Institut Fourier (Grenoble I) Licence L1 2000-2001

Voici pour l'essentiel le travail que j'ai fait sur le cours de Topologie donné par Alain Dufresnoy en travaux dirigés avec le groupe 6 (Magistère) entre Octobre 2000 et Janvier 2001.

Certains textes d'exercices ont été empruntés à Christophe Leuridan ou Christian Datry que je remercie ici.

Yves Carrière.

Opérations sur les ensembles

Rappel : Si $f : E \to F$ est une application entre les ensembles E et F, et $U \subset F$ on note $f^{-1}(U) = \{x \in E | f(x) \in U\}$ l'*image réciproque de U par f*.

Exercice 1. — 1) Montrer que si $A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que si f est injective alors $f^{-1}(f(A)) = A$. Est-ce que cette dernière propriété caractérise l'injectivité ?

2) Montrer que si $U \subset F$, $f(f^{-1}(U)) \subset U$; caractériser les parties U telles que $f(f^{-1}(U)) = U$.

3) Etant donné I un ensemble d'indices et $A_{i,i\in I}$ une famille d'ensembles indéxée par I, comparer :

a) $f(\cup_{i\in I}A_i)$ et $\cup_{i\in I}f(A_i)$; $f(\cap_{i\in I}A_i)$ et $\cap_{i\in I}f(A_i)$

b) $f^{-1}(\cup_{i\in I}A_i)$ et $\cup_{i\in I}f^{-1}(A_i)$; $f^{-1}(\cap_{i\in I}A_i)$ et $\cap_{i\in I}f^{-1}(A_i)$

c) ${}^cA$ désignant le complémentaire de A

$f({}^cA)$ et ${}^c(f(A))$; $f^{-1}({}^cU)$ et ${}^c(f^{-1}(U))$

Exercice 2. — On note $A\Delta B = (A \cap {}^cB) \cup (B \cap {}^cA)$ la *différence symétrique* des ensembles A et B.

1) Dans quel cas $A\Delta B = \emptyset$?

2) Que vaut $\mathrm{Card}\, A\Delta B$ exprimé à l'aide de $\mathrm{Card}\, A$, $\mathrm{Card}\, B$ et $\mathrm{Card}\, A \cap B$?

3) Exprimer $A \cup B$ à l'aide de $A\Delta B$. En déduire une expression de $\mathrm{Card}\, A \cup B$ puis de $\mathrm{Card}\, A \cup B \cup C$.

4) Ecrire $(A\Delta B) \cap C$ comme différence symétrique de deux ensembles.

Précisions sur la théorie axiomatique des ensembles

Dans la théorie des ensembles fondée par Cantor (1872) qui est le cadre admis des maths actuelles, les objets considérés $x, y \dots$ qui ont un sens dans la théorie sont appelés des *ensembles*. Deux ensembles x, y peuvent être soumis aux deux relations suivantes tout à fait primitives dans la théorie :

a) *L'égalité* $x = y$ qui a les propriétés d'une relation d'équivalence.

b) *L'appartenance* $x \in y$. On dit alors que *x est élément de y*.

Il faut insister sur le fait que si du point de vue "naif" un ensemble est une "collection d'éléments", du point de vue axiomatique, le mot *élément* vient "après" le mot *ensemble*.

L'appartenance permet de définir une autre relation : *l'inclusion*. On dit que x est inclus dans y et on note $x \subset y$ ssi $z \in x \Rightarrow z \in y$.

On ne pourrait rien faire d'intéressant avec ces seules notions primitives. Pour disposer d'une théorie riche qui peut servir de cadre aux maths et dont on peut espérer qu'elle soit cohérente (sans en être sûr aujourd'hui), on s'accorde à adopter la base d'axiomes dûe à Ernst Zermelo (1908) et Abraham Fraenkel (1922). La théorie ainsi structurée est la théorie des ensembles Zermelo-Fraenkel.

On observera que dans l'énoncé de chacun des 9 axiomes de Zermelo-Fraenkel, la relation d'appartenance tient une place. En somme, ces 9 axiomes prescrivent essentiellement les propriétés attendues de la relation d'appartenance.

Axiomes de Zermelo-Fraenkel commentés

Axiome 1. — *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.*

On peut aussi et c'est facile à vérifier, énoncer cette axiome : $x \subset y$ et $y \subset x \Leftrightarrow x = y$ (*i.e.* la double inclusion équivaut à l'égalité).

Axiome 2. — *Il existe un ensemble sans élément. On l'appelle l'ensemble vide et on le note $\emptyset$.*

Par l'axiome précédent, on vérifie facilement qu'il n'y a qu'un ensemble sans élément, c'est pourquoi on lui reserve une notation particulière.

Axiome 3. — *Si x et y sont des ensembles, il existe un ensemble dont les éléments sont x et y. Cet ensemble est noté $\{x, y\}$ et si $x = y$, il est noté aussi $\{x\}$ et appelé le singleton $\{x\}$ (i.e. l'ensemble dont le seul élément est x).*

Axiome 4. — *La réunion d'un ensemble d'ensembles est un ensemble.*

Autrement dit, si E est un ensemble, il existe un ensemble appelé la réunion (et non la collection) des éléments de E et noté $\cup_{x\in E} x$ qui a pour éléments exactement tous les éléments des $x \in E$. Si E se présente comme une famille d'ensembles $E = \{A_i, i \in I\}$ où I est un ensemble index, on écrit cette réunion $\cup_{i\in I} A_i$.

Axiome 5. — *Il existe un ensemble E dont $\emptyset$ est élément et qui est tel que si x appartient à E, le singleton $\{x\}$ appartient aussi à E (axiome de l'infini).*

Définition : Un ensemble A est *infini* s'il est en bijection avec une partie propre c'est-à-dire une partie (*i.e.* sous-ensemble) $B \subset A$ et $B \neq A$ (on admet ici comme déjà définies les notions d'applications injectives, surjectives, bijectives).

Un ensemble E, dont l'existence est affirmée par l'axiome 5, a en particulier la propriété : si $x \in E$ alors le *singleton* $\{x\} \in E$ (ce qui, il faut le souligner, n'est pas du tout une propriété générale des ensembles). On peut donc définir une application $f : E \to E$ par $f(x) = \{x\}$. Il est clair que cette application est injective ($\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$) et l'élément $\emptyset$ de E n'étant pas un singleton, $\emptyset \notin f(E)$ de sorte que E est en bijection par f avec la partie propre $f(E)$ de E. L'ensemble E est donc infini.

En fait tous les ensembles E, dont l'existence est affirmée par l'axiome 5, contiennent l'ensemble $N = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$ qui peut servir à construire les nombres entiers à la façon de Peano : le *successeur* de $x \in N$ est $\{x\}$, on décide de noter 0 l'élément $\emptyset \in N$ de noter 1 l'élément $\{\emptyset\}$ et $x + 1$ le successeur $\{x\}$ et on pourrait ainsi retrouver les entiers dans la forme qui nous est familière. On observe ainsi que les 5 premiers axiomes de Zermelo-Fraenkel permettent de construire l'arithmétique : c'est pourquoi l'on dit que la théorie des ensembles Zermelo-Fraenkel est une théorie plus forte que l'arithmétique.

Axiome 6. — *Pour toute relation R de la théorie, et pour tout ensemble E, il existe un ensemble F ayant pour éléments les éléments de E satisfaisant R.*

Axiome 7. — *Pour tout ensemble E, il existe un ensemble $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les parties de E.*

Axiome 8. — *Pour tout ensemble E, il existe une application $f : \mathcal{P}(E) \to E$ ayant la propriété : pout tout $F \subset E$, $f(F) \in F$ (i.e. il y a une manière de choisir dans chaque partie F un élément : axiome du choix).*

Axiome 9. — *Aucun ensemble n'est élément de lui-même et de manière générale la relation $\in$ ne présente aucun cycle fini (axiome de fondation).*

Exercice 3. — Montrer que si E et F sont des ensembles, l'existence d'une injection $f : E \to F$ équivaut à l'existence d'une surjection $g : F \to E$.

Exercice 4. — Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. A quelle condition l'application $g : F \to \mathcal{P}(E)$ définie par $g(x) = f^{-1}(\{x\})$ est-elle injective ?

Exercice 5. — Il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles.

Exercice 6. — Si E est un ensemble, il n'y a pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. (Indication : si f était une surjection considérer la relation $R(x) = x \notin f(x)$).

Exercice 7. — Montrer que l'axiome du choix (axiome 8) est équivalent à l'axiome : Le produit d'une famille d'ensembles non vides est un ensemble non vide.

Exercice 8. — Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n, m) = 2^n(2m + 1)$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 9. — Soit (f_n) une suite d'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même; on définit une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $f(n) = f_n(n) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est différente de toutes les f_n. En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 10. — Montrer que l'intervalle de réels $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

L1 2000-2001 : Réels et espaces métriques

Exercice 11. — Montrer que si E et F sont des ensembles, l'existence d'une injection $f : E \to F$ et d'une injection $g : F \to E$ équivaut à l'existence d'une bijection entre E et F (Théorème de Cantor-Bernstein). Indications :

On note $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ l'application définie par $\varphi(P) = E \setminus g(F \setminus f(P))$.

a) Vérifier que φ est croissante pour l'inclusion.

b) Soit $\mathcal{P} = \{P \subset E \text{ t.q. } \varphi(P) \subset P\}$, on pose $A = \cap_{P \in \mathcal{P}} P$. Montrer que $\varphi(A) = A$.

c) A l'aide de A, de f et de g construire une bijection $f_1 : E \to F$.

Exercice 12. — Montrer que si E et F sont des ensembles, il existe ou une injection $f : E \to F$ ou une injection $g : F \to E$. (2ième partie du Théorème de Cantor-Bernstein).

Indications :

Si $U \subset E$ et $V \subset F$ et $f : U \to V$ est une application, on note $\Gamma(f) = \{(u, f(u)), u \in U\} \subset U \times V$ le *graphe* de f. Si f est bijective, on observe que $\Gamma(f^{-1}) = \Gamma(f)$.

Notons $\mathcal{P} = \{\Gamma(f), f : U \to V$, bijection entre $U \subset E$ et $V \subset F\} \subset \mathcal{P}(E \times F)$.

Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(E \times F)$ admet un élément maximal pour l'inclusion. En déduire le résultat.

Exercice 13. — Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On définit le sous-ensemble $A + B \subset \mathbb{R}$ de la façon suivante : $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 14. — Montrer que

a) Tout réel x est limite d'une suite de rationnels (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

b) Tout réel x est limite d'une suite d'irrationnels (pourra montrer pour commencer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

c) L'ensemble des irrationnels $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Exercice 15. — Si x et y sont deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $||.||$, on définit $d(x,y) = ||x-y||$ si x et y sont colinéaires et $d(x,y) = ||x|| + |y||$ s'ils ne le sont pas.

a) Montrer que d est une distance (appelée *distance SNCF* pourquoi ?).

b) Décrire géométriquement les boules $B(x,r)$ pour un $x \in \mathbb{R}^2$ et un $r \in \mathbb{R}$.

c) Est-ce que l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d)$ est isométrique au plan euclidien ?

Exercice 16. — A chaque couple (x,x') de réels positifs définis par leurs développements dyadiques propres (*i.e.* dont les chiffres se sont pas tous égaux à 1 à partir d'un certain rang), $x = \sum_{n \geq n_0} c_n 2^{-n}$, $x' = \sum_{n \geq n'_0} c'_n 2^{-n}$ on associe le nombre $d(x,x') = 2^{-N}$ où N désigne le plus petit entier tel que $c_n \neq c'_n$ si $x \neq x'$ et $d(x,x) = 0$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et comparer cette distance à la distance usuelle $|x - x'|$.

Exercice 17. — a) Quelque soient les réels positifs a, b, c vérifiant $c \leq a+b$, montrer que l'on a : $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} \geq \dfrac{c}{1+c}$

b) (E,d) désignant un espace métrique, montrer qu'on obtient une nouvelle distance δ sur E en posant $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

c) Montrer que les distances d et δ définissent la même topologie et les mêmes suites de Cauchy que la distance d.

L1 2000-2001 : Espaces métriques, espaces topologiques

Exercice 18. — Soit E un ensemble et d_1 et d_2 deux métriques sur E.

a) Montrer qu'on définit une nouvelle distance d sur E en posant : $d(x,y) = \sup(d_1(x,y), d_2(x,y))$.

b) Comparer les boules $B_i(x,r)$ dans les espaces (E, d_i) aux boules $B(x,r)$ dans l'espace (E,d).

c) Faire de même pour les bases de voisinages $\mathcal{V}_i(x)$ des espaces (E, d_i) et $\mathcal{V}(x)$ dans l'espace (E,d).

Exercice 19. — On se donne pour tout réel x la famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ $\Sigma_x = \{[x, a[, a > x\}$.

a) Montrer que Σ_x est une base de voisinages d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$. Le singleton $\{x\}$ est-il un voisinage pour cette topologie ?

b) Montrer que les ouverts usuels de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de E. Le singleton $\{x\}$ est-il un fermé ?

c) Les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$ sont elles convergentes dans E ?

d) L'espace topologique E est-il séparé ?

e) Montrer que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable (délicat, laissé en recherche libre, sera traité plus tard).

Exercice 20. — Pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés (ou ni l'un ni l'autre...) :

$$E = [1, 2[, \quad F = \{0\} \bigcup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \quad G = \{0\} \bigcup]1, 2[, \quad H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]0, 1 + \frac{1}{n}[$$

Exercice 21. — Soit E un espace topologique et A_i $i \in I$ une famille de parties de E. L'adhérence et l'intérieur d'une partie A étant notées respectivement $\overline{A}$ et $\mathrm{Int}\,(A)$, comparer :

a) $\overline{\cup_{i\in I} A_i}$ et $\cup_{i\in I} \overline{A_i}$; $\overline{\cap_{i\in I} A_i}$ et $\cap_{i\in I} \overline{A_i}$

b) $\mathrm{Int}\,(\cup_{i\in I} A_i)$ et $\cup_{i\in I} \mathrm{Int}\,(A_i)$; $\mathrm{Int}\,(\cap_{i\in I} A_i)$ et $\cap_{i\in I} \mathrm{Int}\,(A_i)$

(on pourra être amené à distinguer le cas où I est fini).

b) ${}^cA$ désignant le complémentaire de A, que peut-on dire de $\overline{{}^cA}$ et de ${}^c\overline{A}$?

Exercice 22. — Si A est une partie d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$, un point de A est *isolé* s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$. Les points adhérents *non isolés* dont appelés *points d'accumulation*, leur ensemble est noté A'.

On suppose que le singleton $\{x\}$ est fermé pour tout $x \in E$. Montrer que A et $\overline{A}$ ont les mêmes points d'accumulation et les mêmes points isolés. (on pourra éventuellement se contenter du cas où E est un espace métrique)

Preuve : Il est clair que l'on a $A' \subset (\overline{A})'$. Réciproquement, soit $x \in (\overline{A})' \iff \forall V$ ouvert $\in \mathcal{V}(x)$ on a : $(V \setminus \{x\}) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Choisissons $x' \in V \setminus \{x\} \cap \overline{A}$. Comme $E \setminus \{x\}$ est ouvert, $W = V \setminus \{x\}$ est un ouvert contenant x'. Comme $x' \in \overline{A}$, on a $W \cap A \neq \emptyset$ et donc $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$. D'où $(\overline{A})' \subset A'$.

Exercice 23. — Un espace topologique E est dit *de dimension topologique 0* si pour tout $x \in E$ et tout voisinage V de x, il existe un voisinage W de x qui soit ouvert et fermé avec $W \subset V$.

a) Montrer que tout espace topologique discret est de dimension topologique 0.

b) Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle est de dimension topologique 0.

c) Montrer plus généralement qu'un espace métrique dénombrable est de dimension topologique 0.

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Si la "sphère" $S(x, r) = \tilde{B}(x, r) \setminus B(x, r) \neq \emptyset$ pour tout r, $0 < r \leq \varepsilon$, on peu choisir (axiome du choix) $\varphi(r) \in S(x, r)$. Comme $d(x, \varphi(r)) = r$, l'application $\varphi :]0, \varepsilon] \to E$ est injective et donc E ne peut être dénombrable. Par conséquent, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe une boule ouverte $B(x, r) \subset V$ telle que $\tilde{B}(x, r) = B(x, r)$ et qui est donc aussi fermée.

Exercice 24. — Soit $(E,\mathcal{T})$ l'espace topologique produit de deux espaces topologiques $(E_1,\mathcal{T}_1)$ et $(E_2,\mathcal{T}_2)$. Montrer que si A est une partie de E_1 et B une partie de E_2, on a dans $(E,\mathcal{T})$ les relations :

a) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$,

b) $(A\times B)^\circ = A^\circ\times B^\circ$ $(A^\circ=\mathrm{Int}\,(A))$,

c) $\partial(A\times B)=(\partial A\times\overline{B})\bigcup(\overline{A}\times\partial B)$ (où $\partial(A)$ désigne la frontière de A c'est à dire $\partial(A)=\overline{A}\cap\overline{{}^cA}$).

L1 (Groupe 6) : Test 1 du 6/11/2000, 1h30 (maximum 2 copies doubles autorisées)

A (9pts)

Pour tous réels x et $r>0$ on note $V(x,r)=\{x\}\cup(]x-r,x+r[\cap\mathbb{Q})$. Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{V}(x)$ la famille de parties $\mathcal{V}(x)=\{V\subset\mathbb{R}|\exists r>0 \text{ t.q. } V(x,r)\subset V\}$.

1) Vérifier que les $\mathcal{V}(x)$ définissent les voisinages d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'un ouvert U de $(\mathbb{R},\mathcal{U}s)$ (topologie usuelle) est un ouvert de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$. En déduire :

a) Une fonction continue usuelle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{U}s)$.

b) L'espace $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ est séparé.

3) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un ouvert dense dans $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

4) On considère le fermé $\mathcal{J}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

a) Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ induite par $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{J}$ est discrète.

b) Montrer que les fermés $\{0\}$ et $\mathcal{J}$ se sont pas séparés par des ouverts, c'est-à-dire : pour tous U et V ouverts de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ tels que $0\in U$ et $\mathcal{J}\subset V$ on a $U\cap V\neq\emptyset$.

B (7pts)

Soit (E,d) un espace métrique et F une partie de E. On pose pour $x\in E$

$$d(x,F)=\inf_{z\in F} d(x,z).$$

1) Montrer que $|d(x,F)-d(y,F)|\leq d(x,y)$ si x et $y\in E$.

2) En déduire que la fonction $f(x)=d(x,F)$ est continue et :

$$F=f^{-1}(\{0\})\iff F \text{ est fermé dans } (E,d).$$

3) On suppose F fermé et $x_0\notin F$. A l'aide de f, définir deux ouverts U et V tels que $x_0\in U$, $F\subset V$ et $U\cap V=\emptyset$ (les ouverts U et V *séparent* $\{x_0\}$ et F).

4) Déduire de A)4) et B)3) que l'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ du A) n'est pas métrisable.

C (4pts)

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie ouverte de E et B une partie quelconque de E.

1) Montrer $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$.

2) Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

L1 (Groupe 6) : Corrigé du Test 1 du 6/11/2000

A (9pts)

1) V_1) $x \in V(x,r)\ \forall x, r > 0$ donc $x \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$

V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ on a un $r > 0$ avec $V(x,r) \subset V$ et donc si $V \subset W$ alors $V(x,r) \subset W$ $\Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$

V_3) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ on a $r_1, r_2 > 0$ tels que
$V(x, r_i) \subset V_i, i = 1,2 \Rightarrow V(x, \inf(r_1, r_2)) = V(x, r_1) \cap V(x, r_2) \subset V_1 \cap V_2$ qui appartient donc à $\mathcal{V}(x)$

V_4) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ on a un $r > 0$ avec $W = V(x,r) \subset V$ alors on vérifie que $\forall y \in \mathcal{V}(x,r)$, on a $V(y, r - |x-y|) \subset V(x,r)$ et donc $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

On observe que les voisinages $V(x,r)$ $(r > 0)$ sont des ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.

2) La boule usuelle $]x-r, x+r[$ de centre x et de rayon $r > 0$ contient $V(x,r)$ et donc tout voisinage usuel de x est un élément de $\mathcal{V}(x)$. Par conséquent, un ouvert U de $(\mathbb{R}, \mathcal{U}s)$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. On en déduit :

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction continue usuelle c'est-à-dire telle que pour tout ouvert usuel $U \in \mathcal{U}s$ on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}s$. On a donc pour tout $U \in \mathcal{U}s$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ c'est-à-dire f est continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{U}s)$.

b) Soient x et y réels tels que $\delta = |x-y| \neq 0$, les ouverts usuels $U =]x - \delta/2, x + \delta/2[$ et $V =]y - \delta/2, y + \delta/2[$ séparent x et y et sont aussi dans $\mathcal{T}$, ils séparent donc x et y dans l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ le voisinage ouvert $V(x,r) \in \mathcal{V}(x)$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q} \in \mathcal{T}$. Etant donné un $x \in \mathbb{R}$ quelconque et un $r > 0$, on a $V(x,r) \cap \mathbb{Q} =]x - r, x + r[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ à cause de la densité de $\mathbb{Q}$ pour la topologie usuelle. Donc pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, ce qui prouve la densité de $\mathbb{Q}$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

4) Soit $\mathcal{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels. C'est un fermé de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ comme complémentaire de l'ouvert $\mathbb{Q}$.

a) Pour tous $x \in \mathcal{J}$ et $r > 0$, le singleton $\{x\} = V(x,r) \cap \mathcal{J}$ est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ induite par $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{J}$. Donc la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ est discrète.

b) Un ouvert U contenant le fermé $\{0\}$ (les singletons sont fermés car ils le sont déjà dans $(\mathbb{R}, \mathcal{U}s)$) contient un $V(0,r)$ avec $r > 0$. Soit $x \in \mathcal{J}$ tel que $|x| < r$, alors $V(0,r) \cap V(x,r') \neq \emptyset$ pour tout $r' > 0$ et donc tout ouvert V contenant x rencontre $V(0,r)$ et donc U. Par conséquent, deux ouverts U et V de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ étant donnés tels que $0 \in U$ et $\mathcal{J} \subset V$ on a $U \cap V \neq \emptyset$.

B (7pts)

1) Soient x et $y \in E$. Grâce à l'inégalité triangulaire on a :
$d(x,F) = \inf_{z \in F} d(x,z) \leq \inf_{z \in F}(d(x,y) + d(y,z)) = d(x,y) + d(y,F)$ soit $d(x,F) \leq d(x,y) + d(y,F)$. De même, en échangeant x et de y, on a $d(y,F) \leq d(x,y) + d(x,F)$ ce qui donne

l'encadrement $-d(x,y) \leq d(x,F) - d(y,F) \leq d(x,y) \iff |d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y)$.

2) La fonction $f(x) = d(x,F)$ est continue : $\forall \varepsilon > 0,\ d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x,y) < \varepsilon$.

Si $F = f^{-1}(\{0\})$ alors F est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $(\mathbb{R}, Us)$ par f continue. Réciproquement, si F est fermé et $f(x) = d(x,F) = 0$, il existe alors une suite $y_n \in F$ telle que $\lim_{n\to\infty} d(x,y_n) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} y_n = x \Rightarrow x \in F$.

3) Soit F un fermé de (E,d) et $x_0 \notin F$. Alors, toujours en posant $f(x) = d(x,F)$, on a d'après 2) :
i) f continue ii) $F = f^{-1}(\{0\})$ et donc $f(x_0) > 0$. Les ouverts (car images réciproques d'ouverts par f continue) $U = f^{-1}(]f(x_0)/2, +\infty[)$ et $V = f^{-1}(]-\infty, f(x_0)/2[)$ sont tels que $x_0 \in U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$ (les ouverts U et V séparent $\{x_0\}$ et F).

4) D'après A)4), le fermé $\mathcal{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne peut être séparé du singleton $\{0\}$ et $0 \notin \mathcal{J}$, donc d'après B)3), la topologie de l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ du A) ne peut être celle d'un espace métrique.

C (4pts)

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie ouverte de E et B une partie quelconque de E.

1) Soit $x \in A \cap \overline{B}$, alors $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap B \neq \emptyset$ et comme A est ouvert et $x \in A$, on a $V \cap A \in \mathcal{V}(x)$ d'où $V \cap (A \cap B) = (V \cap A) \cap B \neq \emptyset$. Donc $x \in \overline{A \cap B}$ et on a bien $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2) Exemple où il n'y a pas égalité : $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{U}s$; on prend pour A l'intervalle ouvert $]0,1[$ et pour B l'intervalle fermé $[-1,2]$, on a : $A \cap \overline{B} =]0,1[$ et $\overline{A \cap B} = [0,1]$.

L1 2000-2001 : Connexité

Exercice 25. — Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si toute partie non vide et non pleine de E a une frontière non vide.

Exercice 26. — Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ telles que $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

1) Montrer que $A \cup B$ est connexe.

2) Donner un exemple où la conclusion est fausse si l'on suppose seulement que $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Exercice 27. — Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $(E, \mathcal{T})$ l'espace topologique produit.

a) Montrer l'équivalence : $(E, \mathcal{T})$connexe $\iff (E_1, \mathcal{T}_1), (E_2, \mathcal{T}_2)$connexes. On pourra utiliser les projections canoniques de $E_1 \times E_2$ sur E_k : $p_k : (x_1, x_2) \mapsto x_k$ pour $k = 1, 2$.

b) Soit $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Montrer que $C(x) = C_1(x_1) \times C_2(x_2)$, où l'on note $C(x)$ la composante connexe de x dans E, et $C_k(x_k)$ la composante connexe de x_k dans E_k pour $k = 1, 2$.

Exercice 28. — Soient A et C deux parties d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ On suppose que la partie C est connexe et qu'elle rencontre à la fois A et son complémentaire. Montrer alors que la partie C rencontre la frontière de A.

Exercice 29. — Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si $(E, \mathcal{T})$ n'a qu'une seule composante connexe.

Exercice 30. — Soit f une application continue d'un espace métrique $(E, \mathcal{T})$ dans un espace métrique discret (D, δ). Montrer que la restriction de f à chaque composante connexe est constante.

Exercice 31. — Déterminer les composantes connexes de l'ensemble de Cantor.

Exercice 32. — Montrer que dans un espace métrique (E, d) connexe non borné, toute sphère est non vide.

Exercice 33. — Soit (E, d) un espace métrique connexe dans lequel toute boule ouverte est connexe (c'est le cas dans un espace vectoriel normé). Montrer que les composantes connexes de tout ouvert de (E, d) sont ouvertes dans (E, d).

Connexité par arc et connexité

On rappelle que la connexité par arc entraîne la connexité.

Exercice 34. — Montrer que l'image d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Exercice 35. — Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que la sphère unité est connexe. En déduire que toute sphère est connexe.

Exercice 36. — Soient A et B deux parties non pleines de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}^2 \backslash (A \times B)$ est connexe.

Compacité et connexité

Exercice 37. — Soit (E, d) un espace métrique tel que pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, la boule fermée $\tilde{B}(x, r)$ soit compacte et égale à l'adhérence de la boule ouverte $B(x, r)$. Montrer que les boules fermées sont connexes. En déduire que les boules ouvertes et l'espace (E, d) sont connexes.

Indication : on montre par l'absurde que la boule fermée $\tilde{B}(a, r)$ est connexe. Supposons que l'on puisse écrire $\tilde{B}(x, r)$ comme réunion de deux fermés F_1 et F_2 de $B'(a, r)$ non vides et disjoints. Le point a appartient à un seul des deux fermés, par exemple à F_1. On montre l'existence d'un point $b \in F_2$ tel que que $d(a, b) = d(a, F_2)$, et on regarde les boules de rayon $d(a, b)$ centrées en a...

Exercice 38. — Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non vides. Montrer que leur intersection K est compacte connexe non vide. Montrer que le résultat devient faux si l'on remplace "compact" par "fermé".

Indication : on pourra montrer que K est bien enchaîné, en montrant que pour tout $\epsilon > 0$, l'un des compacts K_n est inclus dans l'ouvert $V(K, \epsilon) = \{x \in E : d(x, K) < \epsilon\}$.

L1 2000-2001 : Compacité

Exercice 39. — Soit f une application continue d'un espace métrique compact (X, d) dans lui-même.

1) Montrer qu'il existe un compact non vide $K \subset X$ tel que $f(K) = K$ [Indication : considérer $(f^n(X))_{n\in\mathbf{N}}$].

2) On suppose que f est contractante, c'est à dire : $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$. Que peut-on dire du diamètre de K ? En déduire l'existence d'un point fixe pour f.

Corrigé : 1) Posons $X_n = (f^n(X))_{n\in\mathbf{N}}$. L'application f^n est continue comme composée d'applications continues, donc l'ensemble X_n image du compact X par une application continue est compact donc fermé dans X. De plus, comme $f(X) \subset X$, on a $X_{n+1} = f^n(f(X)) \subset f^n(X) = X_n$, c'est-à-dire que les X_n forment une suite de fermés emboités (de manière décroissante). Comme X est compact et que chaque $X_n \neq \emptyset$, $K = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ est un compact non vide.

Montrons maintenant que $f(K) = K$. On a d'abord de manière générale, pour toute famille d'ensemble A_i, $i \in I$, $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$. Ce qui assure que $f(K) = f(\cap_{n=1}^{\infty} X_n) \subset \cap_{n=1}^{\infty} f(X_n) = \cap_{n=2}^{\infty} X_n = K$ (la dernière égalité venant du fait que X_n est décroissante).

Il reste à montrer que $K \subset f(K)$. Dire que $y \in \cap_{n=2}^{\infty} X_n = K$ équivaut à $\forall\, n > 1, \exists x_n \in X_n,\ f(x_n) = y$. Comme X est compact, on peut extraire une suite x_{n_k} convergente dont on appelle x la limite. Par continuité de f, on a alors $f(x) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = y$ et comme les X_n sont emboités et fermés, on a $x_{n_k} \in X_n$ si $n_k \geq n$ et donc $x \in X_n,\ \ \forall n \iff x \in \cap_{n=1}^{\infty} X_n = K$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(K)$.

2) Prenons donc un compact $K \neq \emptyset$ tel que $f(K) = K$. Posons $D = \operatorname{diam}(K)$. Comme K est compact, il y a deux points $a, b \in K$ tels que $d(a, b) = D$. Soit alors $\alpha, \beta \in K$ tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. Si $a \neq b$ alors $\alpha \neq \beta$ et donc, puisque f est dilatante, $D = d(a, b) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$ ce qui contredit la définition du diamètre D. Donc forcément $D = 0$ ce qui signifie que K est réduit à un point x_0 qui est fixe par f. Ce point fixe est unique car s'il y en avait un autre y_0, on aurait $d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) < d(x_0, y_0)$, ce qui est impossible.

Exercice 40. — Montrer que dans un espace métrique compact, toute suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 41. — Soit $E = l^{\infty} = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, u_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n| < \infty\}$ l'espace des suites bornées de réels muni de la norme sup $||(u_n)||_{\infty} = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$ et $d(x, y) = ||x - y||_{\infty}$ la distance associée.

Montrer que dans (E, d) la boule fermée $\tilde{B}(0, 1)$ n'est pas compacte en considérant la suite $x_n \in E$ où pour n fixé x_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le nième qui vaut 1.

Exercice 42. — Soit E un espace topologique. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout recouvrement dénombrable de E par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini.

ii) Toute suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fermés non vides de E telle que $\forall n \geq 1, \quad F_{n+1} \subset F_n$ a une intersection non vide.

iii) Toute suite (x_n) dans E admet une valeur d'adhérence (c'est-à-dire un élément $x \in E$ tel que tout voisinage de x contient des x_n pour une infinité de valeurs de n).

N.B : Il est démontré en Cours que si E est un espace métrique, la propriété iii) implique la propriété de Borel-Lebesgue :

iv) E Pour tout recouvrement de E par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini.

Donc pour les espaces métriques, les quatre propriétés i), ii), iii), iv), sont toutes équivalentes à la compacité de E.

Exercice 43. — Montrer que dans un espace métrique, l'ensemble formé par les termes d'une suite convergente et la limite de cette suite, est compact.

Exercice 44. — Soit (E, d) un espace métrique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts. On appelle *nombre de Lebesgue* du recouvrement $\mathcal{U}$ tout réel $\alpha \geq 0$ ayant la propriété : toute partie de E de diamètre $< \alpha$ est contenue dans un des ouverts de la famille $\mathcal{U}$.

a) Soit $E = \cup_{n \geq 1}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[$ (sous espace métrique de $\mathbb{R}$ usuel) et $\mathcal{U} = (]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[)_{\ n \in \mathbb{N}^*}$. Quel est *nombre de Lebesgue* du recouvrement $\mathcal{U}$?

b) Même question pour $E = \cup_{n \geq 2}]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}[$ et $\mathcal{U} = (]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}[)_{\ n \geq 2}$.

c) Montrer que tout espace métrique compact E a la propriété :

(L) Tout recouvrement ouvert de E admet un nombre de Lebesgue > 0.

Exercice 45. — On se donne dans $\mathbb{R}^2$ une ellipse E sous forme paramétrique (E pourrait être, pour les résultats à démontrer ici, n'importe quelle courbe différentiable périodique)$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (2\cos t, 3 \sin t) \in \mathbb{R}^2$.

a) Donner deux preuves du fait que E est compact.

b) Montrer que parmi tous les triangles ABC inscrits dans C (*i.e.* les sommets A,B,C sont sur E), il y en a (au moins) un L de périmètre maximum.

c) Montrer qu'en chaque sommet de L, la bissectrice de l'angle intérieur correspondant est normale à E (les côtés de L peuvent être vus comme les trajectoires de rayons lumineux se réfléchissant sur la courbe E).

Exercice 46. — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels de degré > 0. Montrer que $g(x) = |P(x)|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 47. — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes de degré > 0. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = |P(z)|$.

a) Montrer que $\lim_{|z| \to \infty} g(z) = \infty$.

b) Montrer que $g(z)$ admet un minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

c) Vérifier que $P(z_0) = 0$ (écrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + b_k h^k + \cdots + b_n h^n$).

Quel théorème avez-vous démontré ?

L1 2000-2001 : Ensemble triadique de Cantor, Courbe de Peano,Compacts

Ensemble triadique de Cantor. — C'est l'ensemble $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}, \ c_n \in \{0, 2\} \right\}$. Autrement dit, l'ensemble C est constitué des nombres de $[0, 1]$ dont le développement triadique (*i.e.* en base 3) ne comporte que les chiffres 0 ou 2. Cet ensemble a des propriétés topologiques inhabituelles et permet de construire une courbe continue qui a la propriété surprenante de passer par tous les points du carré! (courbe de Peano)

Propriété 1. — *L'ensemble C a la puissance du continu (i.e. est en bijection avec $\mathbb{R}$).*

Soit $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs $0, 1$. On sait que S peut être vu comme l'ensemble des fonctions indicatrices des parties de $\mathbb{N}$ et donc S est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ lui-même en bijection avec $\mathbb{R}$.

L'application $\varphi : S \to C$ définie par $\varphi((u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2u_n 3^{-n}$ est manifestement surjective. Montrer qu'elle est injective revient à vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 3^{-n} = 0$ où $\varepsilon_n = -1, 0$ ou 1 conduit à $\varepsilon_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le vérifier). Donc φ établit une bijection entre S et C.

Propriété 2. — *L'ensemble C est fermé (donc compact car $C \subset [0,1]$ qui est compact).*

Soit $C_N = \left\{ \sum_{n=1}^{N} c_n 3^{-n} + t3^{-N},\ c_n \in \{0,2\}, t \in [0,1] \right\}$. Il est évident que $C \subset C_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et on vérifie que $C = \cap_{N\in\mathbb{N}} C_N$ (le vérifier).

Comme l'on peut aussi écrire : $C_N = \bigcup_{c_1,\ldots,c_N \in\{0,2\}} \left[\sum_{n=1}^{N} c_n 3^{-n}, \sum_{n=1}^{N} c_n 3^{-n} + 3^{-N} \right]$, on voit que C_N est une réunion de N intervalles fermés donc C_N est fermé pour tout N. On en déduit que C est fermé comme intersection (dénombrable) de fermés et donc C est compact comme fermé dans le compact $[0,1]$.

Propriété 3. — *L'ensemble C est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.*

Soit $J =]a,b[$ un intervalle ouvert de longueur $|a-b| > 0$. Soit alors un entier $N > 0$ tel que $|a-b| > 1/3^N$. Comme C_N est réunion d'intervalles disjoints de longueur $1/3^N$ (faire un dessin de C_1, C_2, C_3 pour bien le voir dans ces cas), C_N ne peut contenir J et donc C (qui est plus petit) non plus. Donc C ne contient aucun intervalle ouvert non vide ce qui revient à dire que l'intérieur de C est vide.

Courbe de Peano. — Notons $I = [0,1]$ et $f : C \to I \times I$ l'application de l'ensemble de Cantor dans le carré $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ définie par : $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} 2^{-(n+2)}\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} 2^{-(n+1)}\right)$.

a) Montrer que f est continue et surjective.

b) En utilisant que ${}^cC = \cup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[$ (réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints), montrer que f peut être prolongée en une application continue surjective $g : I \to I \times I$ (courbe de Peano).

Institut Fourier (Grenoble I) Licence L1 2000-2001

Devoir surveillé du 12 Décembre 2000

Durée : 2h. Aucun document autorisé.

Les parties A,B,C du problème sont indépendantes.

Dans ce problème, on dira qu'un espace métrique (E,d) *vérifie la propriété (M)* si pour tout $(x,y) \in E \times E$, il existe un *unique* $z \in E$ tel que $d(x,z) = d(z,y) = \dfrac{1}{2} d(x,y)$.
On notera alors $z = \mu(x,y)$ l'unique point à mi-distance (le "milieu") entre x et y.

-A-

1) On considère les cas où $E \subset \mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$:

i) $E = [0,1[\cup[2,3]$; ii) $E = [0,1]$; iii) $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Dire (en le justifiant brièvement) dans chaque cas si (E,d) est

a) compact ? connexe ?

b) vérifie la propriété (M) ? (on admettra que $(\mathbb{R}, d)$ vérifie la propriété (M))

2) Donner un exemple d'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle d_2 qui soit compact et vérifie (M) sans être inclus dans une droite (on admettra que $(\mathbb{R}^2, d_2)$ vérifie la propriété (M)).

-B-

Dans cette partie, on considère (E,d) un espace métrique <u>compact</u> vérifiant (M).

1) Soit A et B deux fermés de E non vides et disjoints.

a) Dire pourquoi $d(A,B) = \inf\{d(x,y), (x,y) \in A \times B\}$ est $\neq 0$.

b) Montrer qu'il existe $z \in E$ tel que $d(z,A) = d(z,B) = \dfrac{1}{2}d(A,B)$.

2) <u>En déduire</u> que E est connexe.

3) Montrer que l'application $\mu : E \times E \to E$ qui à (x,y) associe $\mu(x,y)$ l'unique point à mi-distance entre x et y est continue [Indication : on considèrera une suite $(x_n, y_n) \in E \times E$ convergeant vers $(x,y) \in E \times E$].

Dans la suite, on dira qu'un espace métrique (E,d) *vérifie la propriété (S) (du "segment")* si pour tout $(x,y) \in E \times E$ avec $d(x,y) = \delta$, il existe une *unique* application $\gamma : [0,1] \to E$ telle que :

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y \quad \text{et} \quad d(\gamma(s), \gamma(t)) = \delta|s-t|, \quad \forall\, s,t \in [0,1].$$

-C-

Dans cette partie, on considère un espace métrique (E,d) vérifiant (S).

1) Est-ce que l'espace (E,d) est connexe par arcs ? est-il connexe ?

2) Soit $x \in E$ et $r > 0$.

a) Montrer que la boule ouverte $B(x,r)$ est connexe par arcs.

b) Prouver que $\overline{B(x,r)} = \tilde{B}(x,r)$

3) Montrer que (E,d) vérifie (M) [Indication : pour l'unicité, on pourra montrer que s'il existe deux points distincts à mi-distance entre x et y, il y aurait deux applications distinctes γ_1 et γ_2 telles que $\gamma_i(0) = x, \quad \gamma_i(1) = y \quad$ et $\quad d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) = \delta|s-t|$].

-D-(hors barème)

On suppose dans cette partie que (E,d) est un espace métrique <u>complet</u> vérifiant (M). Le but de ce qui suit est de prouver qu'alors (E,d) vérifie (S).

Si $n \in \mathbb{N}$, on notera D_n et D les sous-ensembles de $[0,1]$ suivants :
$D_n = \{\frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^n\}$ et $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \{\frac{k}{2^n},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $x, y \in E$. On pose $d(x,y) = \delta$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique application $\gamma_n : D_n \to E$ telle que :

$$\gamma_n(0) = x,\ \gamma_n(1) = y \ \text{ et } \ d(\gamma_n(s), \gamma_n(t)) = \delta|s-t|, \quad \forall\, s,t \in D_n.$$

2) Que peut-on dire de l'adhérence $\overline{D}$ dans $[0,1]$? En déduire qu'il existe une application $\gamma : [0,1] \to E$ telle que :

$$\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \ \text{ et } \ d(\gamma(s), \gamma(t)) = \delta|s-t|, \quad \forall\, s,t \in [0,1].$$

3) Prouver l'unicité de l'application γ trouvée. Conclure.

-o-o-o-o-o-

L1 2000-2001 : Espaces topologiques, Continuité

Définitions :

- On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts d'un espace topologique E est une *base d'ouverts* si pour tout $x \in E$, les ouverts de $\mathcal{B}$ qui contiennent x forment un système fondamental de voisinages de x.
- On dit qu'un espace topologique E est *séparable* s'il admet une partie dense dénombrable. (Attention : cela n'a rien à voir avec la propriété d' être *séparé*!)

Exercice 48. — Montrer que dans un espace topologique E, dont la topologie est définie par les voisinages, une partie V de E est un voisinage de $x \in E \Leftrightarrow V$ contient un ouvert contenant x. L'ensemble des ouverts est noté $\mathcal{T}$ et appelé la *topologie*.

Corrigé : Preuve de $\Rightarrow$, l'autre sens est évident : Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ et posons $U = \{y | V \in \mathcal{V}(y)\}$ l'ensemble des y dont V est un voisinage. On a $x \in U \subset V$, il suffit de montrer que U est un ouvert. Pour $y \in U$ donné, appliquons à $V \in \mathcal{V}(y)$ l'axiome V_4 : $\exists W \in \mathcal{V}(y)$ t.q. $\forall z \in W$ on a $V \in \mathcal{V}(z) \iff z \in U$ et donc $W \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$ et donc U est voisinage de tous ses points : par définition U est un ouvert. CQFD

Exercice 49. — 1) Montrer qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts d'un espace topologique E est une base d'ouverts $\Leftrightarrow$ tout ouvert de E est une réunion d'ouverts appartenant à la famille $\mathcal{B}$.

2) Considérons les deux propriétés suivantes pour un espace topologique E :

i) E admet une base dénombrable d'ouverts; ii) E est séparable.

Montrer que pour un espace topologique quelconque : i)$\Rightarrow$ ii) et pour un espace métrique (E, d) : i) $\iff$ ii).

Corrigé : 1) ($\Rightarrow$) : Soit U un ouvert et pour chaque $x \in U$ on choisit (axiome du choix) $B_x \in \mathcal{B}$ avec $B_x \subset U$. Il est clair que l'on a alors $\cup_{x \in U} B_x = U$. ($\Leftarrow$) : Soit $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(x)$; d'après l'exercice 1, il existe $U \subset V$ ouvert avec $x \in U$. On écrit alors $U = \cup_{i \in I} B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$ sont des ouverts. Comme $x \in U$, on a : $x \in B_{i_0}$ pour un $i_0 \in I$ et donc $B_{i_0} \in \mathcal{B}_x$ et $B_{i_0} \subset U \subset V$.

2) i)$\Rightarrow$ ii) : Soit $\mathcal{B} = \{O_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable d'ouverts. Choisissons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un $x_n \in \mathbb{N}$ (axiome du choix) et soit $\Delta = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que l'ensemble dénombrable Δ est dense : pour tout $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $O_n \subset V$ et donc $x_n \in V$ de sorte que $V \cap \Delta \neq \emptyset$.

On suppose que la topologie de E est définie par une métrique d. Montrons alors ii)$\Rightarrow$ i). Soit $\Delta = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable dense dans E. Considérons l'ensemble dénombrable d'ouverts
$\mathcal{B} = \{B(x_n, 1/m), n, m \in \mathbb{N}\}$. C'est une base d'ouverts, en effet : soit $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, par définition des voisinages dans un espace métrique, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r) \subset V$ et comme Δ est dense, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $d(x_n, x) < r/2$. Choisissant $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/m < r/2$, on a : $B(x_n, 1/m) \subset B(x_n, r/2) \subset B(x, r)$ grâce à l'inégalité triangulaire et donc $B(x_n, 1/m) \subset V$. Chaque voisinage de x contient un voisinage de x appartenant à $\mathcal{B}$ qui est donc bien une base d'ouverts.

Exercice 50. — On considère l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ (topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$) où $\Sigma_x = \{[x, a[, a \in \mathbb{R}, x < a\}$ (vu dans un exercice précédent).

a) L'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est-il séparable ?

b) Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la propriété i) de l'exercice 2 (et que plus précisément, toute base d'ouverts a au moins la puissance du continu), et en déduire que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable.

Corrigé : a) Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $a > x$ avec $[x, a[\subset V$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle $]x, a[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et donc $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

b) Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts pour $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le voisinage $[x, x+1[$ de x contient au moins un $U \in \mathcal{B}$. De plus ce U est un voisinage de x donc il existe $a > x$ avec $[x, a[\subset U$ et donc $\inf U = x$.

Considérons l'application $\varphi : U \in \mathcal{B} \mapsto \inf U \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. D'après ce qui vient d'être fait, l'image $\varphi(\mathcal{B})$ contient $\mathbb{R}$ qui n'est pas dénombrable, donc $\mathcal{B}$ n'est pas dénombrable. Par conséquent, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ satisfait ii) mais pas i) donc la topologie $\mathcal{T}$ n'est pas celle d'un espace métrique.

Exercice 51. — Soit l^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $||x|| = \sup_{n \in N} |x_n|$. Montrer que cet espace métrique n'est pas séparable, en considérant l'ensemble A des suites dont tous les termes valent 0 ou 1. (On rappelle que A n'est pas dénombrable).

Corrigé : On considère donc l'espace $E = l^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \text{ et } \sup_{n \in N} |x_n| < \infty\}$ muni de la distance $d((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in N} |x_n - y_n|$. Soit $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \{0, 1\}\} \subset E$, on a si $x, y \in A$ et $x \neq y$ alors $d(x, y) = 1$ (autrement dit la distance induite par d sur A est la distance discrète).

Montrons qu'un ensemble Δ dense dans E ne peut être dénombrable. La densité de Δ assure en particulier que $E = \cup_{u \in \Delta} B(u, 1/2)$ et donc, pour chaque $x \in A$, on peut choisir (axiome du choix) $\varphi(x) \in \Delta$ avec $x \in B(\varphi(x), 1/2)$. L'application $\varphi : A \to \Delta$ ainsi définie est injective car pour x et $y \in A$ avec $\varphi(x) = \varphi(y)$ on a x et $y \in B(\varphi(x), 1/2) \Rightarrow d(x, y) < 1 \Rightarrow x = y$. Comme A n'est pas dénombrable, Δ ne l'est pas non plus et donc (E, d) n'est pas séparable.

Exercice 52. — Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Soit A une partie de E. On considère l'application f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in E \backslash A$. Montrer que f est continue si et seulement si A une partie à la fois ouverte et fermée de $(E, \mathcal{T})$.

2. En déduire qu'il y a équivalence entre :

(i) $\emptyset$ et E sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $(E, \mathcal{T})$,

(ii) toute application continue de $(E, \mathcal{T})$ dans $\{0\ ; 1\}$ est constante.

Remarque : un espace topologique vérifiant ces propriétés est dit **connexe**, ce qui signifie intuitivement d'un seul tenant.

Exercice 53. — Soient A et B deux fermés non vides et disjoints d'un espace métrique (E, d).

Montrer que la formule $f(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}$ définit une application continue de (E, d) dans $\mathbb{R}$, valant 1 sur A et 0 sur B. (On rappelle que $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \text{ t.q. } y \in A\}$ est la distance du point x à A)

Exercice 54. — Soit f une application d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ dans un espace topologique $(E', \mathcal{T}')$. Soit A une partie de E. On désigne par $\mathcal{T}_A$ la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A (comment est elle définie?).

1. Ecrire les définitions de "f est continue sur A" et de "la restriction $f|_A$ de f à A est continue". En déduire que si f est continue sur A, alors sa restriction $f|_A$ est continue de $(A, \mathcal{T}_A)$ dans $(E', \mathcal{T}')$.

2. Montrer que si $f|_A$ est continue de $(A, \mathcal{T}_A)$ dans $(E', \mathcal{T}')$, alors f est continue sur **l'intérieur de** A, mais pas forcément sur A tout entier.

3. Montrer que f est continue si et seulement si les restrictions de f à $\overline{A}$ et à $\overline{E \backslash A}$ sont continues.

Exercice 55. — Soit f une application continue d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute partie A de E, $\sup\{f(x) \ : x \in A\} = \sup\{f(x) \ : x \in \overline{A}\}$.

L1 2000-2001 : Espaces Vectoriels Normés. Normes de formes linéaires.

Exercice 56. — Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. On note S la sphère unité et $B = \tilde{B}(0,1)$.

a) On considère un sous-espace vectoriel F de dimension finie, strictement inclus dans E, on fixe $a \in E \backslash F$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $d(a,b) = d(a,F)$. En déduire qu'il existe $x \in S$ tel que $d(x,F) = 1$.

b) On suppose que E est de dimension infinie. A l'aide de la question précédente, montrer que l'on peut construire une suite (x_n) d'éléments de S telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d(x_{n+1}, Vect\{x_0 \ , \cdots, x_n\}) = 1$. En déduire que S et B ne sont pas compactes.

Exercice 57. — Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

a) Vérifier que $(E, ||.||_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

Soient $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $L : E \to E$ l'application définie par $L(f)(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,t) f(t) dt$.

b) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $||L(f) - L(g)||_\infty \leq k ||f - g||_\infty$ pour tous $f, g \in E$.

c) Montrer qu'il existe un entier $p > 0$ tel que l'application L^p (L composée p fois) soit contractante.

d) En déduire qu'il existe $f \in E$ unique solution à l'équation fonctionnelle $f(x) = \int_0^x K(x,t) f(t) dt$.

Exercice 58. — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E possédant un supplémentaire dans E qui est une droite vectorielle (autrement dit, on peut trouver un vecteur a non nul tel que $E = H \oplus \mathbf{R}a$).

a) Soient H un hyperplan de E et a vecteur non nul tel que $E = H \oplus \mathbf{R}a$. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un seul réel λ tel que $x - \lambda a \in H$. On note $\phi(x)$ ce réel. Montrer que l'application ϕ ainsi définie est une forme linéaire sur E, et déterminer $\phi(a)$ et $Ker(\phi)$.

b) Réciproquement, soit ψ une forme linéaire non nulle sur E. Fixons $b \in E$ tel que $\psi(b) \neq 0$. Montrer que $E = Ker(\psi) \oplus \mathbf{R}b$ et en déduire que $Ker(\psi)$ est un hyperplan.

Conséquence : tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle et inversement.

c) On reprend les notations de la question *a*. Si ψ est une forme linéaire sur E telle que $Ker(\psi) \supset H$, montrer que $\psi = \psi(a)\phi$ et $\psi(a) \in \mathbf{R}$.

Conséquence : deux formes linéaires de E ayant même noyau sont proportionnelles.

d) Soit H un hyperplan de E. Montrer que pour tout $b \in E \backslash H$, $E = H \oplus \mathbf{R}b$.

Exercice 59. — (suite du précédent) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

a) Soit ψ une forme linéaire non nulle continue sur $(E, ||.||)$. Montrer que l'hyperplan $H = Ker(\psi)$ est fermé. Montrer que pour tout $x \in E$, $|\psi(x)| = |||\psi|||d(x, H)$.

Indications : lorsque $x \in E \backslash H$, utiliser le fait que $E = H \oplus \mathbf{R}x$ pour montrer que $|||\psi|||$ est égale à $\sup\{|\psi(x-y)|/||x-y|| \,; y \in H\}$ puis montrer que cette dernière quantité n'est autre que $|\psi(x)|/d(x, H)$.

b) On garde les notations de la question *a*. On fixe un vecteur a tel que $\psi(a) \neq 0$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) il existe $b \in H$ tel que $d(a, b) = d(a, H)$;

(2) il existe un vecteur x non nul tel que $|\psi(x)| = |||\psi||| \times ||x||$.

c) Soient H un hyperplan fermé de E et $a \in E \backslash H$. D'après l'exercice 3 question *d*, on a $E = H \oplus \mathbf{R}a$. Montrer que la forme linéaire ϕ définie à la question *a* de l'exercice 3 est continue sur $(E, ||.||)$.

Conséquence : tout hyperplan fermé de $(E, ||.||)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle continue et inversement.

d) Soit ψ une forme linéaire non nulle et non continue sur $(E, ||.||)$. Montrer que l'hyperplan $H = Ker(\psi)$ est dense dans $(E, ||.||)$.

Conséquence : tout hyperplan fermé de $(E, ||.||)$ est soit fermé, soit dense dans $(E, ||.||)$, suivant que c'est le noyau d'une forme linéaire continue ou non.

Exercice 60. — Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||h|| = \sup_{x \in [0,1]} |h(x)|$ de la convergence uniforme. On rappelle que E est un espace de Banach.

Soit $g \in E$ fixé et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$

1)a) Montrer que φ est une forme linéaire continue.

b) Déterminer la norme $|||\varphi|||$ si g est une fonction positive.

c) Déterminer la norme $|||\varphi|||$ si g est la fonction $x - 1/2$.

2) On note e_n la fonction monôme $e_n(x) = x^n$ en restriction à $[0,1]$. Et on suppose que g est telle que $\varphi(e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\varphi = 0$ [Indication : on considèrera l'espace $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \varphi$ et on montrera grâce à un théorème du cours que $\mathcal{K} = E$].

b) En déduire que $g = 0$.

L1 2000-2001 : Espaces de Hilbert et Révisions

Exercice 61. — On désigne par l^∞ l'espace vectoriel réel des suites bornées à termes réels, muni de la norme défini comme suit : si $x = (x_n) \in l^\infty$, $||x|| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$. Pourquoi

l^∞ est-il un Banach ? On note c le sous-espace des suites convergentes et c_0 celui des suites convergeant vers 0.

1) Montrer que c et c_0 sont fermés dans l^∞ (donc des Banach).

Pour $x \in l^\infty$, on pose $\varphi(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} x_n$.

2) Montrer que φ est une forme linéaire continue.

3) La borne supérieure dans la définition $|||\varphi||| = \sup_{||x||=1} |\varphi(x)|$ est-elle atteinte ?

4) Mêmes questions pour la restriction ψ de φ à c_0.

Exercice 62. — Soit H un espace de Hilbert et $\varphi : H \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) une forme linéaire continue.

1) En utilisant le théorème de Riesz, montrer que la borne supérieure dans la définition $|||\varphi||| = \sup_{||x||=1} |\varphi(x)|$ est atteinte.

2) En déduire que l'espace l^∞ considéré dans l'exercice précédent n'est pas un espace de Hilbert.

3) Retrouver ce résultat en montrant que dans l^∞ le théorème de projection n'est pas vérifié.

Exercice 63. — Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un système orthonormé dénombrable. Montrer que $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas une base de H [Indication : considérer (par exemple) la série $\sum_0^\infty 2^{-n} e_n$].

En déduire qu'un espace de Hilbert H ne peut avoir une base dénombrable (résultat démontré dans le cas plus général des Banach en utilisant le théorème de Baire).

Exercice 64. — On désigne par $E = l^2$ l'espace vectoriel complexe des suites de carré du module sommable, muni de la norme défini comme suit : si $x = (x_n) \in l^2$, $||x||_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2$. C'est un Hilbert (cours).

Soit $u, v : E \to E$ définies comme suit si $x = (x_n) \in E$: $u(x) = (x_n/n)$ et $v(x) = (x_{n+1})$.

1) Montrer que $u, v \in \mathcal{L}(E, E)$ et déterminer $|||u|||$ et $|||v|||$.

2) Montrer que v est surjective mais non injective.

3) Montrer que dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, E)$, l'opérateur u est limite d'opérateurs de rang fini (u est donc compact d'après le problème de l'examen fait en DM).

Exercice 65. — Est-ce que la suite de fonctions $\cos(n + x)_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue ? Caractériser ses suites extraites convergentes.

Exercice 66. — Soit $\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \text{Support}(f) \text{ compact}\}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact (on rappelle que le support de f est ainsi défini : $\text{Support}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$).

1) Montrer que $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ est bien défini pour $f \in \mathcal{K}$.

2) Montrer que $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel réel et $||.||_\infty$ une norme sur $\mathcal{K}$ (la norme de la convergence uniforme).

A tout $f \in \mathcal{K}$, on associe la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$

3)a) Montrer que $f_n \in \mathcal{K}$ pour tout n.

3)b) Montrer que $||f_n - f||_\infty \to 0$.

4) Soit $T_n : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ défini par $T_n(f) = f_n$.

Montrer que chaque T_n est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{K})$ et déterminer la norme $|||T_n|||$.

5) $I \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{K})$ étant l'application identité de $\mathcal{K}$, montrer que T_n ne tend pas vers I [Indication : si $||f||_\infty = 1$, on remarque que $|||I - T_n||| \geq |f(0) - f_n(0)|$ en choisissant f convenablement, voir que $|||I - T_n||| \geq 1$].

6) L'espace $\mathcal{K}$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | f \to 0 \text{ en } \pm\infty\}$ (espace des fonctions continues nulles à l'infini). En déduire que $\mathcal{K}$ n'est pas un Banach.

L1 (Groupe 6) : Test 2 du 8/01/01, 2h (maximum 2 copies doubles autorisées)

-I-

Soit (E,δ) un espace métrique compact et une application $f : (E,\delta) \to (E,\delta)$ continue et *dilatante*, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \delta(f(x), f(y)) \geq \delta(x,y) \qquad (*)$$

Soit A une partie *fermée* non vide de E telle que $f(A) \subset A$.

Soit $x \in A$ et (x_n) la suite des itérés de x par f, c'est-à-dire la suite définie par les conditions $x_0 = x$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout $n > 0$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \neq q$ tels que $\delta(x_p, x_q) < \varepsilon$.

2) En déduire que $\delta(x, f(A)) = 0$ puis que $f(A) = A$.

3) En déduire que f est surjective. Est-ce-que cette conclusion serait encore vraie si on ne supposait pas (E,δ) compact ?

-II-

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ de la convergence uniforme. On rappelle que E est un espace de Banach. Etant donné $f, g \in E$, on note fg la fonction produit de f et de g.

Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, on dit que φ est *multiplicative* si $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tout f et g de E.

A

Pour $x_0 \in [0,1]$, on définit l'application $\delta_{x_0} : E \to \mathbb{R}$ "évaluation en x_0" par $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$.

1) Montrer que δ_{x_0} est une forme linéaire continue.

2) Déterminer la norme $|||\delta_{x_0}|||$.

3) Vérifier que δ_{x_0} est multiplicative.

B

On considère dans cette partie $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle, continue et multiplicative. L'objectif est de montrer que $\varphi = \delta_{x_0}$ pour un certain $x_0 \in [0,1]$.

Le noyau de φ est noté

$$\mathcal{K} = \{f \in E \mid \varphi(f) = 0\}.$$

On note pour chaque $f \in E$, $\quad Z(f) = f^{-1}(0)$ (le lieu des zéros de f) et pour chaque partie F de E :

$$Z(F) = \bigcap_{f \in F} Z(f).$$

1) Montrer que $\varphi(\mathbf{1}) = 1$. ($\mathbf{1}$ désigne la fonction constante sur $[0,1]$ égale à 1).

2) Montrer que si $f \in E$ est telle que $Z(f) = \emptyset$, alors $f \notin \mathcal{K}$ (on considérera l'inverse g de f défini par $g(x) = 1/f(x)$).

3) Montrer que si $F = \{f_1, \cdots, f_n\}$ est une partie finie de $\mathcal{K}$, alors $Z(F) \neq \emptyset$. (On pourra considérer $g = f_1^2 + \cdots + f_n^2$).

4) En déduire par un argument de compacité que $Z(\mathcal{K}) \neq \emptyset$.

Soit x_0 un élément de $Z(\mathcal{K})$ (qui existe d'après le résultat de la question précédente). Autrement dit, x_0 est un élément de $[0,1]$ tel que pour tout $f \in E$, si $\varphi(f) = 0$ alors $f(x_0) = 0$.

5) Montrer que

$$E = \mathcal{K} \oplus \mathbb{R}\mathbf{1}$$

où $\mathbb{R}\mathbf{1}$ désigne l'espace des fonctions constantes sur $[0,1]$.

6) En déduire que $\varphi = \delta_{x_0}$.