MAT432 : Corrigé du contrôle Classant du 4 Novembre 2004

Exercice I

Les hypothèses sur n et α montrent aisément que l'intégrale converge. On choisit la détermination principale du logarithme c'est-à-dire définie sur $\mathbf{C}\setminus]0,-\infty[$ et dont l'argument varie entre $-\pi$ et π. On en déduit la détermination de la puissance α. La fonction $f(z)=\frac{z^\alpha}{1+z^n}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus]0,-\infty[$ privé de ses pôles $e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}}$. Soit $\rho>0$ et γ_ρ l'arc de cercle de rayon ρ et d'angle compris entre 0 et $2\pi/n$,

$$\Big|\int_{\gamma_\rho}\frac{z^\alpha}{1+z^n}dz\Big|\leq\frac{2\pi\rho}{n}\frac{\rho^\alpha}{|1-\rho^n|}\,.$$

Les hypothèses sur α montrent que cette intégrale tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0 ou bien vers $+\infty$. Le théorème des résidus appliqué au contour décrit lorsque r tend vers 0 et R tend vers $+\infty$ donne alors,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^n}dx-\int_0^{+\infty}\frac{(xe^{2i\pi/n})^\alpha}{1+(xe^{2i\pi/n})^n}e^{2i\pi/n}dx=2i\pi\text{Rés}(f;e^{i\pi/n})$$

c'est-à-dire,

$$(1-e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)})\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^n}dx=2i\pi\text{Rés}(f;e^{i\pi/n})$$

Posons $g(z)=1+z^n$, alors le résidu en $e^{i\pi/n}$, pôle simple, vaut

$$\lim_{z\to e^{i\pi/n}}\frac{(z-e^{i\pi/n})z^\alpha}{g(z)}\,,$$

comme $g(e^{i\pi/n})=0$, $\lim_{z\to e^{i\pi/n}}\frac{g(z)}{z-e^{i\pi/n}}=g'(e^{i\pi/n})=ne^{\frac{(n-1)i\pi}{n}}$.

D'où,

$$\text{Rés}(f; e^{i\pi/n}) = \frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}(\alpha-n+1)}\,.$$

On trouve donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n} dx = \frac{2i\pi}{n} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}(\alpha-n+1)}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}(\alpha+1)}} = \frac{\pi/n}{\sin\left(\frac{\pi}{n}(\alpha+1)\right)}\,.$$

Exercice II

La fonction f est dans $L^2(\mathbf{R})$. On sait que c'est la transfomée de Fourier $\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}$. Le théorème 6.4.11 donne

$$f * f = 2\pi \mathcal{F}(\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]} \times \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}) = \mathcal{F}(\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]}) = f\,.$$

Ce calcul est justifié car $\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-1,1]} \in L^2$. Par associativité du produit de convolution, $f*f*f = f*(f*f) = f*f = f$.

Problème I

1) On calcule l'indice de 0 par rapport à γ en paramétrant le chemin,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\,.$$

Si le chemin est constant, alors $\gamma'(s) = 0$, pour tout s, d'où le résultat.

2) On peut déformer continûment γ en une courbe constante en posant

$$\gamma_t(s) = t\gamma(s) + 1 - t\,.$$

Alors, pour tout t, s on a $\gamma_t(s) \in D(1,1)$ donc $\gamma_t(s) \neq 0$; d'après le résultat admis, $\text{ind}_\gamma(0) = \text{ind}_{\gamma_0}(0)$. Or γ_0 est une courbe constante donc $\text{ind}_\gamma(0) = 0$.

3) La fonction f'/f est holomorphe sur Ω privé des zéros de f. En ces points, notés z_k le développement de f est $f(z) = (z-z_k)^{m_k}+(z-z_k)^{(m_k+1)}+\cdots$. Le développement en série de Laurent au voisinage de z_k de f'/f est donc $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z-z_k} + \cdots$. Le théorème des résidus donne,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_k\in D(0,1)} m_k\,.$$

4) L'inégalité stricte $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ montre qu'aucune des deux fonctions ne peut s'annuler sur $\mathcal{C}$, la courbe γ est donc bien définie. On a, pour tout $z \in \mathcal{C}$, $|h(z)-1| < 1$, donc $h(z) \in D(1,1)$ ainsi que $\gamma(s)$ pour tout s. De la question 2) on déduit $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 0$.
5) On calcule l'intégrale curviligne en paramétrant $\mathcal{C}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \int_0^1 \frac{h'(e^{2i\pi s})}{h(e^{2i\pi s})}2i\pi e^{2i\pi s}ds = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \mathrm{ind}_\gamma(0) = 0\,.$$

6) Il suffit d'écrire :

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_{\mathcal{C}} \frac{g'(z)}{g(z)}dz\,.$$

Le nombre de zéros de f est donc égal au nombre de zéros de g, tous comptés avec leur multiplicité.
7) On a $|f(z) - g(z)| = |b| < 1$ par hypothèse. Par ailleurs, pour $z \in \mathcal{C}$,

$$|f(z)|^2 = |z|^{2m}\Big(\frac{|2z-1|^2}{|2-z|^2}\Big)^n = \Big(\frac{4|z|^2 - 4\mathcal{R}e(z)+1}{4-4\mathcal{R}e(z)+|z|^2}\Big)^n = 1\,.$$

Ceci montre l'inégalité $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Le nombre de solutions de l'équation est donc le même que le nombre de zéros de f dans D. Ces zéros sont : 0 de multiplicité m et 1/2 de multiplicité n. Il y a donc $m+n$ solutions à l'équation $g(z) = 0$ dans D.

Problème II

1) On a $P^\dagger = P$ donc $(P^2)^\dagger = (P \circ P)^\dagger = P^2$ et de même $(Q^2)^\dagger = Q^2$. D'où $H^\dagger = H$. On remarque que, pour $u \in \mathcal{E}$,

$$< Hu, u >= \frac{1}{2}(< Pu, Pu > + < Qu, Qu >) \geq 0\,.$$

Alors, si λ est valeur propre de H et u est un vecteur propre, on a $\lambda \|u\|^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\lambda \geq 0$.
2) On a $A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(P^\dagger - (iQ)^\dagger\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(P + iQ\big)$. En effet, $(iQ)^\dagger = \bar{i}Q^\dagger = -iQ$.
3) Calculons $AA^\dagger = \frac{1}{2}(P - iQ)(P + iQ) = \frac{1}{2}\big(P^2 + Q^2 + i(PQ - QP)\big) = H + \frac{1}{2}I$, et de même,
$A^\dagger A = \frac{1}{2}(P + iQ)(P - iQ) = \frac{1}{2}\big(P^2 + Q^2 - i(PQ - QP)\big) = H - \frac{1}{2}I$, d'où $H = AA^\dagger - \frac{1}{2}I = A^\dagger A + \frac{1}{2}I$.
4) Enfin, $[A^\dagger, A] = A^\dagger A - AA^\dagger = -I$.
5)$\|Au\|^2 =< Au, Au >=< A^\dagger Au, u >=< Hu, u > -\frac{1}{2}\|u\|^2 = (\lambda - \frac{1}{2})\|u\|^2$ et de même
$\|A^\dagger u\|^2 =< Hu, u > +\frac{1}{2} = (\lambda + \frac{1}{2})\|u\|^2$.
6) Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors, par l'égalité précédente, $Au = 0$. Sinon $\lambda - \frac{1}{2} > 0$ et $HAu = AA^\dagger Au - \frac{1}{2}Au = A\big(A^\dagger Au - \frac{1}{2}u\big) = A(Hu - u) = (\lambda - 1)Au$. Au, qui est non nul, est donc vecteur propre de H correspondant à la valeur propre $\lambda - 1$. De même,
$HA^\dagger u = A^\dagger AA^\dagger u + \frac{1}{2}A^\dagger u = A^\dagger(Hu + u) = (\lambda + 1)A^\dagger u$.
Le vecteur $A^\dagger u$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $\lambda + 1$. Il faut néammoins vérifier qu'il est non nul,

ce qui découle de $\|A^\dagger u\|^2 = (\lambda + \frac{1}{2})\|u\|^2$.
7) Si λ est une valeur propre de H de vecteur propre u (non nul). Si $Au = 0$ alors, d'après la questions 5), $\lambda = \frac{1}{2}$, sinon $(\lambda - 1)$ est valeur propre de vecteur propre Au. Pour p un entier, si $A^p u$ est non nul c'est un vecteur propre de H de valeur propre $\lambda - p$. Les valeurs propres de H étant positives ou nulles on a $\lambda \geq p$. Donc, pour n la partie entière de λ, $A^{n+1}u$ est nécessairement nul. En effet, sinon $A^{n+1}u$ serait vecteur propre de H de valeur propre $\lambda - n - 1 < 0$ ce qui est impossible, d'après la question 5)

$$0 = \|A^{n+1}u\| = (\lambda - n - \frac{1}{2})\|u\|^2 \Rightarrow \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

8) Si $u \in E_{n-\frac{1}{2}}$, $A^\dagger u$ est vecteur propre de H pour la valeur propre $n - \frac{1}{2} + 1 = n + \frac{1}{2}$, donc appartient à $E_{n+\frac{1}{2}}$. Maintenant, d'après 5), $\|A^\dagger u\|^2 = n\|u\|^2$ donc $A^\dagger$ est injectif. Enfin, si $v \in E_{n+\frac{1}{2}}$, $A^\dagger Av = Hv - \frac{1}{2}v = nv$ donc v est l'image par $A^\dagger$ de $\frac{1}{n}Av$; $A^\dagger$ est surjectif.
9) Si H a au moins une valeur propre λ elle s'écrit $n_0 + \frac{1}{2}$ pour $n_0 \in \mathbf{N}$, $E_{n_0+\frac{1}{2}}$ est donc non réduit à $\{0\}$ et, par l'argument ci-dessus, il en est de même de tous les $E_{n+\frac{1}{2}}$. Tout vecteur propre de $E_{n+\frac{1}{2}}$ s'écrit $(A^\dagger)^n u$ avec $u \in \ker(A) = E_{\frac{1}{2}}$.
10) La multiplication par x et la dérivation laissent stable la classe de Schwartz par définition de celle-ci. Pour f et g dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$< Pf, g >= \int_{\mathbf{R}} \overline{xf(x)}g(x)dx = \int_{\mathbf{R}} x\overline{f(x)}g(x)dx =< f, Pg >$$

les intégrales ayant un sens car les fonctions décroissent plus vite que tout polynôme à l'infini. De même,

$$\begin{aligned} < Qf, g > \; &= \textstyle\int_{\mathbf{R}} \overline{if'(x)} g(x) dx = -\int_{\mathbf{R}} \overline{f}'(x) g(x) dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{R}} \overline{f(x)} g'(x) dx = < f, Qg > \end{aligned}$$

par intégration par parties. Il n'y a pas de termes de bord car toutes les fonctions considérées sont nulles à l'infini.

11) On a $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{d^2}{dx^2})$. L'opérateur A est donné par

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})\,.$$

Son noyau est donné par les solutions de l'équation différentielle ordinaire,

$$\frac{df}{dx}(x) = -xf(x)\,,$$

c'est-à-dire par les fonctions $Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ où C est une constante. Les espaces propres de l'oscillateur harmonique sont les images du noyau de A par $(A^\dagger)^n$ où n parcourt les entiers positifs ou nuls. Or $A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$, un récurrence élémentaire montre que

$$(A^\dagger)^n(Ce^{-\frac{x^2}{2}}) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

avec H_n un polynôme de degré n. Les fonctions propres d'un opérateur autoadjoint relatives à des valeurs propres différentes sont orthogonales, donc, pour $m \neq n$,

$$\int_{\mathbf{R}} (H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}})(H_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}})dx = \int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} = 0\,.$$