RAPPELS

DEF. – H Hilbert, $A : H \to H$

spectre de A $= \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda$ non bijectif$\}$

spec. ponctuel de A $= \{$des valeurs propres$\}$ $= \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda$ non injectif$\}$

ens. résolvant $= \mathbb{C} \setminus \{$spectre$\}$

REM. – L'ensemble résolvant est ouvert.

Opérateurs autoadjoints compacts

DEF.
A **est compact** $\Leftrightarrow$ **l'image par** A **de la boule unité est relativement compacte.**

TH. – A **autoadjoint compact,** H **de dimension infinie,**

1. **Spectre**$(A) = \{0\} \bigcup \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \quad \lambda_j > 0$.
2. **Si** $\{\lambda_j\}$ **infinie,** $\lambda_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $\forall \lambda_j$, **dim(espace propre de** λ_j**)**$< +\infty$.

Fonctions propres du Laplacien avec condition de Dirichlet

Il existe :

- **une base hilbertienne** (Φ_j)**,** $j = 1, 2, \ldots$ **de** $L^2(\Omega)$**,**
- **une suite** (λ_j) **de nombres réels t.q.**

$$\Phi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})\,; \qquad \Phi_j(x) = 0 \text{ **pour** } x \in \partial\Omega\,.$$

$$\Delta \Phi_j = -\lambda_j \Phi_j\,.$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \ldots\,; \qquad \lambda_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

REM. – **Pour une combinaison linéaire,**

$$u = \sum_1^N \gamma_j \Phi_j$$

- u **est de classe** C^∞ **et est nulle sur** $\partial\Omega$**.**
- $\|u\|_2^2 = \sum_1^N |\gamma_j|^2$
- $\Delta u = -\sum_1^N \lambda_j \gamma_j \Phi_j$
- $\|\Delta u\|_2^2 = \sum_1^N |\lambda_j \gamma_j|^2$

TH. & DEF. (opérateur Δ_{dir})

$u \in L^2(\Omega)$ **appartient à** $\mathcal{D}(\Delta_{dir})$ **(domaine de** Δ_{dir}**) si les** $c_j(u) = (\Phi_j|u)$ **vérifient**

$$\sum \lambda_j^2 |c_j(u)|^2 < \infty$$

Δ_{dir} **:= l'opérateur de** $\mathcal{D}(\Delta_{dir})$ **dans** L^2 **défini par**

$$\Delta_{dir} u = -\sum_1^{\infty} \lambda_j c_j(u) \Phi_j \quad \text{(cvg. dans } L^2\text{)}$$

Une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ **appartient à** $\mathcal{D}(\Delta_{dir})$ **ssi** $u = 0$ **sur** $\partial\Omega$**; on a alors** $\Delta_{dir} u = \Delta u$.

Équation – $\Delta_{dir}u - \lambda u = f \in L^2$; $u \in \mathcal{D}(\Delta_{dir})$.

1. λ **n'est pas v.p. de** $-\Delta$ **: existence et unicité**

$$u = \sum \frac{c_j(f)}{(\lambda - \lambda_j)} \Phi_j$$

2. λ **est v.p. de multiplicité** m**, c'est-à-dire** $(\lambda = \lambda_l = \cdots = \lambda_{l+m-1})$**; résoluble ssi** f **vérifie** $\int \Phi_p(x) f(x) dx = 0$, $l \leq p < l + m$.

Alors, l'espace des solutions est de dimension m **:**

$$u = \sum_{j \notin \{l,\ldots,l+m-1\}} \frac{c_j(f)}{\lambda - \lambda_j} \Phi_j + \sum_{l \leq p < l+m} C_p \Phi_p$$

Fonctions propres du Laplacien avec condition de Neumann

Il existe :

- **une base hilbertienne** (Ψ_j)**,** $j = 1, 2, \ldots$ **de** $L^2(\Omega)$**,**
- **une suite** (μ_j) **de nombres réels t.q.**

$$\Psi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})\,; \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu}(x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega\,.$$

$$\Delta \Psi_j = -\mu_j \Psi_j\,.$$

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \ldots\,; \quad \mu_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Éq. de la chaleur avec condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial u/\partial t - \Delta u & = 0\,(\textbf{ou } f(t,x))\ \textbf{dans } \Omega \times [0,\infty[\\ u(t,x) & = 0 \ \textbf{pour } x \in \partial\Omega \\ u(0,x) & = u_0(x) \ \textbf{donnée dans } \mathcal{D}(\Delta_{dir}) \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum c_j(u_0) e^{-\lambda_j t} \Phi_j(x)$$

$u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(\Delta_{dir})$ **et** $\partial u/\partial t(t,\cdot) \in L^2$ **pour** $t > 0$

$$u(t,x) = \sum \left\{ c_j(u_0) e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{-\lambda_j (t-s)} h_j(s) ds \right\} \Phi_j(x)$$

$$h_j(t) = (\Phi_j | f(t,\cdot)) = \int_\Omega \Phi_j(x) f(t,x) dx$$

Éq. des ondes avec condition de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u & = 0 \ \textbf{ dans } \Omega \times [0, \infty[\\ u(t,x) & = 0 \ \textbf{ pour } x \in \partial\Omega \\ \left. \begin{array}{ll} u(0,x) & = u_0(x) \\ \partial u/\partial t(0,x) & = u_1(x) \end{array} \right\} & \textbf{données dans } \mathcal{D}(\Delta_{dir}) \end{cases}$$

$u(t,x) = \cdots$

$$\sum_j \left\{ c_j(u_0) \cos(t\sqrt{\lambda_j}) + \frac{c_j(u_1)}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(t\sqrt{\lambda_j}) \right\} \Phi_j(x)$$

pour t **fixé la série converge en moyenne quadratique et définit un élément** $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(\Delta_{dir})$.

Fonctions propres d'un Hamiltonien

$H_V = -\Delta + V$, **avec** V **de classe** C^∞ **et** $V(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **Il existe :**

- **une base hilbertienne** ψ_j **de** $L^2(\mathbb{R}^3)$ **avec** $\psi_j \in C^\infty$
- **une suite** (λ_j) **vérifiant :**

$$H_V\psi_j = \lambda_j\psi_j$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} V(x) < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

DEF. (domaine de H_V)

$u \in \mathcal{D}(H_V) \Leftrightarrow \sum \lambda_j^2 |\gamma_j|^2 \leq \infty$ **avec** $\gamma_j = (\psi_j|u)$

$u \in \mathcal{D}(H_V) \Leftrightarrow u \in L^2, |\xi|^2 \widehat{u} \in L^2$ **et** $V(x)u(x) \in L^2$.

Équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = H_V u & \textbf{dans } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x) & \textbf{dans } \mathcal{D}(H_V) \textbf{ avec } \|u_0\|_{L^2} = 1 \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum_j c_j(u_0) e^{-it\lambda_j} \psi_j(x) \,; \quad c_j(u_0) = (\psi_j | u_0)$$

$$u(t,x) = \sum_j e^{-it\lambda_j} \psi_j(x) \int \psi_j(y) u_0(y) dy$$