

**Mathématiques MAT 432**  
**Analyse de Fourier et théorie spectrale**

**Feuille d'exercices numéro 4 - 23 septembre 2002**  
**Transformation de Fourier et convolution**

**Convolution et transformation de Fourier dans  $L^1_{loc}$  et dans  $L^1$**

**Exercice 1.** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. Montrer l'existence et calculer la convolée  $(e^{\alpha x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x)) \star (e^{\beta x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x))$

**Exercice 2.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  bornées et de dérivées bornées. On suppose que  $f$  et  $g'$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f \star g$  est bien définie et qu'elle est de classe  $C^2$ .

**Exercice 3.** Montrer que la convolée de deux fonctions radiales de  $L^1(\mathbb{R}^N)$  est encore radiale.

**Exercice 4.** En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'y a pas d'unité pour le produit de convolution dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ .

**Exercice 5.** Soient  $a, b > 0$ . Soit  $h_a(x) = \frac{2a}{x^2+a^2}$ . En utilisant le calcul de  $\mathcal{F}(h_a)$ , calculer la convolée  $h_a \star h_b$  et la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(h_a h_b)$ .

**Exercice 6.** Pour  $a > 0$ , on note  $f_a(x) = e^{-x} x^{a-1} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(x)$ .

a) Montrer que, pour  $a > 0$ ,  $f_a$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

b) On pose  $\Gamma(a) = \|f_a\|_1$  et  $g_a = \Gamma(a)^{-1} f_a$ . Calculer  $\hat{g}_1$ .

c) Pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , on note  $B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$ . Démontrer la relation  $g_a \star g_b = \frac{B(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} g_{a+b}$ .

Retrouver la formule des compléments  $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$  et en déduire  $g_a \star g_b = g_{a+b}$ .

d) Calculer  $\hat{g}_a$  pour  $a > 0$  (*Indication : on commencera par le cas où  $a$  est rationnel.*)

**Exercice 7. Espace de Schwartz et formule sommatoire de Poisson**

L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}$  est l'espace des fonctions  $f$  (dites à décroissance rapide) de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $n$  et  $p$  entiers positifs, l'on ait  $x^n f^{(p)}(x)$  tend vers 0 lorsque  $|x|$  tend vers  $+\infty$ .

a) Montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par dérivation et par multiplication par une fonction polynomiale,

b) Montrer que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$  et que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans lui-même;

c) Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$  est convergente et que sa somme  $\theta(x)$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et  $2\pi$  périodique. Démontrer la formule de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

## Transformation de Fourier dans $L^2$

**Exercice 8.** Calculer les transformées de Fourier des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$x^{-1} \sin x \quad \text{et} \quad (x+i)^{-1}.$$

**Exercice 9.** Montrer que la transformée de Fourier de la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 10.** Soit  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$  une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , c'est à dire une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f$  et toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus vite que toutes les fonctions  $(1 + x^2 + y^2)^{-k}$  avec  $k > 0$ . Montrer l'inégalité:  $2 \|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\|_2 \leq \|(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) f\|_2$ .

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . On note, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $f_x$  la fonction translatée :  $y \rightarrow f_x(y) := f(y - x)$ . Montrer que l'espace vectoriel  $V := \text{Vect}(\{f_x / x \in \mathbb{R}^N\})$  engendré par les translattées de  $f$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  si et seulement si l'ensemble  $\{\xi \in \mathbb{R}^N / \hat{f}(\xi) = 0\}$  est de mesure nulle.  
*Indication: étudier l'orthogonal dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  de  $\mathcal{F}(V)$ .*

## Convolution dans $L^2$

**Exercice 12.** On veut étendre la formule  $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \hat{f} \star \hat{g}$  pour  $f, g$  dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  avec  $\hat{f}, \hat{g}$  dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  au cas où  $f, g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

1) Soit  $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) / \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}$ . Montrer que  $V$  est inclus dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  et que  $V$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

2) En déduire l'égalité  $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-N} \hat{f} \star \hat{g}$  pour  $f, g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

**Exercice 13.** Résoudre dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$  puis dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , l'équation  $u \star u = u$ .

**Exercice 14.** Soient  $A, B$  deux parties de  $\mathbb{R}^N$  de mesure non nulle. Montrer que l'ensemble  $A + B := \{a + b / a \in A, b \in B\}$  contient un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$ .

*Indication : On supposera que les mesures de  $A$  et  $B$  sont finies et on montrera que la fonction  $\mathbf{1}_A \star \mathbf{1}_B$  est continue.*

**Exercice 15.** Pour tout  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on note  $Pf(x) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin y}{y} dy$ .

a) Montrer que la fonction  $Pf$  est bien définie et est continue.

b) Montrer, à l'aide des exercices 8 et 12, que  $Pf$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$  et calculer, pour  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}^{-1} \circ P \circ \mathcal{F}(g)$ .

c) En déduire que  $Pf$  est de classe  $C^\infty$ , que  $\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2$  et que  $P \circ P = P$ .