RAPPELS

PRINCIPE DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE :

f et g holomorphes dans Ω connexe par arc
$U \subset \Omega$ ouvert, alors
$f = g$ dans $U \Rightarrow f \equiv g$ dans Ω.

DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME

$$F(w) = \int_A f(x, w) dx$$

F est holomorphe si :

i) f est holomorphe en w pour tout x,

ii) hypothèses.

Voir le théorème 2.2.16 page 48

$z \mapsto F(z)$ **définie dans le demi-plan supérieur fermé**
$\tilde{\gamma}_r$ **demi-cercle de rayon** r**.**

LEMME – Si $zF(z) \longrightarrow 0$ **pour** $z \to \infty$

$$\int_{\tilde{\gamma}_r} F(z)dz \longrightarrow 0 \text{ pour } r \to \infty$$

Idem dans le demi-plan inférieur.

LEMME – Si $F(z) \longrightarrow 0$ **pour** $z \to \infty$ **et** $a > 0$

$$\int_{\tilde{\gamma}_r} F(z)e^{iaz}dz \longrightarrow 0 \text{ pour } r \to \infty$$

Idem si $a < 0$ **et demi-plan inférieur.**

TH. — f **holomorphe dans** Ω**.**
On suppose que f **y possède une primitive** F**.**
γ **chemin** C^1 **par morceaux :** $[a,b] \longrightarrow \Omega$**,**
$z_0 = \gamma(a)$, $z_1 = \gamma(b)$**. Alors,**

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

En particulier $\int_\gamma f(z)dz = 0$ **si** γ **est fermé.**

COR. — $1/z$ **n'a pas de primitive dans** $\mathbb{C} \setminus \{0\}$**.**

TH.

1. f **holomorphe dans le disque** $\{z,\, |z - z_0| < R\}$.
Alors f **y possède une primitive.**

2. f **holomorphe dans le disque pointé** $\{z,\, 0 < |z - z_0| < R\}$.
Alors f **y possède une primitive si et seulement si**

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$$

Détermination du logarithme dans un plan coupé

D : demi-droite fermée issue de l'origine; $\Omega = \mathbb{C} \setminus D$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $e^{i\alpha} \in D$ (un argument des points de D).
On note $a(z) =$l'unique argument de $z \in \Omega$ appartenant à $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Pour $z \in \Omega$ posons $l(z) = \log |z| + ia(z)$. Alors,

– La fonction l est holomorphe dans Ω
– $\forall z \in \Omega \quad , \quad e^{l(z)} = z \quad , \quad l'(z) = 1/z$.

Rappels – $A \in \mathrm{R}^n$, dx mesure de Lebesgue
$L^2(A) =$ espace (des classes) de fonctions de carré sommable sur A.
(deux fonctions égales p.p. définissent le même élément)

– Muni du produit scalaire $(f|g) = \int_A \overline{f(x)} g(x) dx$ et donc de la norme $\|f\| = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 dx}$, c'est un espace de Hilbert.

Base hilbertienne : suite (e_j), $j = 1, 2, \ldots$ qui est un système total et orthonormal.

TH.– Tout $f \in H$ a une décomposition unique

$$f = \sum_j c_j(f) e_j, \quad c_j(f) \in \mathbf{C}, \quad \text{série CVG dans } H$$

$$c_j(f) = (e_j | f), \qquad \|f\|^2 = \sum_j |c_j(f)|^2$$

– Réciproquement, si $\sum_j |\gamma_j|^2 < \infty$, la série $S = \sum_j \gamma_j e_j$ converge dans H et $c_j(S) = \gamma_j$.

Espace L^2_T des fonctions T-périodiques de carré sommable sur tout intervalle.
Produit scalaire : $(f|g) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \overline{f(t)}g(t)dt$
(ne dépend pas du choix de a).

TH. – Les fonctions $e_k(t) = e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\omega = 2\pi/T$
forment une base hilbertienne de L^2_T (ou de $L^2([0,T])$, ou de $L^2([a,a+T])$).

TH. – $\forall f \in L^2_T, \qquad f(t) \overset{L^2}{=} \sum_k c_k e^{ik\omega t}$

CVG dans L^2 sur tout intervalle borné

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{-ik\omega t} f(t)\,dt$$

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt = \sum_k |c_k|^2$$

Idem si $f \in L^2([a, a+T])$, avec CVG dans $L^2([a, a+T])$.

REM. – **La notation $\overset{L^2}{=}$ signifie égalité presque partout et convergence de la série dans L^2.**