5 Forme normale pour les structures presque-riemanniennes en dimension 2 [C2]

La question de la construction d'une forme normale totalement réduite est venue naturellement lors de l'étude des points de tangence et a été motivée par l'étude de la formule de Gauss-Bonnet en présence de points de tangence (voir parties 3.3, 3.4, 4.1 et [C4,C5]).

En géométrie riemannienne, la forme normale classique au voisinage d'un point q se construit de la façon suivante. On fixe $(X_1, \ldots, X_m)$ une base orthonormée de T_qM et on considère l'application $(x_1, \ldots, x_m) \to \exp_q(\sum_i x_i X_i)$. C'est un difféomorphisme local et il définit donc un système de coordonnées locales au voisinage de q. La matrice $Q(x_1, \ldots, x_m)$ qui représente le produit scalaire étant symétrique définie positive, il existe

une unique matrice $R(x_1, \ldots, x_m)$ ayant les mêmes propriétés qui vérifie $(R^{-1})^2 = Q$. Les champs de vecteurs définis en coordonnées par les colonnes de R forment un champ de bases orthonormées de la métrique. Ce champ de bases est unique modulo le choix de la base orthonormée de T_qM soit modulo un élément de $O(n)$.

Pour construire un système de coordonnées par le procédé utilisé dans la preuve du théorème 1, il suffit de construire une courbe paramétrée transverse à la distribution, puis de choisir une orientation respectivement à cette courbe. On a donc cherché à identifier une courbe canonique transverse à la distribution.

Points de type Grushin. Le cas des points de type Grushin est le plus simple à régler. $\mathcal{Z}$ est alors un bon support pour une courbe paramétrée canonique transverse. Il ne reste qu'à paramétrer $\mathcal{Z}$. Or la valeur modulo $\mathcal{D}$ de $[X, Y]$ ne dépend pas du choix de champ de bases orientées (X, Y) de la métrique presque-riemannienne. En particulier le long de $\mathcal{Z}$ cela permet de déterminer une orientation et un paramétrage dès que la métrique et l'orientation de E sont fixées.

Afin d'utiliser le procédé utilisé dans la preuve du théorème 1 dans le cas des points ordinaires (ou riemanniens) et des points de tangence, nous allons nous appuyer sur la fonction courbure K en dehors de $\mathcal{Z}$. Plus exactement, si nous supposons que la courbure est une fonction de Morse (ce qui est générique) alors nous pouvons définir les crêtes et les vallées de K comme le lieu où, le long d'une ligne de niveau, le gradient a une norme minimale, en les différenciant par le fait que les lignes de $-\nabla K$ s'écartent des crêtes et se rapprochent des vallées. Crêtes et vallées sont incluses dans l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{q \in M | g_q(\nabla(||\nabla K||^2), \nabla K^{\perp}) = 0\} \cup \mathcal{T}.$$

où $\nabla K^{\perp}$ est un champ de vecteur orthogonal à ∇K.

Points riemanniens. On peut maintenant traiter le cas des points riemanniens quand la courbure est une fonction de Morse ayant en plus la propriété générique **Ha** qu'en ses extrémas sa hessienne calculée dans une base orthonormée a des valeurs propres distinctes. Aux points q où le gradient de la courbure n'est pas nul, on peut prendre comme courbe canonique passant par q la courbe intégrale du gradient de la courbure passant par q à $t = 0$. Aux points q où le gradient de la courbure est nul, la courbure a soit un maximum, soit un minimum, soit un point selle. Grâce a la propriété **Ha**, pour chacun de ces points il passe exactement une crête (maximum), une vallée (minimum) ou une crête et une vallée (point selle). On choisit une de ces courbes et on la paramètre par sa longueur. On a ainsi construit (à orientation près mais ce dernier choix peut être résolu) une courbe paramétrée canonique passant par q (et transverse à $\mathcal{D}_q$).

Points de tangence. Dans le cas d'un point de tangence q, la première tentative pour construire une courbe lisse transverse à $\mathcal{D}_q$ a été de regarder le lieu de coupure du point de tangence mais, comme on l'a vu dans la partie 3.3, ce lieu de coupure n'est pas le support d'une courbe lisse passant par q. La deuxième tentative a été de regarder le lieu de coupure du front issu de $\mathcal{Z}$ au voisinage de q mais là aussi on a vu dans la partie 3.4 que ce lieu de coupure n'est pas le support d'une courbe lisse passant par q.

La solution est venu de l'étude de la fonction courbure. En utilisant la forme normale $(F3)$ on trouve que

$$g_q(\nabla(||\nabla K||^2), \nabla K^{\perp}) = \frac{e^{2\varphi(x,y)} h(x, y)}{(y - x^2\psi(x))^8},$$

où h est une fonction lisse qui vérifie

$$h(x,y) = \omega\, y^4\big(10\psi(0)^2 x + (3\psi'(0) - 2\partial_x\varphi(0,0)\psi(0))y\big) + O_6(x,y),$$

où ω est une constante non nulle et $O_6(x,y)$ est une fonction dont la série de Taylor en (x,y) d'ordre 5 en 0 est nulle. Le théorème des fonctions implicites permet de montrer qu'il existe un unique support de courbe lisse, inclus dans $\mathcal{C}$, passant par 0, dont la droite tangente en 0 est d'équation

$$10\psi(0)^2 x + (3\psi'(0) - 2\partial_x\varphi(0,0)\psi(0))y = 0.$$

Il ne reste donc plus qu'à fixer le paramétrage de cet ensemble. A cet effet, on a besoin de distinguer deux types de points. Si on oriente $\mathcal{Z}$ comme le bord de M_-, alors un point de tangence est dit de type $\mathbf{T}^{\oplus}$ si la distribution tourne positivement le long de $\mathcal{Z}$ au voisinage q et de type $\mathbf{T}^{\ominus}$ dans le cas contraire. Alors on peut fixer le paramétrage en

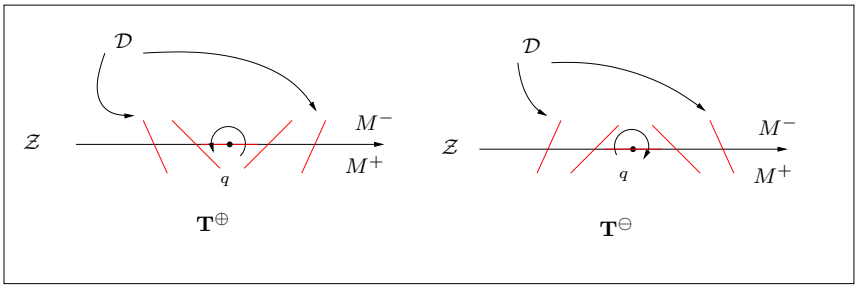

FIGURE 6 – Les deux différentes types de points de tangence

demandant qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la forme normale $(F3)$ construite en utilisant cette courbe vérifie

- $[X,[X,Y]]|_{(0,y)} = -2\partial_y$ et $[\partial_y, Y]|_{(0,0)} = \lambda\partial_y$ si q est de type $\mathbf{T}^{\oplus}$,
- $[X,[X,Y]]|_{(0,y)} = 2\partial_y$ et $[\partial_y, Y]|_{(0,0)} = -\lambda\partial_y$ si q est de type $\mathbf{T}^{\ominus}$.

On a donc, pour chacun des types de points, mis en évidence l'existence d'une forme normale complètement réduite. Les propriétés de la courbe transverse construite peuvent être traduites en terme de propriétés des fonctions φ, ψ et ξ apparaissant dans les formes normales $(F1)$, $(F2)$ et $(F3)$ et sont données dans le corollaire 2 de [C2].

4 Structures presque-riemanniennes 2D : résultats globaux

4.1 Formule de Gauss-Bonnet

A l'origine des travaux présentés dans les articles ([4], [27] et [C4]), il y a une observation faite pendant la rédaction d'un article de contrôle quantique ([C8]) où l'on décrit la synthèse optimale pour un problème de transfert en mécanique quantique pour un système à trois niveaux d'énergie. Pour faire court, on étudiait les géodésiques sur la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pour la métrique sous-riemannienne ayant pour base orthonormée $-y\partial_x + x\partial_y$ et $\alpha(-z\partial_y + y\partial_z)$. Celle-ci est en fait presque-riemannienne, étant singulière le long de $y = 0$. On a observé que, bien que la courbure soit négative là où elle est bien définie, les points ont du lieu conjugué. Situation qui s'observe aussi pour la métrique de Grushin. U. Boscain a continué à s'intéresser à la courbure de telles structures sur des surfaces compactes et, en travaillant avec A. Agrachev et M. Sigalotti cela a donné la formule de type Gauss-Bonnet de [4] pour les structures presque-riemanniennes 2D n'ayant que des singularités de type Grushin. Puis une généralisation aux domaines à bords [27]. Dans [C4] nous démontrons une formule qui prend en charge les points de tangence et s'applique donc de façon générique.

D'autres formules de type Gauss-Bonnet ont été démontrées dans des contextes proches (voir [6, 51, 50]).

4.1.1 Rappel du cas riemannien

Pour une surface riemannienne orientée M, si une courbe γ fermée est difféomorphe à un polygone et positivement orientée comme le bord d'un domaine Ω contractile, alors la formule de Gauss-Bonnet donne

$$\int_\Omega K dA + \int_\gamma k_g ds + \sum_i \epsilon_i = 2\pi,$$

où K est la courbure gaussienne, k_g est la courbure géodésique de γ orientée comme bord de Ω et les ϵ_i sont les valeurs signées des angles le long de γ. Cette formule permet de montrer, avec la formule de la caractéristique d'Euler et la triangulation des surfaces, le théorème de Gauss-Bonnet qui affirme que pour toute surface riemannienne compacte orientée M alors

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M),$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de la surface M.

Pour plus de détails et retrouver les preuves, voir [54, 35].

4.1.2 Une formule de type Gauss-Bonnet pour les surfaces compactes presque-riemanniennes [4]

Soit M une surface compacte orientée et S une structure presque-riemannienne sur M. La courbure riemannienne est bien définie sur $M \setminus \mathcal{Z}$. L'intégrale de la courbure sur M diverge. En fait elle diverge sur toute composante connexe de $M \setminus \mathcal{Z}$.

Notons $N_\epsilon(\mathcal{Z})$ le voisinage tubulaire de $\mathcal{Z}$ de rayon ϵ. Si on prend en compte non pas l'orientation sur M mais l'orientation de S c'est-à-dire celle induite par E, et si on note dA_s la forme volume sur $M \setminus \mathcal{Z}$ associée à la métrique et à l'orientation sur E alors, sous les hypothèses H_0, la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{M \setminus N_\epsilon(\mathcal{Z})} K(q) dA_s$$

existe s'il n'y a pas de points de tangence. Notons M^+ et M^- la partition en deux ouverts de $M \setminus \mathcal{Z}$ telle que dA coincide (resp. ne coincide pas) avec dA_s sur M^+ (resp. M^-). Les auteurs montrent plus précisemment :

Théorème 2. *Sous les hypothèses H_0 et en l'absence de points de tangence*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{M \setminus N_\epsilon(\mathcal{Z})} K(q) dA_s = 2\pi(\chi(M^+) - \chi(M^-)) \tag{23}$$

où χ est la charactéristique d'Euler.

L'idée de la preuve du théorème est la suivante.

Sous les hypothèses H_0, $\mathcal{Z}$ est une sous-variété lisse. En l'absence de point de tangence, $\mathcal{Z}$ contient uniquement des points de type Grushin. La transversalité de la distribution et de $\mathcal{Z}$ aux points de type Grushin, ainsi que la compacité de $\mathcal{Z}$, entraine le résultat suivant :

Lemme 2. *Pour ϵ assez petit $N_\epsilon(\mathcal{Z})$ est difféomorphe à $\mathcal{Z} \times [0,1]$ et $\partial N_\epsilon(\mathcal{Z})$ est lisse.*

Ainsi, si on note $M_\epsilon = M \setminus N_\epsilon(\mathcal{Z})$ alors pour ϵ assez petit son bord est lisse et

$$\int_{M_\epsilon} K \, dA_s = \int_{M_\epsilon^+} K \, dA - \int_{M_\epsilon^-} K \, dA$$

et en utilisant la formule de Gauss-Bonnet pour M_ϵ^+ et M_ϵ^- on obtient

$$\int_{M_\epsilon} K \, dA_s = \left(2\pi\chi(M_\epsilon^+) - \int_{\partial M_\epsilon^+} k_g \, ds\right) - \left(2\pi\chi(M_\epsilon^-) - \int_{\partial M_\epsilon^-} k_g \, ds\right),$$

où la courbure géodésique est calculée avec l'orientation donnée par dA à $\partial M_\epsilon^\pm$. Comme pour ϵ assez petit M_ϵ^+ et M_ϵ^- ont la même topologie que M^+ et M^-, il reste à montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\partial M_\epsilon^+} k_g \, ds - \int_{\partial M_\epsilon^-} k_g \, ds\right) = 0.$$

En utilisant la forme normale (F2) $X(x,y) = (1,0)$, $Y(x,y) = (0, x\mathrm{e}^{\varphi(x,y)})$ le bord ∂M_ϵ s'écrit localement $x = \pm\epsilon$ et on peut calculer explicitement la courbure géodésique de ce bord. Les auteurs montrent, en calculant le développement asymptotique de k_g par rapport à ϵ, que $\int_{\partial M_\epsilon^+} k_g \, ds - \int_{\partial M_\epsilon^-} k_g \, ds$ est un $O(\epsilon)$ ce qui permet de conclure.

Remarque 3. *a) Pour avoir un tel résultat, il est nécessaire de travailler sous l'hypothèse de généricité, sinon il pourrait arriver que la compensation ne se fasse pas. Par exemple si on travail sur le tore $\mathbf{R}^2/(\pi\mathbf{Z})^2$ et si on considère la métrique définie par $(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \sin(\theta_1)^2 \frac{\partial}{\partial\theta_2})$ alors l'orientation en dehors de $\mathcal{Z}$ est toujours celle définie par $(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2})$,*

il n'y a donc pas de changement d'orientation le long de $\mathcal{Z}$ et les compensations ne se font pas.

b) Les auteurs montrent aussi d'une part que si une structure presque-riemannienne générique est trivialisable et sans point de tangence alors $\chi(M^+) = \chi(M^-)$ et d'autre part que toute surface compacte orientable admet une structure presque riemannienne trivialisable sans point de tangence.

4.1.3 Une formule de type Gauss-Bonnet pour les domaines à bord [27]

Dans [27], les auteurs montrent un résultat qui généralise la formule de Gauss-Bonnet précédente pour des domaines à bord. Ils supposent toujours que H_0 est vérifiée et qu'il n'y a pas de point de tangence. Ils considèrent les domaines dont le bord est C^2 par morceaux sur $M \setminus \mathcal{Z}$, de longueur finie et au moins C^1 à leurs intersections avec $\mathcal{Z}$.

Ils montrent en particulier

Théorème 3. *Sous les hypothèses H_0, si le domaine U est sans point de tangence, de bord C^2 par morceaux sur $M \setminus \mathcal{Z}$, C^2 en $\mathcal{Z}$, et de longueur finie, alors*

$$\int_U K dA_s + \int_{\partial U} k_g d\sigma_s = 2\pi(\chi(U^+) - \chi(U^-)), \tag{24}$$

où on définit $\int_{\partial U} k_g d\sigma_s = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\partial U_\varepsilon^+} k_g d\sigma - \int_{\partial U_\varepsilon^-} k_g d\sigma \right)$ et $\partial U_\varepsilon^\pm$ par $\partial U \cap M_\varepsilon$.

Quand le bord du domaine n'est que C^1 aux points d'intersections avec $\mathcal{Z}$ alors dans la formule apparaîssent des termes qui prennent en compte les angles limites entre le bord de U et celui de M_ϵ quand ϵ tend vers 0. Pour arriver à ce résultat, comme dans [4], ils utilisent de façon importante la forme normale $(F2)$ et réétudient les phénomènes de compensation au voisinage de $\mathcal{Z}$ qui deviennent plus subtiles.

Dans la suite nous n'utilisons pas la version la plus pointue de ce résultat car nous regardons des domaines dont les bords traversant $\mathcal{Z}$ sont supports de géodésiques. Nous avons donc simplement besoin de la formule (24).

4.1.4 Gauss-Bonnet dans le cas générique [C4]

Dans [C4], nous avons généralisé la formule de [4] en présence de points de tangence.

Nous avons d'abord tenté de prouver directement que la formule est vraie même en présence de points de tangence. Mais, comme nous l'avons évoqué précédemment, des simulations numériques nous amènent plutôt à poser la conjecture contraire à savoir que l'intégrale diverge en cas de points de tangence. De plus la dynamique des géodésiques transverses à $\mathcal{Z}$ n'est pas du tout symétrique au voisinage d'un point de tangence ce qui est très différent du cas des points de Grushin et semble contradictoire avec la convergence de l'intégrale.

Nous avons donc décidé de prendre en compte différemment le voisinage de $\mathcal{Z}$ au points de tangence.

A cette fin, on a besoin de définir le nombre de révolutions de Δ. On peut identifier $\Delta_{|\mathcal{Z}}$ à une section de $PTM_{|\mathcal{Z}}$. Le nombre de révolutions de Δ est le degré $\tau(S)$ de cette section. Dans le cas où la distribution vérifie les conditions H_0, on peut calculer de façon explicite ce nombre en se concentrant sur les points de tangence : pour mesurer

comment Δ "tourne" le long de $\mathcal{Z}$, il suffit de regarder aux points de tangence si Δ tourne positivement (et donne une contribution $+1$ au nombre de révolutions) ou si elle tourne négativement. La contribution en un point de tangence q est notée $\tau(q)$.

$$\tau(S) = \sum_{q \in \mathcal{T}} \tau(q).$$

Nous avons démontré dans un premier temps

Théorème 4. *Sous les hypothèses H_0,*

$$\chi(M^+) - \chi(M^-) + \tau(S) = e(E).$$

où $e(E)$ est le nombre d'Euler du fibré E.

L'idée de la preuve est la suivante : si σ est une section du fibré E transverse à la section nulle (n'ayant que des singularités isolées), alors par définition

$$e(E) = \sum_{p|\sigma(p)=0} i(p, \sigma)$$

où $i(p, \sigma)$ est l'indice de σ en p et vaut 1 ou -1 pour une section transverse à la section nulle. On construit donc une section transverse à la section nulle pour laquelle on sait prouver que $\sum_{p|\sigma(p)=0} i(p, \sigma) = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \tau(S)$.

On construit dans un premier temps la section au voisinage de chaque composante connexe de $\mathcal{Z}$. Ainsi, pour une telle composante W, on fixe $\bar{W}$ un de ses voisinages tel qu'il existe un difféomorphisme $\psi : S^1 \times]-1, 1[\to \bar{W}$ avec $W = \psi(S^1 \times \{0\})$. On définit alors σ_1 sur $\bar{W} - W$ par

$$\sigma_1(q) = \text{signe}(s) R_{\frac{\pi}{2}}(\mathfrak{f}^{-1}(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, s)))$$

où $q = \psi(\theta, s)$, signe(s) est le signe de s et $R_{\frac{\pi}{2}}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur E.

Cette section n'a pas de limite le long de W. On montre par contre qu'il existe une fonction h lisse strictement positive sur $\bar{W} - W$ telle que $\sigma_2 = h \times \sigma_1$ se prolonge sur $\bar{W}$ tout entier de façon lisse, non nulle sur $\bar{W} - \mathcal{T}$, nulle sur $\mathcal{T}$ telle que, pour $q \in \mathcal{T}$, $i(q, \sigma_2) = \tau_q$.

Si on note W_i les composantes connexes de $\mathcal{Z}$ et $\bar{W}_i$ leurs voisinages ainsi construits supposés disjoints, le champ $\mathfrak{f} \circ \sigma_2$ pointe dans $M^+ \backslash \cup_i \bar{W}_i$ en son bord et hors de $M^- \backslash \cup_i \bar{W}_i$ en son bord. Ainsi, $\mathfrak{f} \circ \sigma_2$ peut se prolonger en un champ dont les zéros p_j sont isolés et, grâce à la formule de Hopf :

$$\sum_{j|p_j \in M^+} i(p_j, \mathfrak{f} \circ \sigma_2) = \chi(M^+), \qquad \sum_{j|p_j \in M^-} i(p_j, \mathfrak{f} \circ \sigma_2) = \chi(M^-).$$

Comme $\mathfrak{f}$ préserve l'orientation sur M^+ et la renverse sur M^- on en déduit que

$$\sum_{j|p_j \in M^+} i(p_j, \sigma_2) = \sum_{j|p_j \in M^+} i(p_j, \mathfrak{f} \circ \sigma_2), \qquad \sum_{j|p_j \in M^-} i(p_j, \sigma_2) = -\sum_{j|p_j \in M^-} i(p_j, \mathfrak{f} \circ \sigma_2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e(E) &= \sum_{p|\sigma_2(p)=0} i(p,\sigma_2) \\ &= \sum_{p\in\mathcal{T}} i(p,\sigma_2) + \sum_{p\in M^+|\sigma_2(p)=0} i(p,\sigma_2) + \sum_{p\in M^-|\sigma_2(p)=0} i(p,\sigma_2) \\ &= \tau(S) + \chi(M^+) - \chi(M^-) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Nous démontrons ensuite, comme corollaire de ce résultat, une généralisation du théorème de Gauss-Bonnet obtenu en l'absence de point de tangence. Mais pour cela nous avons besoin de définir une nouvelle façon d'intégrer la courbure. Prenons une surface compacte orientée presque-riemannienne vérifiant la propriété H_0. Ses points de tangence sont isolés. Pour chaque point de tangence q on choisit des coordonnées normales en q comme expliqué plus haut et on considère le rectangle plein $B^q_{\delta_1\delta_2}$ qui est défini comme l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $|x| < \delta_1$ et $|y| < \delta_2$. Quitte à prendre δ_1 et δ_2 assez petit, les $B^q_{\delta_1\delta_2}$ sont disjoints deux-à-deux. Nous avons montré que

$$\fint_M K dA_s := \lim_{\delta_1\to 0}\lim_{\delta_2\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon - \cup_{q\in\mathcal{T}} B^q_{\delta_1\delta_2}} K dA_s$$

ne dépend pas du choix des coordonnées normales et que sa limite vaut $2\pi e(E)$. La preuve consiste à reprendre le travail du cas sans points de tangence et de calculer la contribution des points de tangence dans l'intégrale de la courbure géodésique le long du bord. Cette contribution fait apparaître un terme en $2\pi\tau(S)$ et on a prouvé

Théorème 5. *Soit M une surface presque-riemannienne compacte orientée qui vérifie les hypothèses H_0. Alors*

$$\fint_M K dA_s = 2\pi(\chi(M^+) - \chi(M^-) + \tau(S)) = 2\pi e(E).$$

4.2 Classification Lipschitz des surfaces presque-riemanniennes compactes en dimension 2 [C3]

On se donne une structure presque-riemannienne 2D, $S = (M, E, \mathfrak{f}, g)$, on suppose que l'hypothèse H_0 est vérifiée et donc que le théorème 1 s'applique.

4.2.1 Graphe associé à une surface compacte presque-riemannienne

A chaque structure presque-riemannienne S vérifiant les hypothèse H_0, on peut associer un graphe étiqueté qui contient l'information de la topologie de M_+, de M_-, de la répartition des points de tangence le long de $\mathcal{Z}$, ainsi que de leur contribution.

Les sommets représentent les composantes connexes de $M \setminus \mathcal{Z}$. Ils sont munis d'étiquettes qui contiennent l'information de l'orientation ($+1$ si la composante est incluse dans M_+, -1 sinon) et la caractéristique d'Euler.

Une arête entre deux sommets S1 et S2 représentent la composante connexe de $\mathcal{Z}$ qui sépare les composantes connexes de $M \setminus \mathcal{Z}$ représentées par S1 et S2. Elle est munie

d'une étiquette qui contient la liste ordonnée des contributions des points de tangence : on choisit un premier point de tangence puis en partant de lui et, en suivant $\mathcal{Z}$ dans le sens de son orientation, on collecte la liste des contributions.

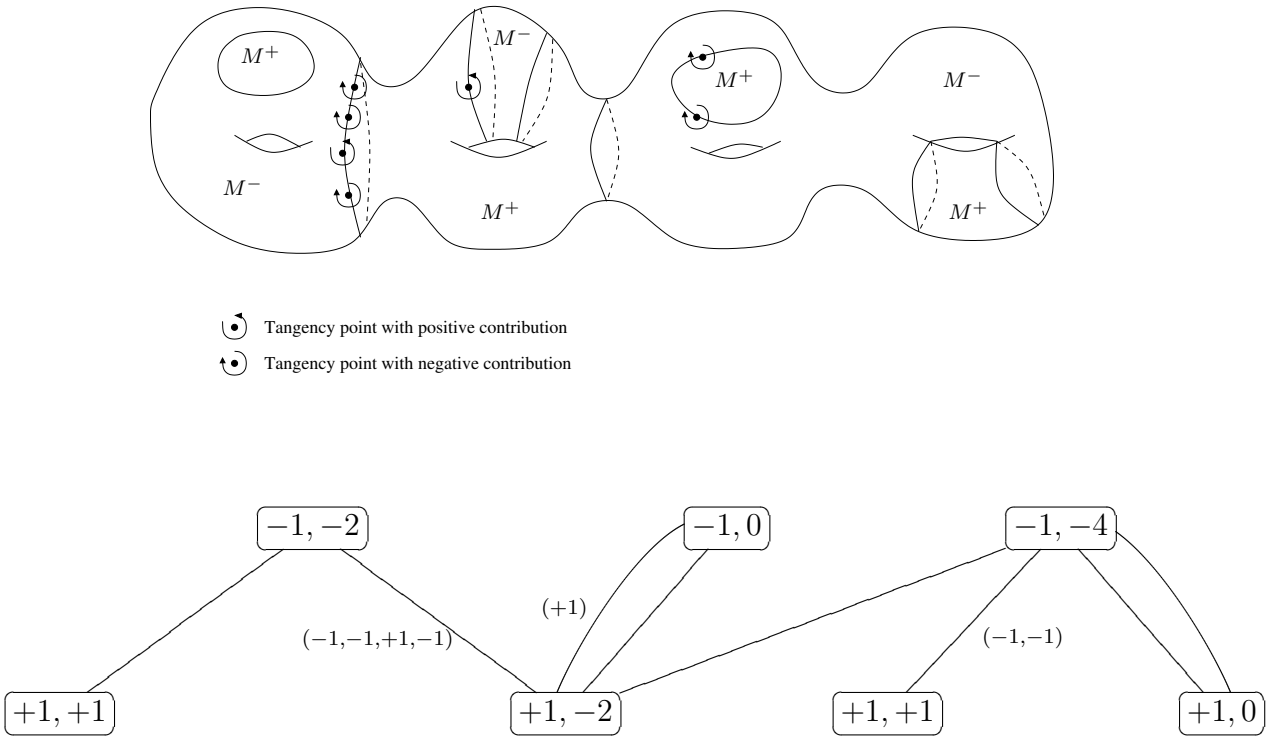

FIGURE 7 – Exemple de structure presque-riemannienne sur une surface de genre 4 et son graphe

On dira que deux graphes sont équivalents s'ils peuvent être obtenus à partir de la même structure presque-riemannienne quitte à changer l'orientation de E. En particulier deux graphes sont équivalents si l'on passe de l'un à l'autre en opérant une permutation circulaire sur les étiquettes des arêtes (sans changer l'orientation). Et si l'on change l'orientation de E, les étiquettes des sommets changent de $(\pm 1, m)$ en $(\mp 1, m)$ et les étiquettes des arêtes changent en remplaçant chaque contribution par sa contribution opposée et en changeant le sens de lecture des contributions.

4.2.2 Classification Lipschitz des surfaces compactes presque-riemanniennes orientées

Deux structures sous-riemanniennes sont dites Lipschitz équivalentes s'il existe un difféomorphisme entre les deux variétés qui est bi-Lipschitz respectivement aux métriques des deux structures. Une fois défini le graphe associé à un structure presque-riemannienne orientée compacte, on peut énoncer le

Théorème 6. *Deux structures presque-riemanniennes définies sur des surfaces compactes orientées vérifiants H_0 sont Lipschitz équivalentes si et seulement si elles ont des graphes équivalents.*

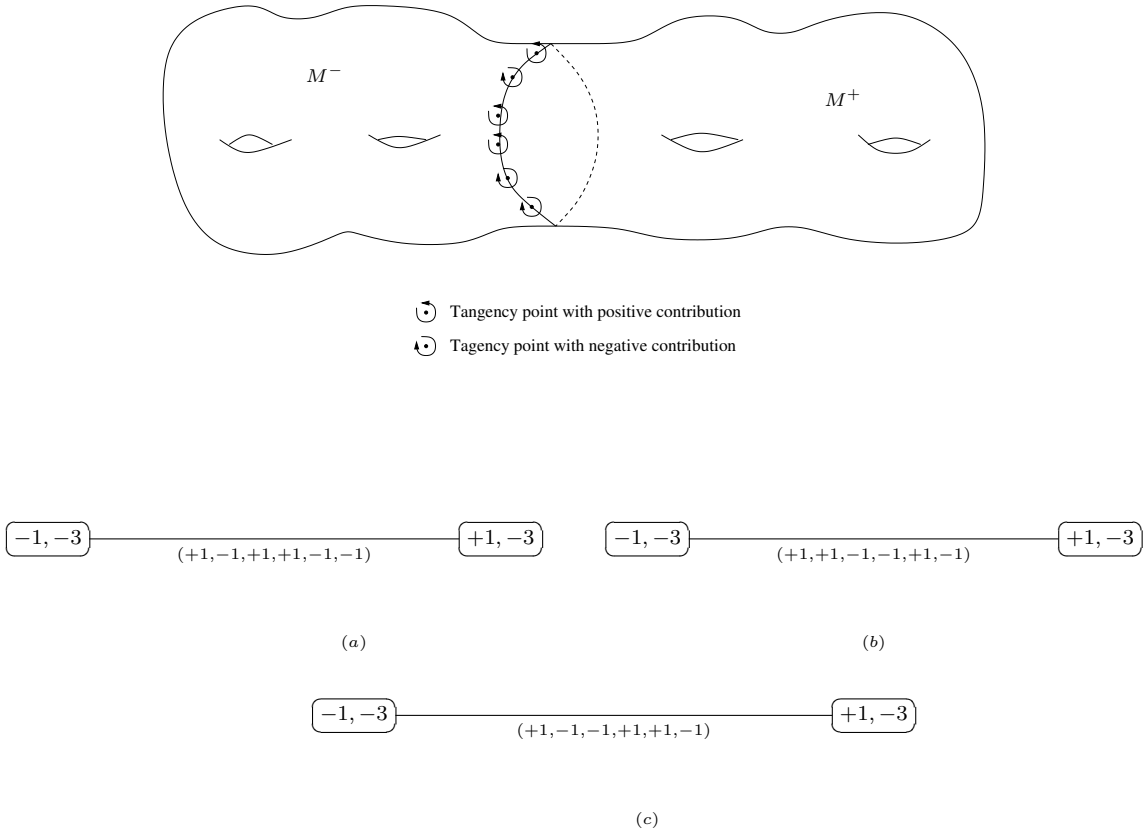

FIGURE 8 – Exemple de structure presque-riemannienne sur une surface de genre 4. Les Figures (a) et (b) montrent deux graphes équivalents associés à cette strcuture. La Figure (c) donne un exemple de graphe qui n'est pas équivalent au graphe de la figure (a)

On présente ici le schéma de la preuve.

Nécessité de l'équivalence des graphes. La preuve se décompose en trois lemmes.

Le premier lemme affirme qu'un difféomorphisme bi-Lipschitz envoie points ordinaires sur points ordinaires, points de Grushin sur points de Grushin et points de tangence sur points de tangence. Ceci est une conséquence assez immédiate du "Ball-Box theorem" qui dit que la dimension des sphères en un point est liée au drapeau $\mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^2 \subset \mathcal{D}^3 \subset \cdots$. Comme un difféomorphisme bi-Lipschtz ne peut que changer d'un facteur borné les dimensions, il ne peut faire correspondre des points qui n'ont pas la même suite de dimensions $(\dim(\mathcal{D}^1), \dim(\mathcal{D}^2), \dots)$.

Ceci implique que le difféomorphisme respecte la topologie de M, de $\mathcal{Z}$, de $M \setminus \mathcal{Z}$ ainsi que de leurs composantes connexes. On peut supposer de plus, quitte à changer l'orientation d'un des deux fibrés, que le difféomorphisme préserve les orientations des variétés et des fibrés. Les sommets et les arêtes sont donc les mêmes. Reste à garantir qu'on obtient les mêmes étiquettes, à équivalence près.

Le deuxième lemme indique qu'au voisinage d'un point de tangence q, si on utilise la forme normale (F3), alors toute courbe admissible lipschitzienne issue de q qui resterait dans $M \setminus \mathcal{Z}$ en dehors de q reste en fait dans le domaine $y - x^2\psi(x) < 0$. D'autre part si ce domaine est inclus dans M_+ alors $\tau_q = 1$ sinon $\tau_q = -1$.

Le troisième lemme, utilisant les deux premiers, montre que les points de tangence de contribution τ_q sont envoyés sur les points de tangence de même contribution τ_q.

Au final il devient évident que les graphes sont équivalents.

Suffisance de l'équivalence des graphes. La première étape est de montrer qu'à difféomorphisme de fibré près on peut supposer que l'on travaille sur la même variété avec le même fibré E et le même morphisme de fibré vectoriel $\mathfrak{f}$. Des arguments classiques de topologie permettent de montrer que l'on peut construire un difféomorphisme qui envoie points sur points de même type et, quitte à changer une orientation de fibré, qui envoie $M_\pm$ sur $M_\pm$ et points tangents de contribution τ_q sur points tangents de contribution τ_q. Ce qui est plus technique, c'est de montrer qu'on peut faire ceci en envoyant la distribution sur la distribution, point par point, et en envoyant sous-module des champs de vecteurs admissibles sur sous-module des champs de vecteurs admissibles. L'utilsation des formes normales (F2) et (F3) y joue un rôle important.

Une fois qu'on a montré qu'on peut supposer avoir deux structures $(M, E, \mathfrak{f}, g_1)$ et $(M, E, \mathfrak{f}, g_2)$ où g_1 et g_2 sont deux métriques sur la même $(2, 2)$-distribution alors on conclut facilement en utilisant la compacité de M : g_1 et g_2 sont localement comparables donc globalement comparables.

Remarque 4. *Les preuves nécessitent plus de travail et sont détaillées dans [C3].*

5 Asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur des métriques riemanniennes et sous-riemanniennes

5.1 Résultats connus en riemannien et sous-riemannien

En géométrie riemannienne, le laplacien est généralement défini de la façon suivante. La divergence d'un champ de vecteur est définie à partir du volume riemannien par

$$\mathrm{div}(X)\mathrm{vol} = L_X \mathrm{vol}.$$

Le gradient d'une fonction lisse étant bien défini, on définit le laplacien par

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)).$$

En géométrie sous-riemannienne il n'y a pas toujours de volume naturel. Dans le cas d'une distribution équirégulière, c'est-à-dire quand les $\mathcal{D}^i$ sont de dimension constante sur toute la variété, le volume de Popp prolonge naturellement le volume riemannien (voir [47, 3, 15, 14]). Mais, de façon général, pour pouvoir définir partout un laplacien en sous-riemannien, il faut choisir un volume lisse. Une fois le volume μ choisi, on définit la divergence par

$$\mathrm{div}(X)\mu = L_X \mu,$$

et le laplacien par

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))$$

où $\mathrm{grad}(f)$ désigne le gradient sous-riemannien de f qui est lui même défini comme le champ de vecteurs à valeurs dans $\mathcal{D}$ qui vérifie

$$df_{|\mathcal{D}} = \langle \mathrm{grad}(f), . \rangle.$$

Si la condition de Hörmander est vérifiée (ce qui est trivial en riemannien), et si la métrique est complète, alors l'opérateur Δ admet un noyau de la chaleur symétrique lisse $p_t(x, y)$ (voir [39, 55]).

La question de relier les asymptotiques en temps petit de $p_t(x, y)$ avec les propriétés de la distance a été étudiée à partir des années 40 dans le cas riemannien puis dans les années 80 pour ce qui concerne le sous-riemannien. En particulier, en 1988, généralisant au sous-riemannien un résultat de Molchanov de 1975 ([46]), Ben Arous démontre dans [17] que si x et y sont tels que $x \neq y$ et x et y ne sont pas points de coupure l'un de l'autre, et s'ils ne sont pas reliés par une anormale stricte minimisante, alors en temps petit

$$p_t(x, y) = \frac{C(x, y) + O(t)}{t^{n/2}} \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t},$$

où C est une fonction lisse strictement positive et $O(t)$ est uniforme sur les compacts. De même Léandre démontre dans [43, 42], en généralisant la formule de Varadhan ([56]), que pour tout couple de points

$$\lim_{t \to 0} 4t \log(p_t(x, y)) = -d^2(x, y).$$

Généraliser les résultats de Ben Arous et Molchanov au cas où x et y sont dans le lieu de coupure l'un de l'autre est resté une question ouverte jusqu'à récemment. Il a été étudié

en riemannien en particulier dans [48, 49]. Dans le cas sous-riemannien, le lieu de coupure était très peu connu jusque dans les années 90 où les travaux d'Agrachev, Gauthier et al ([8, 32]) ont permis de décrire complètement le lieu de coupure générique dans le cas des distributions de contact sur les variétés de dimension 3, motivés en particulier par les travaux de Ben Arous et Léandre sur le noyau de la chaleur sous-riemannien. Les résultats qui suivent font avancer grandement les choses en riemannien et en sous-riemannien.

5.2 Résultats de Barilari, Boscain et Neel [13]

Dans [13] les auteurs font une avancée importante dans la compréhension du lien entre singularité de l'application exponentielle au lieu de coupure et l'asymptotique du noyau de la chaleur. Suivant une idée de Molchanov, les auteurs font ce lien par l'intermédiaire de l'étude de la fonction h_{xy} définie par

$$h_{xy}(z) = \frac{d^2(x,z) + d^2(y,z)}{2},$$

au voisinage de l'ensemble Γ_{xy} des points z où cette fonction h_{xy} est minimale. Ils s'intéressent en particulier aux points y qui sont dans l'intersection du lieu conjugué et du lieu de coupure de x, qui apportent une contribution d'ordre différent au noyau de la chaleur.

Je vais détailler en partie les résultats principaux de [13] ce qui permettra de comprendre en grande partie les éléments clés dans la preuve des résultats plus récents présentés dans [C1].

Comme leur travail s'appuie sur le résultat de Ben Arous, les auteurs demandent qu'il n'y ait pas d'anormale minimisante qui intervienne dans la partie de la synthèse optimale que l'on va considérer.

Hypothèse : pour simplifier l'exposé, dans la suite on supposera qu'il n'y a pas d'anormale minimisante.

Les auteurs montrent que

Proposition 2. *L'ensemble Γ_{xy} est en fait l'ensemble des points z tels que*

$$d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y).$$

Il est compact et, en l'absence d'extremale anormale minimisante, il est à distance finie strictement positive du lieu de coupure.

Fixons maintenant z dans Γ_{xy} et λ la condition initiale qui correspond à la géodésique qui atteint z en temps 1 en restant optimale. Une conséquence immédiate de la proposition précédente est que l'application exponentielle est un difféo d'un voisinage de λ dans un voisinage de z. La fonction distance à x est donc lisse au voisinage de z et le développement de Ben Arous pour (x,z) s'applique. Il en va de même pour la distance à y au voisinage de z et pour le développement de Ben Arous pour (y,z).

Par compacité de Γ_{xy}, il existe un voisinage de Γ_{xy}, noté $N(\Gamma_{xy})$ sur lequel le développement de Ben Arous pour (x,z) s'applique et h_{xy} est lisse sur ce voisinage.

L'idée qu'utilise Molchanov dans le cas riemannien est d'appliquer la propriété de semi-groupe pour estimer le noyau en (x,y) combinée avec les estimations en (x,z) et (y,z), puis de montrer que la contribution principale va venir des passages à mi-parcours par Γ_{xy}. Plus précisemment, les auteurs montrent dans un premier temps, le

Théorème 7. *Soit M une variété sous-riemannienne complête et x et y deux points de M. Alors, pour tout voisinage $N(\Gamma_{xy})$ de Γ_{xy}, il existe une constante $\delta > 0$ et une fonction c_0 lisse et strictement positive sur $N(\Gamma_{xy}) \times N(\Gamma_{xy})$ telles que*

$$p_t(x,y) = \int_{N(\Gamma_{xy})} \frac{2^n}{t^n} \mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t}(c_0(x,z)c_0(y,z) + O(t))\mu(dz) + o\left(exp\left(\frac{-d(x,y)^2 - \delta}{4t}\right)\right)$$

où $O(t)$ est uniforme sur $N(\Gamma_{xy})$.

La propriété de semi-groupe (ou équation de Chapman-Kolmogorov) est

$$p_t(x,y) = \int_M p_{t/2}(x,z)p_{t/2}(z,y)\mu(dz).$$

L'intégrale dans la formule du théorème est directement issue de cette propriété en utilisant le développement asymptotique de Ben Arous, qui est valable pour $z \in N(\Gamma_{xy})$, et en utilisant son uniformité sur les compacts. Le $o(.)$ de la formule utilise le résultat de Leandre pour évaluer l'intégrale sur $M \setminus N(\Gamma_{xy})$.

Puis ils étudient la partie intégrale de la formule grâce au propriétés des développements de Laplace (voir [33]), ainsi qu'en utilisant les formes normales des fonctions au voisinage d'un de leur minimum local.

Proposition 3 (Asymptotique de Laplace)**.** *Soit g définie sur $\mathbf{R}^n$ par $g(u) = \sum_{i=1}^n u_i^{2m_i}$ où $1 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n$, D un compact de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction lisse. Alors*

$$\int_D f(u)\mathrm{e}^{-g(u)/t}du = t^{\frac{1}{2m_1}+\cdots+\frac{1}{2m_n}}\left(f(0)\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1/2m_i)}{m_i} + O(t^{1/m_n})\right),$$

où Γ est ici la fonction Gamma usuelle.

Ainsi, si l'on s'intéresse à nouveau à $\displaystyle\int_{N(\Gamma_{xy})} \frac{2^n}{t^n}\mathrm{e}^{-h_{xy}(z)/t}(c_0(x,z)c_0(y,z))\mu(dz)$ et si au voisinage d'un minimum il existe un système de coordonnées tel que $h_{xy} = d(x,y)^2/4 + \sum_i z_i^{2m_i}$, alors on obtient l'asymptotique pour t petit suivant

$$p_t(x,y) = \frac{2^n}{t^{n-\frac{1}{2m_1}-\cdots-\frac{1}{2m_n}}}\mathrm{e}^{-d(x,y)^2/4t}\left(f(0)\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1/2m_i)}{m_i} + O(t^{1/m_n})\right),$$

où $f(z)dz = c_0(x,z)c_0(y,z)\mu(dz)$.

Ce résultat motive fortement l'intérêt d'étudier la fonction h_{xy} et sa dégénérescence au voisinage de Γ_{xy}, ce que font les auteurs en mettant ensuite en évidence la relation qu'il y a entre dégénérescence de h_{xy} en $z \in \Gamma_{xy}$ et appartenance de y au lieu conjugué à x.

Théorème 8. *Soit z dans Γ_{xy} et λ un élément de T_x^*M tel que $Exp_x(\lambda) = z$ et donc $Exp_x(2\lambda) = y$. Soit $\lambda(.)$ une courbe dans T_x^*M définie au voisinage de 0 telle que $\lambda(0) = \lambda$, et les deux courbes définies par $z(s) = Exp_x(\lambda(s))$ et $y(s) = Exp_x(2\lambda(s))$. Alors $\dot{y}(0) = 0$ si et seulement si $\dot{z}(0)$ est dans le noyau de la hessienne de h_{xy} en z.*

Les arguments principaux qui permettent de prouver ce résultat sont les suivants.

Comme il existe une unique géodésique optimale entre x et $z(s)$ pour s petit on peut définir $\bar{\lambda}(s)$ l'élément de $T^*_{z(s)}M$ comme la valeur du relevé de cette géodésique en $z(s)$. De même, comme il existe une unique géodésique optimale entre y et $z(s)$ pour s petit on peut définir $\bar{\eta}(s)$ l'élément de $T^*_{z(s)}M$ comme la valeur du relevé de cette géodésique en $z(s)$. Alors on a :

$$dh_{x,y|_{z(s)}} = \bar{\lambda}(s) + \bar{\eta}(s).$$

Notons que l'image par l'exponentiel en $z(s)$ de $\bar{\lambda}(s)$ est $y(s)$ quand celle de $-\bar{\eta}(s)$ est y. Or comme l'exponentielle en z est un difféomorphisme d'un voisinage de $\bar{\lambda}(0)$ dans un voisinage de y, on en déduit que pour s assez petit, l'exponentielle en $z(s)$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $-\bar{\eta}(s)$ dans un voisinage de y. Ainsi $y(s)$ est d'ordre m en s si et seulement si $\bar{\lambda}(s)+\bar{\eta}(s)$ est d'ordre m, c'est-à-dire si $dh_{x,y|_{z(s)}}$ est d'ordre m.

Supposons que $\dot{y}(0) = 0$ c'est-à-dire $y(s)$ est un $o(s)$. Alors $dh_{x,y|_{z(s)}}$ est un $o(s)$, donc aussi $dh_{x,y|_{z(s)}}(\dot{z}(s))$, et ainsi $h(z(s))$ est un $o(s^2)$ ce qui implique que $\dot{z}(0)$ est dans le noyau de la hessienne de h_{xy}.

Réciproquement supposons que le noyau de la hessienne soit de dimension $n-k$ et que $\dot{z}(0)$ est dans ce noyau. h_{xy} étant minimal en z, il existe un système de coordonnées centré sur z tel que

$$h_{xy}(z) = z_1^2 + \cdots + z_k^2 + \varphi(z_1, \ldots, z_n)$$

où φ a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux nulles et $\dot{z}_1(0) = \cdots = \dot{z}_k(0) = 0$. Alors $dh_{xy|_{z(s)}} = z_1(s)dz_1 + \cdots + z_k(s)dz_k + d\varphi_{|z(s)}$ est un $o(s)$. Ainsi $y(s)$ est un $o(s)$ et donc $\dot{y}(0) = 0$. Ce qui termine la démonstration. Et qui permet de montrer

Lemme 3. *Soit x et y deux points de M et $z \in \Gamma_{xy}$. Alors il existe un système de coordonnées au voisinage de z tel que*

$$\frac{1}{4}d^2(x,y) + u_1^2 \leq h_{xy}(u_1, \ldots, u_n) \leq \frac{1}{4}d^2(x,y) + u_1^2 + \cdots + u_n^2,$$

et, si la géodésique passant par z est conjuguée en y, alors il existe un système de coordonnées au voisinage de z tel que

$$h_{xy}(u_1, \ldots, u_n) \leq \frac{1}{4}d^2(x,y) + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + u_n^4.$$

Ce lemme permet alors naturellement de prouver le théorème

Théorème 9. *Soit x et y deux points de M alors il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que*

$$\frac{C_1}{t^{n/2}}\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t} \leq p_t(x,y) \leq \frac{C_2}{t^{n-1/2}}\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

Si de plus x et y sont conjugués le long d'au moins une géodésique alors il existe C_3 tel que

$$p_t(x,y) \geq \frac{C_3}{t^{(n/2)+(1/4)}}\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t},$$

et si, au contraire, x et y ne sont conjugués le long d'aucune géodésique alors il existe C_4 tel que

$$p_t(x,y) = \frac{C_4 + O(t)}{t^{n/2}}\mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}.$$

5.3 Singuarités génériques de l'application exponentielle et asymptotiques du noyau de la chaleur en dimension inférieure ou égale à 5 [C1]

Le travail que je présente ici est le fruit d'une collaboration avec les auteurs de [13]. Il ne concerne pas que les petites dimensions mais les résultats les plus complets sont en dimension inférieure ou égale à 5.

5.3.1 Deux lemmes techniques importants

Les lemmes 5, et 6 ci-dessous forment les arguments principaux qui permettent d'affiner les résultats précédents.

Pour les démontrer on utilise

Lemme 4 (Splitting Lemma, [36]). *Soit $g : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction lisse avec U un voisinage de l'origine. Si $g(0) = 0$ and $dg_{|0} = 0$ et si 0 est un minimum local isolé de g avec $dim(ker(d^2 g_{|0})) = k$ alors il existe un système de coordonnées locales au voisinage de 0 tel que*

$$g(u) = u_1^2 + \cdots + u_{n-k}^2 + \varphi(u_{n-k} + 1, \ldots, u_n)$$

où φ vérifie $\varphi(0) = 0$, $d\varphi_{|0} = 0$ $d^2\varphi_{|0} = 0$.

Définition 1. *Soit f une application de M dans N de même dimension n. On dit que f a une singularité de type $(1, m)$ en $x \in M$ si $dim(\ker(D_x f)) = 1$ et si en coordonnées on a*

$$m = \max\{k \in \mathbf{N} \mid \exists c(.) \in \mathcal{C}_x \text{ avec } \dot{c}(0) \neq 0 \text{ et } f(c(t)) = f(x) + t^k v + o(t^k) \text{ où } v \neq 0\}$$

où $\mathcal{C}_x$ est l'ensemble des courbes lisses qui passent en x à $t = 0$.

On peut alors énoncer

Lemme 5. *Soient x et y conjugués le long d'une géodésique $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ avec $t \in [0, 1]$ et soit $z_0 = Exp_x(\lambda)$. Alors Exp_x a une singularité de type $(1, m)$ en 2λ si et seulement s'il existe un système de coordonnées autour de z_0 tel que*

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{m+1}.$$

ainsi que

Lemme 6. *Soient x et y conjugués le long d'une géodésique $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ avec $t \in [0, 1]$ et soit $z_0 = Exp_x(\lambda)$. Pour tout $\xi \in \ker(dExp_{x|_{2\lambda}})$ il existe une courbe $s \mapsto \lambda(s)$ à valeurs dans $T_x^* M$ telle que $\lambda(0) = \lambda$, $\dot{\lambda}(0) = \xi$ et telle que si on note $y(s) = Exp_x(2\lambda(s))$ alors en coordonnées $y - y(s) = O(s^3)$.*

Dans le cas où z_0 est isolé dans Γ_{xy}, les preuves de ces deux lemmes s'appuient toutes les deux sur la mise sous forme normale de la fonction h_{xy}, via le splitting lemma.

Dans le cas du lemme 5, le fait que Exp_x a une singularité de type $(1, m)$ en 2λ implique que localement 2λ est le seul antécédent de y et donc que z_0 est un minimum local strict et donc isolé de h_{xy}. Le théorème 8 permet de dire que le noyau de la hessienne de h_{xy}

en z_0 est de dimension 1 et le splitting lemma d'affirmer alors qu'il existe un système de coordonnées autour de z_0 tel que

$$h_{xy}(z) = d(x,y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + \varphi(z_n).$$

Notons $\lambda(s)$ l'antécédent de $(0,\ldots,0,s)$ dans T_x^*M par Exp_x, $y(s) = Exp_x(2\lambda(s))$ et k l'ordre de $y(s)$. Alors $dh_{xy}|_{z(s)}$ est d'ordre k mais $dh_{xy}|_{z(s)} = \varphi'(s)dz_n$ donc $\varphi'(s)$ est d'ordre k ce qui implique que $\varphi(s)$ est d'ordre $k+1$. Maintenant, si on prend une autre courbe $\bar{z}(s)$ passant par z_0, on a

$$dh_{xy}|_{\bar{z}(s)} = \bar{z}_1(s)dz_1 + \ldots \bar{z}_{n-1}(s)dz_{n-1} + \varphi'(\bar{z}_n)dz_n.$$

On en déduit que l'ordre de $dh_{xy}|_{\bar{z}(s)}$ est au plus k et que la courbe $\bar{y}(s)$ correspondante est au plus d'ordre k.

On s'intéresse maintenant au lemme 6. On sait que la dimension du noyau de Exp_x en 2λ est égale à la dimension du noyau de la hessienne de h_{xy} en z_0.

Dans le cas où z_0 est isolé dans Γ_{xy} on peut utiliser le splitting lemma : Si la dimension du noyau de la hessienne de h_{xy} en z_0 est $n-k$ alors il existe un système de coordonnées autour de z_0 tel que

$$h_{xy}(z) = d(x,y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_k^2 + \varphi(z_{k+1},\ldots,z_n),$$

avec φ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 sont nulles. En fait le fait que φ ait un minimum local en 0 entraine de plus que les dérivées d'ordre 3 sont aussi nulles. Ainsi, si w est dans le noyau de la hessienne de h_{xy} il s'écrit $w = (0,\ldots,0,w_{k+1},\ldots,w_n)$ et, le long de la courbe $s \mapsto sw$, $d\varphi$ est d'ordre au moins 3 et donc le $y(s)$ correspondant est aussi au moins d'ordre 3.

Quand z_0 n'est pas isolé, on peut adapter la preuve. On peut écrire

$$h_{xy}(z) = d(x,y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_k^2 + \varphi(z_1,\ldots,z_n),$$

où φ a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 nulles et dépend maintenant de toutes les variables z_i. Pour conclure comme précédemment il reste à montrer qu'il existe un changement de variables pour lequel la série de Taylor en 0 de φ n'a plus de termes d'ordre 3. Pour discuter les différents termes on note i_1, i_2 etc les indices inférieurs ou égaux à k et j_1, j_2 etc les indices strictement supérieurs à k. Comme les indices i ne correspondent pas au noyau, on peut supposer que $h_{xy}(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0) = z_1^2 + \cdots + z_k^2$ donc il n'y a pas de termes d'ordre 3 du type $z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}$. D'autre part, comme $h_{xy}(0,\ldots,0,z_{k+1},\ldots,z_n)$ est minimal en 0 les termes de plus bas degré de sa série de Taylor ne peuvent pas être de degré impair. Ainsi, il n'y a pas de termes en $z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}$ dans la série de Taylor de h_{xy} en $z=0$. Reste à régler la question des termes mixtes qui mélangent les variables z_i et z_j mais ceux-ci peuvent être pris en charge : par exemple si on a un terme du type $\alpha z_1 z_n^2$ alors par le changement de variable $\bar{z}_1 = z_1 + \frac{\alpha}{2}z_n^2$ alors $\bar{z}_1^2 = z_1^2 + \alpha z_1 z_n^2 + \frac{\alpha^2}{4}z_n^4$ et dans les nouvelles variables le terme considéré a disparu sans qu'aucun nouveau terme d'ordre 3 n'apparaisse. De même, si on a un terme du type $\alpha z_1^2 z_n$ ou pourra faire le changement de variable $\bar{z}_1 = z_1 + \frac{\alpha}{2}z_1 z_n$. On peut donc supposer que φ a toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 3 nulles et on peut reprendre la preuve faite dans le cas où z_0 est isolé.

Ces lemmes ont deux corollaires immédiats. Le lemme 5 a pour conséquence

Corollaire 1. *Soient x et y conjugués le long d'une géodésique optimale $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ avec $t \in [0,1]$ et soit $z_0 = Exp_x(\lambda)$. Supposons que cette géodésique soit la seule qui relie x et y de façon optimale et que Exp_x a une singularité de type $(1,m)$ en 2λ alors m est impair et il existe des coordonnées telles que*

$$h_{xy}(z) = d^2(x,y)/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{m+1}$$

ce qui donne l'information suivante sur le développement asymptotique

$$p_t(x,y) = \frac{C + O(t^{\frac{2}{m+1}})}{t^{n-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{m+1}}}\, exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right).$$

Le lemme 6 entraine

Corollaire 2. *Soient x et y conjugués le long d'une géodésique optimale $\gamma(t) = Exp_x(2t\lambda)$ avec $t \in [0,1]$ et soit $z_0 = Exp_x(\lambda)$. Si la dimension du noyau de Exp_x en 2λ vaut $n-k$ alors il existe des coordonnées telles que*

$$h_{xy}(z) \leq d^2(x,y)/4 + z_1^2 + \cdots + z_k^2 + z_{k+1}^4 + \cdots + z_n^4$$

ce qui donne l'information suivante sur le développement asymptotique

$$p_t(x,y) \geq \frac{C}{t^{n-\frac{k}{2}-\frac{n-k}{4}}}\, exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{4t}\right).$$

5.3.2 Applications au cas riemannien

On applique maintenant les lemmes 5 et 6 au cas des structures riemanniennes.

Grâce aux travaux d'Arnold et de son groupe [11], on connait la liste des singularités lagrangiennes génériques jusqu'en dimension 5. Elle coincide avec la liste des singularités lagrangiannes stables à savoir :

En dimension 1 :
$\mathcal{A}_2 : x \mapsto x^2$.
En dimension 2 : la précédente plus
$\mathcal{A}_3 : (x,y) \mapsto (x^3 - yx, y)$.
En dimension 3 : les précédentes plus
$\mathcal{A}_4 : (x,y,z) \mapsto (x^4 + yx^2 + zx, y, z)$,
$\mathcal{D}_{4+} : (x,y,z) \mapsto (x^2 + y^2 + xz, xy, z)$,
$\mathcal{D}_{4-} : (x,y,z) \mapsto (x^2 - y^2 + xz, xy, z)$.
En dimension 4 : les précédentes plus
$\mathcal{A}_5 : (x,y,z,t) \mapsto (x^5 + yx^3 + zx^2 + tx, y, z, t)$,
$\mathcal{D}_{5+} : (x,y,z,t) \mapsto (x^3 + y^2 + zx^2 + tx, xy, z, t)$,
$\mathcal{D}_{5-} : (x,y,z,t) \mapsto (-x^3 + y^2 + zx^2 + tx, xy, z, t)$.
En dimension 5 : les précédentes plus
$\mathcal{A}_6 : (x,y,z,t,u) \mapsto (x^6 + yx^4 + zx^3 + tx^2 + ux, y, z, t, u)$,
$\mathcal{D}_{6+} : (x,y,z,t,u) \mapsto (x^4 + y^2 + zx^3 + tx^2 + ux, xy, z, t, u)$,
$\mathcal{D}_{6-} : (x,y,z,t,u) \mapsto (-x^4 + y^2 + zx^3 + tx^2 + ux, xy, z, t, u)$,
$\mathcal{E}_{6+} : (x,y,z,t,u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, y^3 + x^2z, z, t, u)$,
$\mathcal{E}_{6-} : (x,y,z,t,u) \mapsto (x^2 + xyz + ty + ux, -y^3 + x^2z, z, t, u)$.

De plus, il est démontré dans [40] que les singularités riemanniennes génériques au lieu conjugué sont des singularités lagrangiennes génériques. C'est donc dans cette liste qu'il faut chercher les singularités possibles au lieu de coupure conjugué.

Les singularités $\mathcal{A}_n$ sont de type $(1, n)$. Faisons en la preuve pour $\mathcal{A}_6$. Le noyau de la différentielle est de dimension 1 et engendré par $\frac{\partial}{\partial_x}$. De plus on a que pour $x(s) = s$ et $y(s) = z(s) = t(s) = u(s) = 0$ on trouve $(x^6 + yx^4 + zx^3 + tx^2 + ux, y, z, t, u)(s) = (s^6, 0, 0, 0, 0)$. Enfin, si une courbe $s \mapsto (x(s), y(s), z(s), t(s), u(s))$ a pour image une courbe en $O(s^7)$ alors y, z, t et u sont des $O(s^7)$ ce qui implique, en regardant la première coordonnée, que $x(s)^6 = O(s^7)$ et donc que $\dot{x}(0) \neq 0$ et donc que la courbe $s \mapsto (x(s), y(s), z(s), t(s), u(s))$ est singulière en 0. Une courbe non singulière en 0 ne peut donc pas avoir pour image une courbe en $O(s^7)$ ce qui finit de démontrer que $\mathcal{A}_6$ est de type $(1, 6)$. La démonstration dans le cas général est la même.

Le corollaire 1 permet alors d'éliminer les singularités $\mathcal{A}_{2n}$ car on aurait

$$h_{xy}(z) = d(x, y)^2/4 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 + z_n^{2n+1},$$

qui ne peut avoir un minimum en $z = 0$ à cause du terme z_n^{2n+1}.

Le lemme 6 permet d'éliminer toutes les singularités non $\mathcal{A}$ de la liste. Pour chacune de ces singularités le noyau de la différentielle est de dimension 2 et est engendré par $\frac{\partial}{\partial_x}$ et $\frac{\partial}{\partial_y}$. Montrons sur deux exemples comment utiliser le lemme 6.

D'abord pour $\mathcal{D}_{4-}$. Si une courbe $(x, y, z)(s)$ est telle que $(x, y, z)(0) = 0$, $(\dot{x}, \dot{y})(0) \neq 0$ et $\dot{z}(0) = 0$ et si elle est un $o(s^2)$ alors $z(s)$ est un $o(s^2)$ ce qui entraine que $x^2(s) - y^2(s)$ et $x(s)y(s)$ sont des $o(s^2)$ et ceci n'est possible que si $\dot{x}(0)$ et $\dot{y}(0)$ sont nuls et qui est contradictoire avec $(\dot{x}, \dot{y})(0) \neq 0$. Donc pour aucun vecteur du noyau il n'existe de courbe ayant cette vitesse initiale telle que l'image soit un $O(s^3)$. Et ainsi le lemme 6 disqualifie $\mathcal{D}_{4-}$ comme singularité de l'exponentielle riemanienne en un point de coupure conjugué.

Regardons ensuite $\mathcal{E}_{6\pm}$. Si $(x^2+xyz+ty+ux, -y^3+x^2z, z, t, u)(s)$ est un $o(s^2)$ alors en particulier $(z, t, u)(s)$ est un $o(s^2)$ et donc $(xyz + ty + ux)(s)$ est un $o(s^2)$ ce qui entraine que x^2 est un $o(s^2)$. Et on a donc $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = \dot{t}(0) = \dot{u}(0) = 0$. Il y a donc une seule direction v du noyau pour laquelle il existe une courbe ayant v comme vitesse initiale dont l'image est un $o(s^2)$ alors que la dimension du noyau de la différentielle est deux. Ceci est contradictoire avec le lemme 6 et disqualifie donc $\mathcal{E}_{6\pm}$.

Ainsi, jusqu'à la dimension 5, les seules singularités génériques possibles aux points de coupure conjugués sont $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_5$. On connait déjà plusieurs exemples où $\mathcal{A}_3$ est effectivement une singularité correspondant à un point de coupure conjugué. On sait maintenant grâce à ce que l'on vient de montrer que pour les dimensions 2 et 3 c'est la seule singularité générique possible pour la partie optimale du front d'onde. Par contre, pour ce qui concerne $\mathcal{A}_5$, on n'a pas d'exemple où elle est la singularité correspondant à un point de coupure conjugué.

On obtient donc la liste des asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur génériques :

Théorème 10. *Soit M une variété de dimension inférieure ou égale à 5 et $x \in M$. Pour toute métrique riemannienne générique complète sur M et tout y dans M on a*

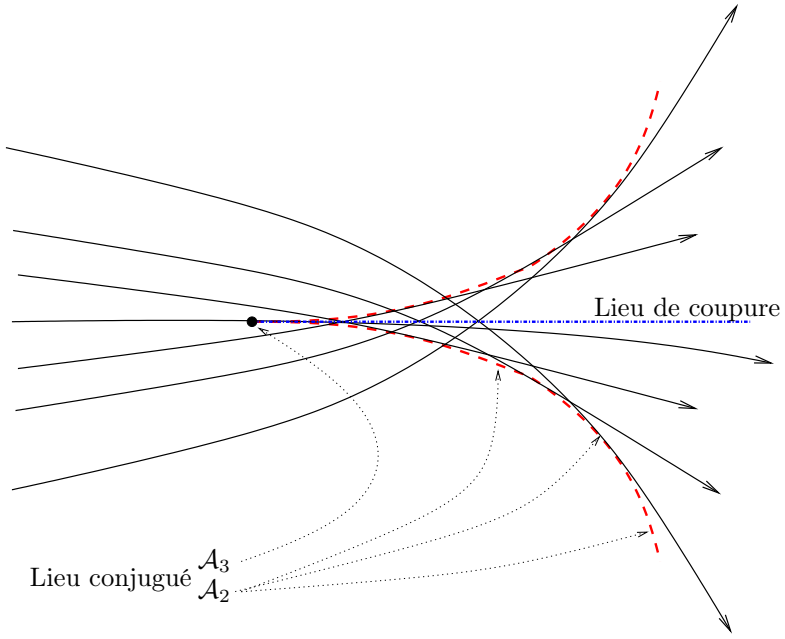

FIGURE 9 – Les géodésiques au voisinage d'une singularité $\mathcal{A}_3$

– *si aucune géodésique optimale reliant x à y n'est conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{n}{2}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}),$$

– *si au moins une géodésique minimale reliant x et y est $\mathcal{A}_3$-conjuguée mais aucune n'est $\mathcal{A}_5$-conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}),$$

– *si au moins une géodésique minimale reliant x et y est $\mathcal{A}_5$-conjuguée alors*

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{n}{2}+\frac{1}{3}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}),$$

ce dernier cas ne pouvant apparaître que lorsque $dim(M) \geq 4$.

5.3.3 Applications aux cas sous-riemannien de contact et de quasi-contact

Dans le cas sous-riemannien, il n'y a pas encore de résultat équivalent à celui de S Janeczko et T. Mostowski [40] même s'il semble qu'ils aient avancé dans cette direction. Cependant, dans le cas de contact on connait très bien le lieu de coupure local : pour une structure sous-riemannienne de contact générique de dimension 3, le lieu de coupure à x vient s'accumuler sur x et les points de coupure conjugués correspondent tous à des singularités de type $\mathcal{A}_3$ de l'application exponentielle (voir [8, 32]). Ainsi on a le théorème

Théorème 11. *Soit une structure sous-riemannienne de contact de dimension 3 générique et $x \in M$. Alors dans tout voisinage de x il existe des points de coupure*

conjugués y, où

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{7}{4}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}).$$

Pour les points y qui ne sont pas de coupure conjugués alors

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}).$$

Pour les structures sous-riemanniennes de quasi-contact de dimension 4 génériques, pour x en dehors de la réunion finie N de certaines sous-variétés plongées, il existe dans tout voisinage de x des points de coupure conjugués y et la singularités de l'application exponentielle correspondante est toujours de type $\mathcal{A}_3$. Pour x dans N, dans tout voisinage de x il existe des points de coupure conjugués y où la singularité de l'application exponentielle est de type $\mathcal{A}_3$, mais il existe peut-être aussi des points de coupure conjugués où la singularité est autre. On a alors

Théorème 12. *Soit une structure sous-riemannienne de quasi-contact de dimension 4 générique et $x \in M$. Alors dans tout voisinage de x il existe des points de coupure conjugués y où*

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{\frac{9}{4}}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}).$$

Pour les points y qui ne sont pas de coupure conjugués alors

$$p_t(x,y) = \frac{C+O(t)}{t^{2}}\, exp(-\frac{d^2(x,y)}{4t}).$$

5.3.4 Application au cas presque-riemannien

Les auteurs de [26] ont décrit les géodésiques, les sphères, le lieu de coupure et le premier lieu conjugué d'un point en dehors de $\mathcal{Z} = \{x = 0\}$ pour la métrique de Grushin $dx^2 + \frac{1}{x^2}dy^2$. Sans perte de généralité, on peut prendre $q = (-1, 0)$. Les géodésiques issues de q doivent traverser $\mathcal{Z}$ pour participer de la création du lieu de coupure et du lieu conjugué : en effet la courbure étant strictement négative en dehors de $\mathcal{Z}$, les géodésiques contenues dans le demi-plan $x < 0$ ne peuvent engendrer ni lieu de coupure ni lieu conjugué. La géodésique issue de $(-1, 0)$ avec le covecteur initial $\lambda_x = \cos(\theta)$, $\lambda_y = \sin(\theta)$ a pour expression

$$\begin{cases} x(t) = t-1, & y(t) = 0 & \text{si } \theta = 0[2\pi] \\ x(t) = -t-1, & y(t) = 0 & \text{si } \theta = \pi[2\pi] \\ x(t) = -\dfrac{\sin(\theta - t\sin(\theta))}{\sin(\theta)} & y(t) = \dfrac{2t - 2\cos(\theta) + \frac{\sin(2\theta - 2t\sin(\theta))}{\sin(\theta)}}{4\sin(\theta)} & \text{si } \theta \notin \pi\mathbf{Z} \end{cases}$$

Ce qui est intéressant à noter c'est qu'il existe deux points qui sont de coupure et conjugués à $(-1, 0)$ de coordonnées $(1, \pm\frac{\pi}{2})$. En ces points un calcul assez simple montre que la singularité de l'application exponentielle est de type $\mathcal{A}_3$. Comme la métrique de Grushin est l'approximation nilpotente en un point de $\mathcal{Z}$ de type Grushin, il est clair que pour q proche de $\mathcal{Z}$ et loin des points de tangence, le même phénomène existe à savoir qu'il existe deux points de l'autre côté de $\mathcal{Z}$ qui sont de coupure et conjugués à q et que la singularité de l'application exponentielle correspondante est de type $\mathcal{A}_3$. Grâce au Lemme 5, on peut donc en déduire

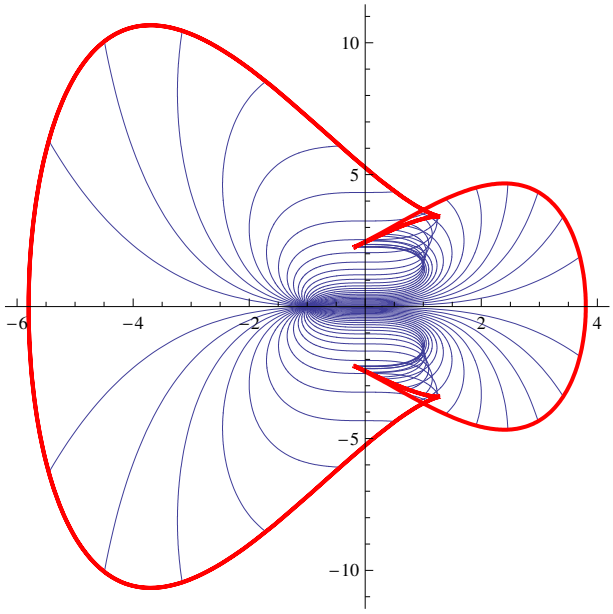

FIGURE 10 – Geodesiques et front d'onde partant d'un point en dehors $\mathcal{Z}$ pour la métrique de Grushin. Figure de [26].

Théorème 13. *Soit une structure presque-riemannienne de dimension 2 générique. Si x est suffisamment proche de $\mathcal{Z}$ sans être proche d'un point de tangence alors il a deux points de coupure conjugués y_1 et y_2 proches où*

$$p_t(x, y_i) = \frac{C + O(t)}{t^{\frac{5}{4}}} \, exp(-\frac{d^2(x, y_i)}{4t}).$$

6 Perspectives

6.1 Etudes des structures presque-riemanniennes en petites dimensions

Je souhaite dans un premier temps finir de regarder ce qu'on peut dire sur le noyau de la chaleur en dimension deux, en particulier pour x et y au voisinage d'un même point de tangence.

Je pense ensuite regarder le cas de la dimension trois. Pour ces structures là tout est à faire : forme normale, étude locale de la synthèse pour les différents types de points, étude locale des asymptotiques en temps petit du noyau de la chaleur, pour ce qui concerne le local ; classification Lipschitz et théorème de type Gauss-Bonnet pour les propriétés globales.

6.2 Etude locale des structures sous-riemanniennes de contact et quasi-contact. A la recherche de $\mathcal{A}_5$

Agrachev, Gauthier et al ont étudié de façon très détaillé le lieu de coupure et le lieu conjugué dans le cas de contact de dimension 3. Un de mes objectifs est de compléter l'étude du cas de quasi-contact en dimension 4, dans un premier temps, puis d'obtenir une description du lieu conjugué et du lieu de coupure dans les cas de contact et de quasi-contact en dimension plus grande pour les métriques génériques.

Je souhaite aussi chercher s'il existe des métriques en dimension inférieure ou égale à 5 dont les points de coupure conjugués correspondent à des singularités $\mathcal{A}_5$ de l'application exponentielle. Les pistes sont

- les métriques sous-riemanniennes de quasi-contact en dimension 4 en des points de N où certains invariants de la structure s'annulent.
- les métriques sous-riemanniennes de contact en dimension 5.
- les métriques presque-riemanniennes à partir de la dimension 4, pour $x \in \mathcal{Z}$ ou x proche de $\mathcal{Z}$.

Les techniques développées pendant ma thèse, ainsi que les travaux produits dans [C1] rendent concrets la démarche à suivre et les calculs à effectuer.

6.3 Singularités génériques sous-riemanniennes en petite dimension

Dans [40] les auteurs montrent que les singularités de l'application exponentielle riemannienne en un point générique est Lagrange générique. Je voudrais montrer qu'il en est de même pour l'application exponentielle sous-riemannienne en dehors de 0 en l'absence d'anormale.

6.4 Systèmes contrôlés finslériens et sous-finslériens

J'encadre depuis le mois de septembre 2012 une étudiante en thèse, Entisar Abdul-Latif ALI. Le sujet de thèse sur lequel elle travail concerne des systèmes finslériens pour

des normes non strictement convexes et plus précisemment les systèmes contrôlés dont la dynamique peut s'écrire

$$\dot{x} = u_1 F_1(x) + \cdots + u_k F_k(x), \qquad \text{avec } |u_i| \leq 1.$$

Nous avons commencé à étudier localement ces systèmes avec deux contrôles en dimension 2, dont on ne connait pas complêtement encore la synthèse locale. Elle s'intéressera après à comprendre la synthèse locale pour deux contrôles en dimension trois quand les deux champs de vecteurs définissent localement une distribution de contact.

Références

[1] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka, *Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 (1997), pp. 377–448 (electronic).

[2] ——, *Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 (1997), pp. 377–448 (electronic).

[3] A. Agrachev, U. Boscain, J.-P. Gauthier, and F. Rossi, *The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups*, J. Funct. Anal., 256 (2009), pp. 2621–2655.

[4] A. Agrachev, U. Boscain, and M. Sigalotti, *A Gauss-Bonnet-like formula on two-dimensional almost-Riemannian manifolds*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 20 (2008), pp. 801–822.

[5] A. A. Agrachev, *Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures*, J. Dynam. Control Systems, 2 (1996), pp. 321–358.

[6] A. A. Agrachëv, *A "Gauss-Bonnet formula" for contact sub-Riemannian manifolds*, Dokl. Akad. Nauk, 381 (2001), pp. 583–585.

[7] A. A. Agrachev, D. Barilari, and U. Boscain, *Introduction to Riemannian and Sub-Riemannian geometry*, Notes, http ://www.math.jussieu.fr/ barilari/Notes.php, 2014.

[8] A. A. Agrachev, E.-H. Chakir El-A., and J. P. Gauthier, *Sub-Riemannian metrics on* $\mathbf{R}^3$, in Geometric control and non-holonomic mechanics (Mexico City, 1996), vol. 25 of CMS Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 29–78.

[9] A. A. Agrachev, G. Charlot, J. P. A. Gauthier, and V. M. Zakalyukin, *On sub-Riemannian caustics and wave fronts for contact distributions in the three-space*, J. Dynam. Control Systems, 6 (2000), pp. 365–395.

[10] A. A. Agrachev and J.-P. A. Gauthier, *On the Dido problem and plane isoperimetric problems*, Acta Appl. Math., 57 (1999), pp. 287–338.

[11] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Volume 1*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2012. Classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous based on a previous translation by Mark Reynolds, Reprint of the 1985 edition.

[12] M. S. Baouendi, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Bull. Soc. Math. France, 95 (1967), pp. 45–87.

[13] D. Barilari, U. Boscain, and R. W. Neel, *Small-time heat kernel asymptotics at the sub-Riemannian cut locus*, J. Differential Geom., 92 (2012), pp. 373–416.

[14] D. Barilari and J. Jendrej, *Small time heat kernel asymptotics at the cut locus on surfaces of revolution*, Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse non linéaire, DOI :10.1016/j.anihpc.2013.03.003, (2013).

[15] D. Barilari and L. Rizzi, *A formula for Popp's volume in sub-Riemannian geometry*, Anal. Geom. Metr. Spaces, 1 (2013), pp. 42–57.

[16] A. Bellaïche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in Sub-Riemannian geometry, vol. 144 of Progr. Math., Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 1–78.

[17] G. Ben Arous, *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 21 (1988), pp. 307–331.

[18] G. Ben Arous and R. Léandre, *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale. II*, Probab. Theory Related Fields, 90 (1991), pp. 377–402.

[19] B. Bonnard, J.-B. Caillau, R. Sinclair, and M. Tanaka, *Conjugate and cut loci of a two-sphere of revolution with application to optimal control*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 26 (2009), pp. 1081–1098.

[20] B. Bonnard and M. Chyba, *Sub-Riemannian geometry : the Martinet case*, in Geometric control and non-holonomic mechanics (Mexico City, 1996), vol. 25 of CMS Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 79–100.

[21] B. Bonnard and M. Chyba, *Méthodes géométriques et analytiques pour étudier l'application exponentielle, la sphère et le front d'onde en géométrie sous-riemannienne dans le cas Martinet*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 4 (1999), pp. 245–334 (electronic).

[22] B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka, *Nonintegrable geodesics in SR-Martinet geometry*, in Differential geometry and control (Boulder, CO, 1997), vol. 64 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 119–134.

[23] B. Bonnard, M. Chyba, and E. Trelat, *Sub-Riemannian geometry, one-parameter deformation of the Martinet flat case*, J. Dynam. Control Systems, 4 (1998), pp. 59–76.

[24] B. Bonnard and E. Trélat, *Stratification du secteur anormal dans la sphère de Martinet de petit rayon*, in Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1 (Paris), vol. 258 of Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer, London, 2001, pp. 239–251.

[25] U. Boscain, T. Chambrion, and J.-P. Gauthier, *On the $K + P$ problem for a three-level quantum system : optimality implies resonance*, J. Dynam. Control Systems, 8 (2002), pp. 547–572.

[26] U. Boscain and C. Laurent, *The Laplace-Beltrami operator in almost-Riemannian geometry*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 63 (2013), pp. 1739–1770.

[27] U. Boscain and M. Sigalotti, *High-order angles in almost-Riemannian geometry*, in Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007, vol. 25 of Sémin. Théor. Spectr. Géom., Univ. Grenoble I, Saint, 2008, pp. 41–54.

[28] R. W. Brockett, *Nonlinear control theory and differential geometry*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), Warsaw, 1984, PWN, pp. 1357–1368.

[29] R. W. Brockett and A. Mansouri, *Short-time asymptotics of heat kernels for a class of hypoelliptic operators*, Amer. J. Math., 131 (2009), pp. 1795–1814.

[30] R. L. Bryant and L. Hsu, *Rigidity of integral curves of rank* 2 *distributions*, Invent. Math., 114 (1993), pp. 435–461.

[31] W.-L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann., 117 (1939), pp. 98–105.

[32] E.-H. C. El-Alaoui, J.-P. Gauthier, and I. Kupka, *Small sub-Riemannian balls on* $\mathbf{R}^3$, J. Dynam. Control Systems, 2 (1996), pp. 359–421.

[33] R. Estrada and R. P. Kanwal, *A distributional approach to asymptotics*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second ed., 2002. Theory and applications.

[34] B. Franchi and E. Lanconelli, *Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, (1983), pp. 105–114 (1984). Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982).

[35] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2004.

[36] D. Gromoll and W. Meyer, *On differentiable functions with isolated critical points*, Topology, 8 (1969), pp. 361–369.

[37] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, english ed., 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[38] V. V. Grushin, *A certain class of hypoelliptic operators*, Mat. Sb. (N.S.), 83 (125) (1970), pp. 456–473.

[39] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[40] S. Janeczko and T. Mostowski, *Relative generic singularities of the exponential map*, Compositio Math., 96 (1995), pp. 345–370.

[41] F. Jean, *Uniform estimation of sub-Riemannian balls*, J. Dynam. Control Systems, 7 (2001), pp. 473–500.

[42] R. Léandre, *Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée*, Probab. Theory Related Fields, 74 (1987), pp. 289–294.

[43] ——, *Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée*, J. Funct. Anal., 74 (1987), pp. 399–414.

[44] ——, *Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée*, Forum Math., 4 (1992), pp. 45–75.

[45] W. Liu and H. J. Sussman, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions*, Mem. Amer. Math. Soc., 118 (1995), pp. x+104.

[46] S. A. Molčanov, *Diffusion processes, and Riemannian geometry*, Uspehi Mat. Nauk, 30 (1975), pp. 3–59.

[47] R. Montgomery, *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*, vol. 91 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[48] R. Neel, *The small-time asymptotics of the heat kernel at the cut locus*, Comm. Anal. Geom., 15 (2007), pp. 845–890.

[49] R. Neel and D. Stroock, *Analysis of the cut locus via the heat kernel*, in Surveys in differential geometry. Vol. IX, Surv. Differ. Geom., IX, Int. Press, Somerville, MA, 2004, pp. 337–349.

[50] F. Pelletier, *Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 4 (1995), pp. 87–199.

[51] F. Pelletier and L. Valère Bouche, *Le problème des géodésiques en géométrie sous-riemannienne singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 317 (1993), pp. 71–76.

[52] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskiĭ, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *Selected works. Vol. 4*, Classics of Soviet Mathematics, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986. The mathematical theory of optimal processes, Edited and with a preface by R. V. Gamkrelidze, Translated from the Russian by K. N. Trirogoff, Translation edited by L. W. Neustadt, With a preface by L. W. Neustadt and K. N. Trirogoff, Reprint of the 1962 English translation.

[53] P. Rashevsky, *Any two points of a totally nonholonomic space may be connected by an admissible line*, Uch. Zap. Ped Inst. im. Liebknechta, 2 (1938), pp. 83–84.

[54] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry.*, Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second ed., 1979.

[55] R. S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry*, J. Differential Geom., 24 (1986), pp. 221–263.

[56] S. R. S. Varadhan, *On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), pp. 431–455.

[57] N. T. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon, *Analysis and geometry on groups*, vol. 100 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.