MAT432 : Corrigé du contrôle classant du 14 Novembre 2002

Corrigé du problème I : un calcul de π

1) La fonction $\sin(z)$ est combinaison d'exponentielles qui sont des fonctions entières, elle est donc entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbf{C}$).

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \tfrac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}) \\ &= \tfrac{1}{2i}(\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i \sin x(e^{-y} + e^{y})) \\ &= \sin x \mathrm{ch} y + i \cos x \mathrm{sh} y\end{aligned}$$

d'où

$$|\sin(x+iy)| = (\sin^2(x)\mathrm{ch}^2(y) + \cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y))^{1/2}$$

2) On a $|z-n\pi|^2 = (x-n\pi)^2 + y^2$ donc, si $|z-n\pi| \geq \epsilon$, on a l'alternative $|x-n\pi| \geq \epsilon/\sqrt{2}$ ou bien $|x-n\pi| < \epsilon/\sqrt{2}$ et $|y| \geq \epsilon/\sqrt{2}$.

Dans le premier cas,

$$|\sin(z)| \geq |\sin(x)|\mathrm{ch}(y) \geq \frac{a(\epsilon)}{2}e^{|y|}$$

où $a(\epsilon) = \inf\{|\sin x|\,, x \in [\epsilon/\sqrt{2}, \pi - \epsilon/\sqrt{2}]\}$

Dans le second cas,

$$|\sin(z)| \geq \cos x|\mathrm{sh} y| \geq b(\epsilon)|\mathrm{sh} y|$$

où $b(\epsilon) = \inf\{|\cos x|\,, x \in [0, \epsilon/\sqrt{2}] \cup [\pi - \epsilon/\sqrt{2}, \pi]\}$. Ensuite supposons, par exemple, $y > 0$,

$$\mathrm{sh}(y)/e^y = 1/2(1 - e^{-2y})$$

donc $y \geq \epsilon/\sqrt{2} \Rightarrow (1/2)(1 - e^{-2y}) \geq \frac{1-e^{-\sqrt{2}\epsilon}}{2}$

3) Le théorème des résidus (1.5.6. page 25) appliqué à

la fermeture de D_r donne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{h(w)}{(w-z)^2}dw=\sum_{y_k\in D_r}\text{Res}(f;y_k)$$

où $f(w)=\frac{h(w)}{(w-z)^2}$ et $\{y_k\}$ est l'ensemble des pôles de f dans Ω. Or $\{y_k\}=\{z_j\}\cup\{z\}$, et

$$\text{Res}(f;z)=h'(z)\quad\text{(voir 1.5.7.)}$$

Au voisinage de z_j, $h(w)=\frac{a_{-1}}{(w-z_j)}+O(1)$ et, comme $z\neq z_j$ on a aussi $\frac{1}{(w-z)^2}=\frac{1}{(z_j-z)^2}+O(|w-z_j|)$. D'où

$$\text{Res}(f;z_j)=\frac{\text{Res}(h;z_j)}{(z_j-z)^2}$$

4) D'après la première question,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_p}\frac{f(w)}{\sin(w)}\frac{dw}{(w-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\sin z}\right)+\sum_{|n|\leq p}(-1)^n\frac{f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}$$

en effet, les pôles de $f(w)/\sin(w)$ sont ceux de $1/\sin(w)$ c'est-à-dire $w=n\pi$. Ceux qui sont à l'intérieur du disque correspondent à $|n|\leq p$. Le résidu de $1/\sin w$ en $n\pi$ se calcule en utilisant l'égalité $\sin(w)=(-1)^n\sin(w-n\pi)$ et

$$\frac{1}{\sin(w)}=(-1)^n\left(\frac{w-n\pi}{\sin(w-n\pi)}\right)\frac{1}{(w-n\pi)}$$

Alors, $\frac{w-n\pi}{\sin(w-n\pi)}$ est holomorphe au voisinage de $n\pi$ (comme inverse d'une fonction holomorphe qui ne s'annule pas en $n\pi$). Ceci montre que les pôles sont simples et que le résidu est $(-1)^n$.

5) Si K est un compact de $\mathbf{C}\setminus\{n\pi\}$, K est borné et il

existe donc $D > 0$ tel que $|z| \leq D$ pour tout $z \in K$. La série est normalement convergente sur K, en effet,

$$\big|(-1)^n \frac{f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}\big| \leq \frac{1}{(|n|\pi - D)^2}$$

car $|f(n\pi)| \leq 1$ par hypothèse et l'inégalité triangulaire donne,

$$|z - n\pi| \geq |n|\pi - |z| \geq |n|\pi - D$$

pour $z \in K$. On peut, quitte à modifier D légèrement, supposer que $D \neq |n|\pi$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Alors, la série de terme général $\frac{1}{(|n|\pi - D)^2}$ est convergente.

6) On fait tendre p vers l'infini dans la formule prouvée en 4. Le terme de droite converge vers,

$$\frac{d}{dz}(\frac{f(z)}{\sin z}) + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{f(n\pi)}{(z-n\pi)^2}\,.$$

L'intégrale s'écrit:

$$I_p = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f((p+1/2)\pi e^{it})}{\sin((p+1/2)\pi e^{it})} \frac{(p+1/2)\pi i e^{it}}{((p+1/2)\pi e^{it} - z)^2} dt$$

On la majore par

$$|I_p| \leq \frac{1}{C} \frac{(p+1/2)}{2[(p+1/2)\pi - |z|]^2} \int_{-\pi}^{\pi} dt \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

en effet, pour $w \in \gamma_p$, on a $w = (p+1/2)\pi e^{it}$ et donc $|w - n\pi| \geq (1/2)\pi$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. D'où $|\sin(w)| \geq Ce^{|Imw|}$. Par ailleurs, $|f(w)| \leq e^{|Imw|}$. On conclut donc que $|\frac{f(w)}{\sin w}| \leq \frac{1}{C}$.

7) On choisit $f(z) = \cos(z)$ On vérifie l'hypothèse,

$$f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) \leq e^{|y|}$$

Par ailleurs $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
8) La fonction $\frac{1}{(\sin z)^2}$ est holomorphe dans $\overset{\bullet}{D}(0,1)$ (par exemple). On calcule son développement de Laurent en calculant un développement limité :

$$\sin z = z(1 - \frac{z^2}{6} + o(z^3)), \quad (\sin z)^{-2} = z^{-2}(1 + \frac{z^2}{3} + o(z^3))$$

d'où

$$\frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{1}{z^2} = (\frac{1}{3} + o(z))$$

est donc holomorphe au voisinage de 0.
Par ailleurs, par la même preuve que précédemment,

$$k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} - \frac{1}{z^2}$$

converge uniformément sur $D(0,1)$ et à donc un limite finie en 0.
9) On a l'égalité,

$$\frac{1}{(\sin z)^2} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} + \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

d'où, en passant à la limite en 0,

$$\frac{1}{3} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Corrigé du problème II : un théorème de Paley-Wiener

1) La transformée de Fourier d'une fonction à support compact est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Elle existe car la fonction est sommable.

2) Les fonctions f et $\frac{d^p f}{dx^p}$ sont sommables pour tout p, car elles sont à support compact. On a donc, d'après 6.3.2.

$$(i\xi)^p \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f^{(p)}(x)dw = \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f^{(p)}(x)dw$$

d'où

$$|\xi|^p |\widehat{f}(\xi)| \leq 2R\big(\sup_{x\in[-R,R]} |f^{(p)}(x)|\big) e^{|Im\xi|R} = D_p e^{R|Im\xi|}$$

3) On applique la formule du binôme de Newton pour obtenir le résultat.

4) En prenant $N \geq p+2$ on voit que, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$(1+|u|)^p |g(u)| \leq \frac{C_N}{(1+|u|)^{N-p}} \in L^1(\mathbf{R})$$

donc, d'après 6.3.5., f est de classe C^p.

5) L'intégrale existe pour les mêmes raisons que précédemment. Supposons, par exemple $v > 0$. On considère le rectangle de côtés $-A, A, A+iv, -A+iv$ où $A > 0$. L'intégrand étant holomorphe, on a,

$$-\int_{-A+iv}^{A+iv} e^{ix\xi} g(\xi)d\xi - \int_{-A}^{-A+iv} + \int_{A}^{A+iv} + \int_{-A}^{A} = 0\,.$$

Étudions

$$\int_{A}^{A+iv} e^{ix\xi} g(\xi)d\xi = \int_0^v e^{ix(A+it)} g(A+it)idt$$

Pour $t \in [0,v]$, on a $|g(A+it)| \leq \frac{C_N e^{R|v|}}{(1+A)^N} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $|\xi| = (A^2+t^2)^{1/2} \geq A$. De plus, $|e^{ix(A+it)}| \leq e^{|x||v|}$. D'où

$$\Big|\int_{A}^{A+iv}\Big| \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \Big|\int_{-A}^{-A+iv}\Big| \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve le résultat.
6) On a,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{R|v|-xv} \int_{\mathbf{R}} \frac{C_N}{(1+|u+iv|)^N} du$$

or $|u+iv| \geq |u|$, ce qui prouve le résultat.
7) Supposons $x > 0$, par exemple, et choisissons $v > 0$. Si $x > R$, alors

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{(R-x)v} \int_{\mathbf{R}} \frac{C_N}{(1+|u|)^N} du\,.$$

Le terme de gauche ne dépend pas de v donc, en faisant tendre v vers $+\infty$ dans le terme de droite, on voit que $|f(x)| \leq 0$ dès que $x > R$ et on fait de même pour $x < 0$. f est de classe C^∞ et à support compact, donc est sommable. De plus g est sommable donc $\widehat{f} = \mathcal{F}((2\pi)^{-1}\overline{\mathcal{F}}(g)) = g$.
8) On a prouvé qu'une fonction g est la transformée de Fourier d'un fonction C^∞ à support compact dans l'intervalle $[-R, R]$ si, et seulement si, elle vérifie l'inégalité du début.

Corrigé du problème III : régularité elliptique

1) Si f est de classe C^k à support compact, alors $f \in L^2$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont L^2. D'après 6.4.8 $P(ix)\widehat{f}(x)$ est la transformée de fourier d'une fonction de L^2, pour tout polynôme P de degré $\leq k$, donc est dans L^2. Il en résulte que

$$(x_1^2)^{p_1} \ldots (x_n^2)^{p_n} |\widehat{f}(x)|^2$$

est sommable (L^1) pour toute famille d'entiers $\{p_i\}$ telle que $\sum p_i \leq k$. Donc $(1+|x|^2)^k |\widehat{f}(x)|^2$ est sommable, c'est-à-dire $f \in W_k$.

L'inclusion $W_m \subset W_p$ résulte de l'inégalité $(1+|x|)^p \leq (1+|x|)^m$ dès que $p \leq m$.
2) La fonction $((1+|x|^2)^{-n/4-\epsilon})^2 = (1+|x|^2)^{-n/2-2\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^n$ et équivalente à $|x|^{-n-4\epsilon}$, lorsque $|x|$ tend vers l'infini, qui est sommable à l'infini. Cette fonction est donc dans $L^1(\mathbf{R}^n)$.
3) La fonction $(1+|x|^2)^{m/2}\widehat{f}(x)(1+|x|^2)^{-n/4-\epsilon}$ est le produit de deux fonction de carré sommable et est donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans L^1. D'où

$$|\widehat{f}(x)| = ((1+|x|^2)^{-m/2+n/4+\epsilon}[(1+|x|^2)^{m/2-n/4-\epsilon}\widehat{f}(x)]$$

c'est-à-dire,

$$|\widehat{f}(x)| = (1+|x|^2)^{-m/2+n/4+\epsilon}g_\epsilon(x)$$

où $g_\epsilon \in L^1$.
4) Soit $f \in W_m$ avec $m > n/2$. On prend ϵ tel que $m > n/2+\epsilon$. On a donc $-m/2+n/4+\epsilon/2 < 0$ et $(1+|x|^2)^{-m/2+n/4+\epsilon/2} \leq 1$. Ceci implique, grâce à l'inégalité précédente, que $\widehat{f} \in L^1$. Donc $\widehat{f} \in L^1 \cap L^2$. Par la formule d'inversion de Fourier, on a alors que $(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) = f$ presque partout. Par ailleurs, et comme $\widehat{f} \in L^1$

$$(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}) \overset{\text{p.p}}{=} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}\widehat{f}(x)dx$$

(voir le théorème 6.4.5). Donc,

$$f \overset{\text{p.p.}}{=} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}\widehat{f}(x)dx$$

qui est continue car $\widehat{f} \in L^1$. On dira que f est continue.
5) Comme précédemment, on choisit ϵ tel que $m > n/2+k+\epsilon$. Alors,

$$|x|^l|\widehat{f}(x)| \leq (1+|x|^2)^{-m/2+n/4+\epsilon+l/2}g_\epsilon(x) \leq g_\epsilon(x)$$

Donc $|x|^l|\widehat{f}(x)| \in L^1$ pour tout $l \leq k$. Ce qui implique que $(1+|x|^k)|\widehat{f}(x)| \in L^1$. Le théorème 6.3.5 appliqué à la transformée de Fourier inverse permet de conclure.
6) Si $u \in W_m$ et $f \in W_m$ alors u et Δu sont dans W_m, d'où

$$\int (1+|x|^2)^m |\widehat{u}(x)|^2 dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int (1+|x|^2)^m |x|^4 |\widehat{u}(x)|^2 dx < +\infty$$

ce qui implique que,

$$\int (1+|x|^2)^{m+2} |\widehat{u}(x)|^2 dx < +\infty$$

7) On a $u \in L^2 = W_0$ et $f \in W_k$ car f est de classe C^k et à support compact. Donc $\Delta u = f \in W_k \Rightarrow \Delta u \in W_0$. D'après 6) on déduit que $u \in W_2$.
Si $2 \leq k$,

$$\Delta u \in W_k \Rightarrow \Delta u \in W_2 \Rightarrow u \in W_4$$

On poursuit ce raisonnement par récurrence pour obtenir le résultat.
8) D'après la question précédente $u \in W_m$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ donc, d'après la question 5), $u \in C^m$ pour tout m.