(BREF) PLAN DU COURS

1. Fonctions holomorphes.

   i) Une nouvelle classe de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   ii) Calculs d'intégrales.

2. Séries de Fourier.

   i) En dimension 1 (rappels).

   ii) Cas multi-dimensionnel.

3. Transformée de Fourier.

4. Applications.

TH. & DEF. — On dit que f est **holomorphe** (ou analytique) dans Ω si on a les propriétés équivalentes :

1. $\forall z \in \Omega$, $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ a une limite (notée $f'(z)$) pour $\Delta z \to 0$, et $z \mapsto f'(z)$ est continue.

2. Comme fonction de 2 variables réelles, f est de classe C^1 et vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(équation de Cauchy-Riemann).

Si f et g sont holomorphes dans Ω alors,

$f+g$ est holomorphe et $(f+g)' = f'+g'$,

fg est holomorphe et $(fg)' = f'g + fg'$.

Si g ne s'annule pas f/g est holomorphe et

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2.$$

Fonctions composées : f applique Ω dans Ω_1; f est holomorphe dans Ω; g est holomorphe dans Ω_1. Alors $g\circ f$ est holomorphe dans Ω et

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

TH. — **Soit $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$. Il existe $R \in [0, +\infty]$ t.q.**

i) La série converge en tout point du disque de convergence $D_R = \{z,\ |z| < R\}$.
Pour $R > 0$, $S(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ est bien définie dans D_R. En outre, $\forall \rho < R$, on a cvg. uniforme dans D_ρ :

$$\sup_{|z|\leq\rho} \left| S(z) - \sum_{0}^{N} a_n z^n \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

ii) La série $\sum a_n z^n$ est divergente pour tout z tel que $|z| > R$ (pour $|z| = R$???).
iii) La fonction S est holomorphe dans D_R et on a $S'(z) = \sum\limits_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (même rayon de convergence).

DEF. — On dit que les $\gamma_j : [a_j, b_j] \to K$ constituent le **bord orienté du compact** K si :

i) les images $\gamma_j([a_j, b_j])$ sont disjointes, de réunion fr$[K]$;

ii) chaque γ_j est un chemin fermé, de classe C^1 p.m., sans point double : pour $s < t$, $\gamma_j(s) \neq \gamma_j(t)$ (sauf en $s = a_j$ et $t = b_j$);

iii) pour $t \in [a_j, b_j]$, on a $\gamma_j'(t) \neq 0$ si t n'est pas point de subdivision, sinon les 2 vecteurs dérivés sont $\neq 0$;

iv) pour $t \in [a_j, b_j]$ non de subdivision, soit ν_t le vecteur déduit de $\gamma_j'(t)$ par rotation de $+\pi/2$. Alors,

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_j(t) + \varepsilon\nu_t \in K \\ \gamma_j(t) - \varepsilon\nu_t \in \complement K \end{array}\right\} \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit.}$$

TH. (Green-Riemann) — Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle dans Ω, avec P et Q de classe C^1. Soit $K \subset \Omega$ compact, de bord orienté $(\gamma_j)_{j\in J}$. Alors,

$$\sum_{j\in J} \int_{\gamma_j} \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

COR. — Mêmes Hypothèses sur γ_j, K et Ω. Pour f holomorphe dans Ω, on a

$$\sum_{j\in J} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 0.$$

REM. — Conclusion valable en supposant seulement f définie et continue sur K et holomorphe dans $\overset{\circ}{K}$.

TH. (Formule intégrale de Cauchy) — **Soient** Ω **ouvert contenant** $\overline{D(z_0, r)}$ **et** f **holomorphe dans** Ω**. Alors,**

$$\forall z \in D(z_0, r) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw \,.$$