Examen du 4 janvier 2017

4 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite.

* *
*

I. Exercice

1. (Question de cours) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe.

   Soient G un groupe, g et h deux éléments d'ordre fini (a et b). On notera la loi de G multiplicativement.
2. (Question de cours) On suppose que g et h commutent.
   (a) Montrer que ordre(gh) divise ppcm(a, b).
   (b) A-t-on toujours ordre$(gh) =$ ppcm(a, b) ? (on pourra considérer $g = h = i \in \mathbf{C}$).
3. On suppose toujours que g et h commutent et que les sous-groupes engendrés par g et h ont une intersection triviale : $< g > \cap < h >= \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.
   (a) Montrer que $(gh)^n = e$ implique $g^n = e$ et $h^n = e$.
   (b) Quel est l'ordre de gh ?
4. (a) Dans cette question g et h sont quelconques.
   Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors $< g > \cap < h >= \{e\}$.
   (b) Montrer que tout groupe commutatif d'ordre 77 est cyclique (on pourra considérer les ordres possibles des éléments de G et appliquer les questions précédentes).

* *
*

II. Exercice

Soit K un corps.

1. (Question de cours). Soit I un idéal non nul de $K[X]$.
   (a) Montrer que l'ensemble
   $$\{\deg(P);\ P \in I \text{ et } P \neq 0\}$$
   admet un plus petit élément, noté d, et qu'il existe $P \in I$ tel que $\deg(P) = d$.
   (b) Soit $Q \in I$. En effectuant la division euclidienne de Q par P, montrer que $Q \in (P)$.
   (c) Montrer que I est un ideal principal. En déduire que $K[X]$ est anneau principal.

On souhaite démontrer la réciproque, à savoir

Si $A[X]$ est un est anneau principal alors A est un corps.

2. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. On considère l'idéal $I = (a, X)$. Supposons que I est principal, et soit $P \in I$ un générateur.
   (a) Montrer qu'il existe $U, V \in A[X]$ tels que $a = U \cdot P$ et $X = V \cdot P$.
   (b) En utilisant le degré des polynômes, montrer que P est une constante inversible.
   (c) En déduire que $1 \in I$.
   (d) Conclure.

* *
*

III. Exercice

Soient A un anneau et I un ensemble.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(I, A)$ des fonctions de I dans A est un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles des fonctions (on explicitera l'élément neutre pour l'addition et la multiplication).
2. On suppose que I est un espace métrique et $A = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur I (noté $\mathscr{C}(I, A)$) forme un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, A)$.
3. Pour $x \in I$, on pose $\mathrm{ev}_x : \mathcal{F}(I, A) \to A$, définie par $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ avec $f \in \mathcal{F}(I, A)$. Montrer que c'est un morphisme d'anneaux (appelé morphisme d'évaluation en x).

On suppose maintenant que $A = I = \mathbf{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble $I_{x_0} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R});\ f(x_0) = 0\}$ est un idéal de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Montrer que le quotient $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})/I_{x_0}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ (on pourra calculer le noyau et l'image du morphisme $\mathrm{ev}_{x_0} : \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$). En déduire que I_{x_0} est maximal.
3. I_{x_0} est-il principal ? (on pourra supposer que $I_{x_0} = (f)$ et considérer la fonction $\sqrt{|f|} \in I_{x_0}$).

* *
*

IV. Exercice

Soient $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\beta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ deux permutations de S_7. On se propose de déterminer l'ordre $|G|$ du groupe G, engendré par α et β. Pour cela on considère l'action de G sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et on pose

$$G_1 = \{\tau \in G;\ \tau(1) = 1\} \qquad \text{et} \qquad X_1 = \{\tau(1);\ \tau \in G\}.$$

1. Montrer que G agit transitivement sur X (c'est-à-dire $X_1 = X$).
2. Expliciter les éléments $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$ de G (on pourra les écrire sous forme de produits de cycles à supports disjoints).

   On pose (on fera bien attention aux indices utilisés) :

   $$G_2 = \{\tau \in G_1;\ \tau(2) = 2\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{\tau(2);\ \tau \in G_1\}$$
   $$G_3 = \{\tau \in G_2;\ \tau(3) = 3\} \quad \text{et} \quad X_3 = \{\tau(3);\ \tau \in G_2\}$$

3. Vérifier que $\beta, \delta \in G_2$. En déduire que ou bien $X_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ ou bien $X_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
4. Vérifier que $\beta, \gamma, \delta \in G_1$. En déduire que ou bien $X_2 = \{2, 7\}$ ou bien $X_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5. Si E est une partie de X et $\tau \in G$ on notera $\tau \cdot E = \{\tau(x);\ x \in E\}$. Soit $\mathcal{O} = \{\tau \cdot \{1, 2, 7\};\ \tau \in G\}$.
   (a) (question difficile) Montrer que $\mathcal{O} = \{\{1, 2, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$.
   (b) On voit que si $x \neq 7$ alors $\{1, 2, x\} \notin \mathcal{O}$.
   En déduire que 7 est fixé par tous les éléments de G_2 puis que $7 \notin X_3$.
   (c) Soit $\tau \in G_3$ (donc τ fixe $1, 2, 3, 7$). Montrer que $\tau \cdot \{1, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$ et $\tau \cdot \{5, 6, 7\} = \{5, 6, 7\}$.
   En déduire que $\tau = \mathrm{Id}$.
6. En utilisant la formule des classes, établir $|G| = |G_1||X_1|$, $|G_1| = |G_2||X_2|$ et $|G_2| = |G_3||X_3|$.
7. Déduire des questions précédentes $|G_2| = 4$ puis $|G| = 28|X_2|$.
8. Quel est l'ordre de α ? En déduire que 3 divise $|G|$.
9. Conclure que $|G| = 168$.

* *
*

V. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \qquad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Calculer $A - (m-1)\mathrm{Id}$. En déduire que $m-1$ est une valeur propre de A. On précisera la multiplicité.
2. On écrit $\chi_A = (X - m + 1)^4(X - \alpha)$ le polynôme caractéristique de A (avec $\alpha \in \mathbf{R}$).
   En développant, donner le terme devant X^4 en fonction de α.
   En déduire la valeur de α (on pourra utiliser la trace).
3. Quel est le polynôme minimal de A ? A est-elle diagonalisable ?
4. Donner les valeurs de m pour lesquelles A est inversible.
   Quelle est la matrice inverse de A lorsqu'elle existe ? (on ne fera pas de calculs).