RAPPELS

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathrm{R}^n)$

L'application $f \mapsto (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}f$ est linéaire, bijective, isométrique de L^2 sur lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$.

Elle vérifie
f et $g \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-n}\widehat{f} \star \widehat{g}$

Fonctions de la distance à l'origine.

$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$; **Si** $f(x) = F(r) \quad (r = |x|)$, **alors** $\widehat{f}(\xi) = \Phi(\rho) \quad (\rho = |\xi|)$.

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(\rho r)F(r)dr & \textbf{pour } n = 1 \\ 2\pi \int_0^\infty r J_0(\rho r)F(r)dr & \textbf{pour } n = 2 \\ \frac{4\pi}{\rho}\int_0^\infty r\sin(\rho r)F(r)dr & \textbf{pour } n = 3 \end{cases}$$

$$J_0(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t\cos\theta)d\theta$$

TH. – Soit $a \in L^1(\mathrm{R}^n)$.
L'opérateur $A : L^1 \to L^1$ defini par $Af = a \star f$
(α) est linéaire (superposition)
(β) commute avec les translations (homogénéité en temps)
(γ) si $n = 1$ et $a(t) = 0$ pour $t < 0$, vérifie la causalité.

TH. – Soit $a \in L^1_{loc}(\mathrm{R})$ vérifiant $a(t) = 0$ pour $t < 0$.
$\mathcal{E}$ = espace des $f \in L^1_{loc}$ à support limité à gauche.
A applique $\mathcal{E}$ dans lui-même et vérifie (α), (β), (γ)

TH.(une réciproque) Soit A continu $A : L^2(R) \to C_b(R)$ vérifiant (α), (β), et (γ). Alors il existe $a \in L^2(\mathrm{R})$ et nulle pour $t < 0$ t.q.

$$\forall f, \quad Af = a \star f$$

REM.(une autre réciproque)

$$A \ : \left\{ \begin{array}{l} f. \in L^2_{loc} \text{ limitées} \\ \text{à gauche} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} f. \text{cont. limitées} \\ \text{à gauche} \end{array} \right\}$$

vérifie (α), (β), (γ).
Alors il existe $a \in L^2_{loc}(\mathrm{R})$ nulle pour $t < 0$ t.q.

$$\forall f, \quad Af = a \star f$$

$$\frac{d^m u}{dt^m}(t) + \alpha_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}(t) + \ldots + \alpha_0 u(t) = f(t)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ **racines de**

$$\lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_0 = 0$$

• Si f à support limité à gauche, il existe une et une seule solution u à support l. à g.

$$u(t) = a \star f(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)f(s)ds$$

$$a = \left[H(t)e^{\lambda_1 t}\right] \star \left[H(t)e^{\lambda_2 t}\right] \star \ldots \star \left[H(t)e^{\lambda_m t}\right]$$

Équation

$$\Delta u(x) - \lambda u(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{(1) (homogène)} \\ f(x) & \textbf{(2) (inhomogène)} \end{cases}$$

$x \in \mathrm{R}^3$ **(par exemple),** $\lambda > 0$ **et** f **donnée.**

Propriétés générales des E.D.P. linéaires

- **Les solutions de l'équation homogène (1) forment un espace vectoriel (de dimension infinie).**
- **Si** u_0 **est solution de (2), les solutions de (2) sont les** $u = u_0 + v$ **avec** v **solution de (1).**

- **Si (2) possède une solution u de classe C^2, sommable ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre (2), on a**

$$u = -(2\pi)^{-3}\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2+\lambda}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

- **Pour $f \in L^1$, (3) définit toujours une fonction $u \in L^2$.**
- **Pour $f \in L^2$, on a** $\quad u = K \star f$**, avec**

$$K = (2\pi)^{-3}\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{-1}{|\xi|^2+\lambda}\right).$$

- **Avec** $\quad K(r) = -\frac{1}{4\pi r}e^{-\sqrt{\lambda}r}, \quad r = |x|.$

Équation de Laplace-Poisson $\quad \Delta u = f \quad$ (4)

TH. – Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^3)$, de classe C^1 et bornée. Il existe

$$\text{une et une seule } u \text{ qui} \begin{cases} \text{vérifie (4)} \\ \text{est de classe } C^2 \\ \text{tend vers } 0 \text{ à l'infini} \end{cases}$$

On a

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathrm{R}^3} \frac{1}{|x-y|} f(y)dy$$