# RAPPELS

**$A$ continu**

$A : L^2(R) \longrightarrow C_b(R)$ **vérifiant ($\alpha$) (linéarité), ($\beta$) (homogénéité dans le temps), et ($\gamma$) (causalité).**

**Alors il existe $a \in L^2(\mathrm{R})$ et nulle pour $t < 0$ t.q.**

$$\forall f, \quad Af = a \star f$$

| | | |
|---|---|---|
| $u(t,x)$ | $\longrightarrow$ | $\tilde{u}(t,\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(t,x)dx$ |
| $\frac{\partial}{\partial x_j} u(t,x)$ | $\longrightarrow$ | $i\xi_j \tilde{u}(t,\xi)$ |
| $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(t,\xi)$ |
| **EDP à coeff. constants** | $\longrightarrow$ | **Eq. différentielle en** $t$ **à coeff. dépendant de** $\xi$ |
| $u(0,x) = \phi(x)$ | $\longrightarrow$ | $\tilde{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$ |

**Éq. de la chaleur :**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) \qquad (5)$$

**où $\Delta$ est le Laplacien en $x \in \mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.**

**Problème de Cauchy : trouver $u$ définie sur $[0,\infty[\times \mathbf{R}^n$ solution de (5) telle que $u(0,x) = u_0(x)$ donnée.**

$\boxed{f = 0}$

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) d\xi\,,$$

$$u_t = G_t \star u_0, \qquad \widehat{G_t}(\xi) = e^{-t|\xi|^2},$$

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$$

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy$$

$\boxed{f \neq 0}$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |\xi|^2 \tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-t|\xi|^2} + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \tilde{f}(s,\xi) d\xi$$

$$u(t,x) = (G_t \star u_0)(x) + \int_0^t (G_{t-s} \star f_s)(x) ds$$

## Équation de Schrödinger libre

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \Delta u(t,x) = 0$$

**Pb. de Cauchy dans** $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$ **:**
$u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

$$\tilde{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{-it|\xi|^2}$$

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}_x}\Big(\tilde{u}(t,\cdot)\Big)\,,$$

**On a** $\|u(t,\cdot)\|_2 = \|u_0\|_2$ **.**

**Équation des ondes. – Chercher $u(t,x)$ sur $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$ t.q.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0\,,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)\,.$$

$$\tilde{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\cos(|\xi|t) + \frac{\widehat{u_1}(\xi)}{|\xi|}\sin(|\xi|t)\,,$$

$$u = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}_x}(\tilde{u})$$

**TH. et DEF. (adjoint d'un opérateur)**
$H$ **Hilbert,** $A$ **linéaire** $H \to H$
**Il existe un et un seul opérateur linéaire continu** $A^\dagger$ **t.q.**

$$(f|Ag) = (A^\dagger f|g)$$

**Notations de Dirac :** $Au$ **se note aussi** $|Au\rangle$ **ou** $|A|u\rangle$
$\langle f|A|$ **désigne la forme linéaire** $u \to \langle f|Au\rangle$**, c'est-à-dire** $\langle A^\dagger f|$ **.**

**DEF.** – $A$ est **autoadjoint** (ou hermitien) si on a
$A^\dagger = A$. On a alors $(Af|g) = (f|Ag)$.

**TH. & DEF.** $U$ est **isométrique**
si $(Uf|Ug) = (f|g)$.
$U$ est **unitaire** si de plus $U$ est inversible.

$U$ isométrique $\Longleftrightarrow U^\dagger U = I$
$U$ unitaire $\Longleftrightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = I$.

**DEF.** – $H$ **Hilbert,** $A : H \to H$

$$\text{spectre de } A = \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda \text{ non bijectif}\}$$

$$\begin{aligned} \text{spectre ponctuel} &= \{\text{des valeurs propres}\} \\ \text{de } A &= \{\lambda \in \mathbb{C} | A - \lambda \text{ non injectif}\} \end{aligned}$$

**TH.** – **Si** $A$ **est autoadjoint, spectre**$(A) \subset \mathbb{R}$**. De plus, si** $f_1$ **et** $f_2$ **sont des vecteurs propres relatifs à deux valeurs propres distinctes,** $f_1 \perp f_2$**.**