

**Mathématiques MAT 432**  
**Analyse de Fourier et théorie spectrale**

**Feuille d'exercices numéro 3 - 9 et 16 septembre 2005**  
**Séries de Fourier et transformation de Fourier dans  $L^1$**

**Exercice 1. Développements en demi-période**

- (i) Soit  $L > 0$ . Montrer que les fonctions  $\varphi_p(t) = \cos(\frac{p\pi}{L}t)$  forment un système total de  $L^2(0, L)$   
(ii) Soit  $L > 0$ . Montrer que les fonctions  $\varphi_p(t) = \sin(\frac{p\pi}{L}t)$  forment un système total de  $L^2(0, L)$   
(iii) Calculer les coefficients  $a_n$  tels que  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$  dans  $L^2(0, \pi)$ . En déduire que

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

**Exercice 2. Développements en quart de période**

- (i) Soit  $L > 0$ . Montrer que les fonctions  $\varphi_p(t) = \cos(\frac{(2p+1)\pi}{2L}t)$  forment un système total de  $L^2(0, L)$ . Pour  $f \in L^2(0, L)$ , on considérera la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(t); & \text{pour } 0 < t < L \\ -f(2L-t); & \text{pour } L < t < 2L \\ g(-t); & \text{pour } -2L < t < 0. \end{cases}$$

- (ii) Soit  $L > 0$ . Montrer que les fonctions  $\varphi_p(t) = \sin(\frac{(2p+1)\pi}{2L}t)$  forment un système total de  $L^2(0, L)$ . Pour  $f \in L^2(0, L)$ , on considérera la fonction

$$g(t) = \begin{cases} f(t); & \text{pour } 0 < t < L \\ f(2L-t); & \text{pour } L < t < 2L \\ -g(-t); & \text{pour } -2L < t < 0. \end{cases}$$

**Exercice 3. Décroissance des coefficients de Fourier**

- i) Montrer que pour toute fonction  $f \in L^1(0, 2\pi)$ , on a la relation

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n(f) = 0,$$

où  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$ .

- ii) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique. Montrer que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} n^k c_n(f) = 0.$$

- iii) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[0, 2\pi]$  mais telle que  $f(2\pi) \neq f(0)$ . Montrer qu'alors  $c_k(f) = 0(\frac{1}{k})$ . Estimer le reste de la série de Fourier (en norme  $L^2$ ).

- iv) Faire les mêmes calculs que dans les deux questions précédentes, mais en considérant les coefficients de  $f$  sur la base en cosinus,  $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\frac{kx}{2}) f(x) dx$ .

- v) Faire les mêmes calculs pour les coefficients de Fourier  $c_{k,l}$  d'une "image", c'est-à-dire une fonction  $f(x, y)$  définie sur un carré  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , de classe  $C^2$  et dont la  $(2\pi \times 2\pi)$ -périodisée a des discontinuités sur le bord du carré. En déduire pourquoi la technologie actuelle préfère la "transformée en cosinus" pour coder les images de télévision.

**Exercice 4. Convolution dans l'espace des fonctions périodiques**

- i) On note  $E$  l'espace des fonctions sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  qui sont  $2\pi$ -périodiques et intégrables sur  $[-\pi, \pi]$ . On munit  $E$  de la norme  $\|f\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ . Pour  $f \in E$  et  $g \in E$ , et  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $f *_{S^1} g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$ . Montrer que  $f *_{S^1} g$  ainsi définie appartient à  $E$ .

- ii) On appelle polynôme trigonométrique toute expression de la forme  $P(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikt}$ , où les  $a_k$  sont des nombres complexes. Montrer que pour  $f \in E$  la fonction  $f *_{S^1} P$  est un polynôme trigonométrique.

- iii) Démontrer que si  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ , alors  $f *_{S^1} g$  est bornée et  $c_n(f *_{S^1} g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$ .

- iv) En déduire que la série de Fourier de  $f *_{S^1} g$  est uniformément convergente.

- v) Montrer que  $f *_{S^1} g$  est continue et en déduire que c'est la somme de sa série de Fourier.

**Exercice 5.** Soient  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

Calculer les transformées de Fourier des fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  suivantes:

$$\frac{1}{2a} \mathbf{1}_{[c-a, c+a]}(x), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad e^{-a|x|}, \quad |x|e^{-a|x|}, \quad \frac{2a}{x^2 + a^2}.$$

**Exercice 6.** Calculer les transformées de Fourier des fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^2)$ :

$$e^{-(x^2+2y^2)}, \quad e^{-(x^2+y^2+xy)} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{1}{2}({}^t X A X)},$$

où  $A$  est une matrice symétrique définie positive, et  $X$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 7.** Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 8.** Rappelons que les polynômes d'Hermite  $H_n$  sont définis par la relation  $(\frac{d}{dx})^n (e^{-x^2}) = (-1)^n H_n e^{-x^2}$  et satisfont les relations  $H_0 = 1$  et  $H_{n+1} = (-\frac{d}{dx} + 2x)H_n$ . Les fonctions d'Hermite  $\psi_n$  sont définies par  $\psi_n = c_n H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$  où  $c_n = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$ . a) Montrer que, pour  $n \geq 0$ , on a  $(\frac{d}{dx} + x)\psi_0 = 0$ ,  $(-\frac{d}{dx} + x)\psi_n = \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}$ .

b) En déduire les égalités  $\widehat{\psi}_n = (-i)^n \sqrt{2\pi} \psi_n$ .

c) Montrer que les  $\psi_n, n \geq 0$  forment un système orthonormal dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour calculer  $(\psi_p | \psi_q)$ , on pourra intégrer par parties  $p$  (ou  $q$ ) fois.

d) Soit  $g$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . On pose, pour  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}} g(x) dx.$$

Montrer que la fonction  $G$  est une fonction holomorphe de la variable  $\zeta$  et calculer  $(\frac{d}{d\zeta})^k G(0)$ .

e) En déduire que la famille  $\psi_n, n \geq 0$  est une base de  $L^2(\mathbb{R})$ .