Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 2 - 2 septembre 2005
Fonctions holomorphes, logarithme complexe, formule des résidus

Exercice 1. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx.$$
Indication : on pourra traiter d'abord le cas $t > 0$, en utilisant le contour de la section 1.6.2.

Exercice 2. Calculer pour $a > 0$.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$$
Méthode : en remarquant que l'intégrand est pair, transformer d'abord en une intégrale sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, puis par changement de variable en une intégrale sur $[-\pi, \pi]$. Pour finir, faire apparaître une fraction rationnelle de $z = e^{ix}$ et utiliser la formule des résidus.

Exercice 3. Calculer par la formule des résidus
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx.$$

Exercice 4.
i) (Exercice 1.6.7) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ par la méthode des résidus.
ii) Vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}dx$ converge et la calculer.

Exercice 5. Soit $\ell(z)$ la détermination principale du logarithme. Déterminer les pôles et les résidus correpondants de la fonction
$$f(z) = \frac{\ell(z)}{z^2+1}.$$

Exercice 6. Calculer si n est un entier supérieur ou égal à 2, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^n} dx.$$

(Adapter la méthode 1.8.7)

Exercice 7. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)} dx.$$

Exercice 8. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Quels sont les pôles et les résidus de $z^p \frac{f'(z)}{f(z)}$ pour $p = 0, 1, ...$? Soit γ le bord orienté d'un disque $D(a, r)$. On suppose que le disque fermé $\overline{D}(a, r)$ est contenu dans Ω et que f n'a pas de zéros sur γ.
i) Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est égal au nombre de zéros de f dans $D(a, r)$, chacun compté avec sa multiplicité. En déduire qu'un polynôme P a $degP$ racines.
ii) Calculer $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^p \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$
iii) Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω. On suppose que (f_n) converge vers f , uniformément sur tout compact. On suppose que les f_n ne s'annulent pas. Montrer en utilisant i) que si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne s'annule pas dans Ω.

Exercice 9.

i) Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}$ privé d'un nombre fini de points, de sorte que $z^{-2} f(z^{-1})$ est holomorphe dans un voisinage pointé de 0. Montrer que

$$Res_0(z^{-2} f(z^{-1})) = \sum_{a \in \mathbf{C}} Res_a f(z)$$

ii) Vérifier cette formule pour la fonction $\cos(1 + 1/z)$.

Exercice 10.
i)Soit f une fonction holomorphe dans un disque pointé $D \setminus c$ de centre c . En utilisant le développement de Laurent de f, montrer que le résidu $\mathrm{Res}(f\ ; c)$ est l'unique nombre complexe a tel que la fonction $f(z) - \frac{a}{z-c}$ admette une primitive holomorphe dans le disque pointé.
ii) En déduire la règle de composition des résidus suivante :

Soient $\Omega, \tilde{\Omega}$ des ouverts de $\mathbf{C}$, $c \in \Omega$, $\tilde{c} \in \tilde{\Omega}$ et $g\ : \tilde{\Omega} \to \Omega$ une application holomorphe telle que $g(\tilde{c}) = c$ et $g'(\tilde{c}) \neq 0$. Pour toute fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus c$ on a

$$\mathrm{Res}(f\ ; c) = \mathrm{Res}((f \circ g)g'; \tilde{c}).$$

Cette formule montre que la notion de résidu est invariante si on l'applique aux formes differentielles $f(z)dz$ plutôt qu'aux fonctions.