RAPPEL

Régularisation :

Si $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ **,** $\int_{\mathbf{R}^n} h(x)dx = 1$ **et**
$h_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} h(x/\epsilon)$,

$$f \in \left\{ \begin{array}{c} L^1(\mathbf{R}^n) \\ L^2(\mathbf{R}^n) \end{array} \right\} \textbf{ alors } f \star h_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f \textbf{ dans } \left\{ \begin{array}{c} L^1(\mathbf{R}^n) \\ L^2(\mathbf{R}^n) \end{array} \right.$$

En particulier :

Si $h \in C^\infty$ **alors** $f \star h_\epsilon \in C^\infty$**.**

Transformation de Fourier

TH. & DEF. – $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

$\widehat{f}$ **est continue bornée, tend vers** 0 **à l'infini et**

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a} \qquad \textbf{dans } \mathbf{R}^n$$

TH. (Formule d'inversion)

Soit $f \in L^1(\mathrm{R}^n)$ **telle que** $\widehat{f} \in L^1(\mathrm{R}^n)$**. Alors**

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad \textbf{p.p}$$

COR. – **Si** $f, g \in L^1$ **et si** $\widehat{f} = \widehat{g}$ **alors** $f = g$**.**

$$f(x) \qquad \widehat{f}(\xi)$$

$$f(-x) \qquad \widehat{f}(-\xi)$$

$$\overline{f(x)} \qquad \overline{\widehat{f}(-\xi)}$$

échange translation – modulation :

$$f(x-a) \qquad e^{-ia\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$$

$$e^{i\alpha\cdot x}f(x) \qquad \widehat{f}(\xi-\alpha)$$

dilatations en sens inverse :

$$f(x/\lambda) \qquad |\lambda|^n\widehat{f}(\lambda\xi)$$

PRINCIPE.– **Plus f est régulière, plus $\widehat{f}$ est petite à l'infini.**

TH.– f de classe C^1 ; f et les $\partial f/\partial x_j$ sommables.

Alors $$\mathcal{F}(\partial f/\partial x_j) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$$

COR.– f de classe C^k ; f et ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sommables.

Alors $$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{o}(|\xi|^{-k}) \text{ à l'infini.}$$

PRINCIPE.– Plus f est petite à l'infini, plus $\widehat{f}$ est régulière.

TH.– f et les $x \mapsto x_j f(x)$ sommables

Alors $\widehat{f}$ est de classe C^1 et
$\mathcal{F}(x_j f(x)) = i \frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_j}$

COR.– Si $x \mapsto (1 + |x|^k) f(x)$ est sommable

Alors $\widehat{f}$ est de classe C^k.

PRINCIPE. – La transformée de Fourier échange produit de convolution et produit ordinaire.

TH. – Soient f et g sommables. Alors

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$