Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

Feuille d'exercices numéro 1 - 26 août - 2 septembre 2005
Fonctions holomorphes.

Exercice 1. Soit $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$ et $c \in D$. On pose $f_c(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$. Montrer que la fonction f_c est définie et holomorphe dans D, que c'est une bijection de D sur D et calculer son inverse (Indication : Calculer $1-|f(z)|^2$).
Exercice 2. On introduit les opérateurs $\partial f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\overline{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$.
(i) Montrer que le système de Cauchy-Riemann s'écrit $\overline{\partial} f = 0$.
(ii) Montrer qu'une fonction holomorphe de module constant dans un ouvert connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$ est elle même constante, en écrivant $\overline{f(z)} = C/f(z)$.

Exercice 3.
i) Soient f et g holomorphes dans un ouvert de $\mathbf{C}$. On rappelle que leurs dérivées f' et g' sont holomorphes elles-aussi. Etablir la relation

$$\overline{\partial} \circ \partial(f\overline{g}) = f'\overline{g}'.$$

ii) Soient $f_1, \ldots, f_n$ holomorphes dans un ouvert connexe par arcs , telles que $\sum |f_j|^2$ soit constant. Montrer que chaque fonction f_j est constante.

Exercice 4. Pour $a, b \in \mathbf{R}$ soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ défini par $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$. Calculer $\int_\gamma |z|^2 dz$.

Exercice 5.
i) Soient a, b deux nombres strictement positifs, γ_1 le segment d'extrémités $(a, 0)$ et (a, b), γ_2 celui d'extrémités $(-a, b)$ et $(-a, 0)$. Montrer que les intégrales $\int_{\gamma_1} e^{-z^2/2} dz$ et $\int_{\gamma_2} e^{-z^2/2} dz$ tendent vers 0 lorsque $a \to \infty$.
ii) Montrer que la fonction $e^{-z^2/2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.
iii) Soit P le rectangle de sommets $(a, 0)$, (a, b), $(-a, b)$, $(-a, 0)$, γ le bord orienté de P. Que vaut l'intégrale $\int_\gamma e^{-z^2/2} dz$? Indication : Corollaire 1.3.3.
iv) Déduire de ce qui précède la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-u^2/2}$$

Exercice 6. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.
i) En utilisant la formule de Cauchy, calculer

$$I(R) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

où $|a| \leq |b| < R$, $a \neq b$ et $\gamma =: \{z \in \mathbf{C}, |z| = R\}$.
ii) On suppose que f est bornée sur $\mathbf{C}$. Montrer que $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$. En déduire que f est constante. C'est le théorème de Liouville, dont l'exercice 1.4.13 donne une autre démonstration.
iii)A l'aide du théorème de Liouville, démontrer le théorème de d'Alembert (1.4.15).

Exercice 7.
i) *La formule de Cauchy implique l'holomorphie*
Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\bar{D}(z_0, r) \subset \mathbf{C}$ et telle qu'on ait, pour tout z dans le disque ouvert,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

en notant γ le cercle orienté de centre z_0 et de rayon r. Montrer que f est holomorphe dans le disque ouvert. Indication : dériver sous l'intégrale.
ii) *convergence uniforme sur tout compact*
Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Montrer que f est holomorphe dans Ω.
Indication : Passer à la limite dans la formule intégrale de Cauchy, théorème 1.4.1.
iii) Qu'en est-il pour les suites de fonctions dérivables dans un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{R}^2$?

Exercice 8. *Principe du maximum du module*
Soit f fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que Ω contient le disque fermé de centre z_0 et de rayon r
(i) Montrer que f vérifie la propriété de la moyenne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

(ii) Montrer que si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante dans un voisinage de z_0 (indication : étudier le signe de $\int_0^{2\pi}(|f(z_0 + re^{i\theta})| - |f(z_0)|)d\theta$ et en déduire que $|f|$ est constant au voisinage de z_0).
(iii) Si Ω est connexe par arcs, en déduire que f est en fait constante sur Ω tout entier.

Exercice 9. Soit f une fonction à valeurs complexes, continue sur le disque fermé $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(z_0, r)$. Montrer que $\max_{z\in\overline{D}} |f(z)|$ est atteint sur le bord de D.

Exercice 10. *Lemme de Schwarz*[1]. Soit f une fonction holomorphe sur $D = D(0,1)$. Supposons que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour $z \in D$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. On appliquera le principe du maximum à $\frac{f(z)}{z}$.

Exercice 11. *Caractérisation des bijections bi-holomorphes du disque dans lui-même : une application du Lemme de Schwarz* . On se propose de montrer que toute bijection f de $D = D(0,1)$ dans D holomorphe ainsi que son inverse est l'une des fonctions homographiques $f(z) = f_{-c}(\lambda z) = \frac{\lambda z + c}{1+\bar{c}\lambda z}$, où $c \in D$ et $|\lambda| = 1$.
i) On suppose tout d'abord que $f(0) = 0$.
Montrer que $|f'(0)| = 1$, en utilisant le Lemme de Schwarz et la bijectivité de f .
Montrer ensuite en utilisant le principe du maximum que $f(z) = \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$.
ii) Si $f(0) \neq 0$, se ramener au cas précédent, en utilisant les fonctions f_c introduites dans l'exercice 1.

Les deux exercices qui suivent sont des applications de la formule intégrale pour les dérivées, (théorème 1.4.3)

Exercice 12. Soient $a, b \in \mathbf{C}$, $|a| < 1 < |b|$, et m, n deux entiers positifs. Calculer
$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n}.$$

Exercice 13.
i) Soit f une fonction continue sur $\overline{D}(a, r)$ et holomorphe dans $D(a, r)$. Etablir, pour tout n, la majoration
$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{\sup |f|}{r^n}.$$

ii) Montrer que si une suite (f_k) de fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction f, alors la suite des dérivées f'_k converge vers f' uniformément sur les compacts de Ω.

Exercice 14. On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est harmonique si elle est de classe C^2 et si $\Delta f = 0$, en notant $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

[1] Hermann Amandus Schwarz , 1843-1921, mathématicien allemand qui succéda en 1892 à Weierstrass à Berlin

l'opérateur appelé *Laplacien.* On suppose $n = 2$.
i) Montrer que $\Delta f = 4\partial \circ \overline{\partial} f = 4\overline{\partial} \circ \partial f$ pour toute fonction f de classe C^2. En déduire que toute fonction holomorphe est harmonique en tant que fonction de deux variables réelles, ainsi que ses parties réelles et imaginaires (D'après le corollaire 1.4.5, toute fonction holomorphe est de classe C^2 et même de classe C^∞).
ii) On suppose que Ω est un un ouvert étoilé autour de 0. On veut montrer que, réciproquement, toute fonction harmonique $P(x, y)$ à valeurs réelles définie sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe. (C'est encore vrai si Ω est un ouvert simplement connexe). Soit (x, y) un point de Ω et γ le segment joignant $(0, 0)$ à (x, y). On dÈfinit la forme différentielle ω par $\omega = -\partial P/\partial y dx + \partial P/\partial x dy$. On pose $Q(x, y) = \int_\gamma \omega$. Montrer que la fonction $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ est holomorphe sur Ω et conclure.

Exercice 15. *Propriété de la moyenne et principe du maximum*
i) Soit Ω un ouvert contenant le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.
Montrer que toute fonction harmonique $u : \Omega \to \mathbf{R}$ a la propriété de la moyenne

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

iii) Soit $u : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un ouvert de $\mathbf{C}$. $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que u a la propriété de la moyenne et atteint son maximum en un point z_0 de Ω.
Montrer que u est constante dans tout disque fermé de centre z_0 contenu dans Ω.
En déduire que si Ω est connexe par arcs la fonction u est constante dans Ω. On pourra admettre le résultat suivant : Soit $z \in \Omega$. Il existe une suite finie de disques fermés $D(z_j, r)$, $0 \leq j \leq n$, avec $z_n = z$, qui soient tous contenus dans Ω , et tels que $z_j \in D(z_{j-1}, r)$. [Cela se démontre en introduisant un chemin γ contenu dans Ω allant de z_0 à z, et en utilisant la *continuité uniforme* de ce chemin.]