

**Mathématiques MAT 432**  
**Analyse de Fourier et théorie spectrale**

**Feuille d'exercices numéro 2 - 2 septembre 2002**  
**Fonctions holomorphes, logarithme complexe, formule des**  
**résidus**

**Exercice 1.** Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx.$$

Indication : on pourra traiter d'abord le cas  $t > 0$ , en utilisant le contour de la section 1.6.2.

**Exercice 2.** Calculer pour  $a > 0$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + \sin^2 x}$$

Méthode : en remarquant que l'intégrand est pair, transformer d'abord en une intégrale sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , puis par changement de variable en une intégrale sur  $[-\pi, \pi]$ . Pour finir, faire apparaître une fraction rationnelle de  $z = e^{ix}$  et utiliser la formule des résidus.

**Exercice 3.** Calculer par la formule des résidus

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx.$$

**Exercice 4.**

- i) (Exercice 1.6.7) Calculer l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  par la méthode des résidus.
- ii) Vérifier que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$  converge et la calculer.

**Exercice 5.** Calculer si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^n} dx.$$

(Adapter la méthode 1.8.7)

**Exercice 6.** Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)} dx.$$

**Exercice 7.** Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ . Quels sont les pôles et les résidus de  $z^p \frac{f'(z)}{f(z)}$  pour  $p = 0, 1, \dots$ ? Soit  $\gamma$  le bord orienté d'un disque  $D(a, r)$ . On suppose que le disque fermé  $\overline{D}(a, r)$  est contenu dans  $\Omega$  et que  $f$  n'a pas de zéros sur  $\gamma$ .

i) Montrer que  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  est égal au nombre de zéros de  $f$  dans  $D(a, r)$ , chacun compté avec sa multiplicité. Retrouver le théorème de d'Alembert.

ii) Calculer  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^p \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ .

iii) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions holomorphes dans  $\Omega$ . On suppose que  $(f_n)$  converge vers  $f$ , uniformément sur tout compact. On suppose que les  $f_n$  ne s'annulent pas. Montrer en utilisant i) que si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors  $f$  ne s'annule pas dans  $\Omega$ .

**Exercice 8.**

i) Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\mathbf{C}$  privé d'un nombre fini de points, de sorte que  $z^{-2} f(z^{-1})$  est holomorphe dans un voisinage pointé de 0. Montrer que

$$\text{Res}_0(z^{-2} f(z^{-1})) = \sum_{a \in \mathbf{C}} \text{Res}_a f(z)$$

ii) Vérifier cette formule pour la fonction  $\cos(1 + 1/z)$ .

**Exercice 9.**

i) Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un disque pointé  $D \setminus c$  de centre  $c$ . En utilisant le développement de Laurent de  $f$ , montrer que le résidu  $\text{Res}(f; c)$  est l'unique nombre complexe  $a$  tel que la fonction  $f(z) - \frac{a}{z-c}$  admette une primitive holomorphe dans le disque pointé.

ii) En déduire la règle de composition des résidus suivante :

Soient  $\Omega, \tilde{\Omega}$  des ouverts de  $\mathbf{C}$ ,  $c \in \Omega$ ,  $\tilde{c} \in \tilde{\Omega}$  et  $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  une application holomorphe telle que  $g(c) = \tilde{c}$  et  $g'(c) \neq 0$ . Pour toute fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus c$  on a

$$\text{Res}(f; c) = \text{Res}((f \circ g)g'; \tilde{c})$$

Cette formule montre que la notion de résidu est invariante si on l'applique aux formes différentielles  $f(z)dz$  plutôt qu'aux fonctions.

---