Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale

lundi 22 septembre 2003 – durée 1 heure

Exercice 1. Soit $a > 0$ un nombre réel donné. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-i)(x-ia)}\, dx.$$

Exercice 2. On considère $z^{\frac{5}{2}}$ définie à partir de la détermination principale $\ell(z)$ du logarithme ($z^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}\ell(z)}$). On définit la fonction

$$f(z) = \frac{z^{\frac{5}{2}}}{z^2+1}$$

sur $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} | z \leq 0\}$. Déterminer ses pôles et ses résidus. On donnera les résidus sous la forme $\rho e^{i\theta}$.

Exercice 3. Calculer les coefficients a_n tels que

$$\cos(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin(nx) \quad \text{dans} \quad L^2(0, \pi).$$

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\cdot$$