MAT432 : Corrigé du contrôle Classant du 13 Novembre 2003

Exercice I

L'intégrand est équivalent à $\log(x)$ en 0 et à $\frac{\log(x)}{x^4}$ à l'infini, c'est-à-dire majoré par $\frac{\text{Cst}}{x^3}$, et est donc intégrable. On calcule I par la méthode des résidus. Posons,

$$f(z) = \frac{(\log z)^2}{(1+z)^4}$$

où $\log z$ est la détermination du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ définie par $\arg z \in [0, 2\pi]$. On choisit le même contour Γ que dans le livre, page 36. Le seul pôle de f sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$ est en $z = -1$. Pour $0 < \epsilon < 1$ et $R > 1$,

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum \text{Rés} f,$$

$$\int_{AB} f(z)dz \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_\epsilon^R \frac{(\log x)^2}{(1+x)^4} dx$$

$$\int_{CD} f(z)dz \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\int_\epsilon^R \frac{(\log x + 2i\pi)^2}{(1+x)^4} dx$$

Si γ_ϵ désigne le cercle, centré en 0, de rayon ϵ et γ_R celui de rayon R, alors

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz\right| &\leq 2\pi\epsilon \sup_{z\in\gamma_\epsilon} |f(z)| = 2\pi\epsilon \sup_{z\in\gamma_\epsilon} \frac{|\log|z| + i\arg z|}{|1+z|^4} \\ &\leq C\epsilon|\log\epsilon| \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq CR\frac{\log R}{R^4} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où, lorsque $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, on obtient, par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{(1+x)^4} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(\log x + 2i\pi)^2}{(1+x)^4} dx = 2i\pi \text{Rés}(f, -1),$$

c'est-à-dire,

$$-4i\pi I + 4\pi^2 K = 2i\pi \text{Rés}(f,-1)$$

où $K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^4}$. L'intégrale I étant réelle, nous obtenons, en prenant la partie imaginaire de l'égalité ci-dessus,

$$2I = -\mathcal{R}e(\text{Rés}(f,-1)).$$

calcul du résidu

D'après 1.5.7., $\text{Rés}(f,-1) = \frac{h^{(3)}(-1)}{3!}$, où $h(z) = (\log z)^2$.

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{2}{z}\log z \\ h''(z) &= -\frac{2}{z^2}\log z + \frac{2}{z^2} \\ h^{(3)}(z) &= -\frac{4}{z^3}\log z - \frac{6}{z^3}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}e(\text{Rés}(f,-1)) = 1 \quad \text{et} \quad I = -\frac{1}{2}.$$

Exercice II

1)On a,

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} = 2\sum_{n\in\mathbf{Z}_*} \frac{1}{n^4} + 8\sum_{n>0} \frac{1}{(1+n^2)^2} + 4\sum_{m,n\geq 2} \frac{1}{(m^2+n^2)^2}$$

Les deux premières séries convergent. Par ailleurs,

$$\sum_{m,n\geq 2} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \leq \int_{x,y\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \leq \pi/2 \int_1^{+\infty} \frac{rdr}{r^4} < +\infty.$$

2) On suppose que

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} < +\infty,$$

alors, pour montrer la continuité de f, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. Le terme général de la série est majoré par une quantité indépendante de (x, y),

$$|a_{mn}e^{2i\pi(mx+ny)}| \leq |a_{mn}|.$$

Il faut alors montrer la convergence de la série $|a_{mn}|$. Or,

$$\begin{aligned}\sum |a_{mn}| &\leq \sum (m^2+n^2)|a_{mn}|\frac{1}{m^2+n^2} \\ &\leq \Big(\sum (m^2+n^2)^2|a_{mn}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum \frac{1}{(m^2+n^2)^2}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Les deux séries du dernier membre convergent; la continuité se déduit de celle des termes de la série qui définit f.

Exercice III

1) On a,

$$||A(g)||_{L^2} \leq (\sup|a|)||g||_{L^2} = ||g||_{L^2}$$

d'où la continuité. A est auto-adjoint car la fonction a est réelle.

2) Supposons que λ soit une valeur propre de A et g une fonction propre correspondante (non identiquement nulle).

$$A(g) = \lambda g \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ a(x)g(x) = \lambda g(x).$$

Si $a(x) \neq \lambda$ alors on doit avoir $g(x) = 0$. Or, il y a au plus deux valeurs de x pour laquelle $a(x) = \lambda$, on a donc $g(x) = 0$ presque partout ce qui est une contradiction.

3) Si $\lambda \notin [0, 1]$ alors,

$$|\frac{1}{1+x^2} - \lambda| > \inf\{|\lambda|, |\lambda - 1|\} > 0.$$

La fonction $\frac{1}{a-\lambda}$ est bornée. L'opérateur,

$$B(f) = \frac{1}{a-\lambda} f$$

est continue sur L^2 et est l'inverse de $A - \lambda$.
4) Choisissons x_0 tel que $\lambda = \frac{1}{1+x_0^2}$. Soit g une fonction égale à 1 au voisinage de x_0 et nulle ailleurs; g est dans $L^2(\mathbf{R})$. Si g est dans l'image de $A - \lambda$, il existe $f \in L^2$ telle que,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (\frac{1}{1+x^2} - \lambda) f(x) = g(x).$$

En particulier, dans le voisinage où g vaut 1,

$$(\frac{1}{1+x^2} - \lambda) f(x) = 1,$$

ce qui implique,

$$f(x) = \frac{(1+x^2)(1+x_0^2)}{(x_0 - x)(x_0 + x)}$$

dans ce voisinage et n'est donc pas de carré intégrable.
5) Le spectre de A est inclus dans $[0,1]$ et contient $]0,1]$. Comme il est fermé,

$$\mathrm{spec}(A) = [0,1].$$

6) $\mathcal{F}_1$ et $\overline{\mathcal{F}}_1$ sont des isométries sur L^2, donc,

$$\|Rf||_{L^2} = \|a\mathcal{F}_1 f\| \leq \|\mathcal{F}_1 f\| = \|f\|.$$

7) On a

$$(R - \lambda) = \mathcal{F}_1^{-1} \circ (A - \lambda) \circ \mathcal{F}_1$$

car $\overline{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1^{-1}$. Si $A - \lambda$ n'est pas surjectif ou est inversible, il en est de même de $R - \lambda$. Donc,

$$\mathrm{spec}(R) = \mathrm{spec}(A).$$

8) Sous les hypothèses, on a, d'après 6.4.8,

$$\mathcal{F}_1((I+\Delta)f) = (1+|\xi|^2)\mathcal{F}_1(f)$$

d'où $R((I+\Delta)f) = \overline{\mathcal{F}}_1(a\mathcal{F}_1((I+\Delta)f)) = (\overline{\mathcal{F}}_1(a(1+|\xi|^2)\mathcal{F}_1(f))$
$= \overline{\mathcal{F}}_1\mathcal{F}_1(f) = f.$

c'est-à-dire, $R \circ (I+\Delta) =$ Identité.

Problème I

1) $t^z = e^{z\log(t)}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ ($t > 0$).

2) Posons $\mathcal{R}e(z) = x > 0$, alors

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{x-1}$$

est intégrable en $+\infty$ car majorée par C/t^2. En 0, on a $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ qui est intégrable car $x - 1 > -1$.

3) Soit $0 < \epsilon < \mathcal{R}e(z) < R$. On se propose d'appliquer le théorème 2.2.16. Posons $f(t,z) = e^{-t}t^{z-1}$, pour z fixé, la fonction est sommable en t et, pour $t > 0$ fixé, elle est holomorphe en z. De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t,z) = e^{-t}(\mathrm{log}t)t^{z-1}$$

$$|\frac{\partial f}{\partial z}| \leq e^{-t}(\mathrm{log}t)t^{\epsilon-1} \quad \text{pour } t \in [0,1]$$

$$|\frac{\partial f}{\partial z}| \leq e^{-t}(\mathrm{log}t)t^{R-1} \quad \text{pour } t \in [1,+\infty[.$$

Cette fonction est donc intégrable en 0 car équivalente à $\frac{\log t}{t^{1-\epsilon}} = \frac{1}{t^{1-\epsilon/2}} t^{\epsilon/2} \log t$. Elle est aussi intégrable en $+\infty$. Le théorème 2.2.16 montre donc l'holomorphie de Γ sur le demi-plan $\mathcal{R}ez > 0$.
4) Si $x \in \mathbf{R}$ et $x > 0$, une intégration par parties donne,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt &= -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

5) $\Gamma(z+1)$ et $z\Gamma(z)$ sont deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}e(z) > 0$ qui coïncident sur $\mathbf{R}_+$, elles sont donc égales.
6) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!.$$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{2n-1}{2}\Gamma(n-\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2^n}\Gamma(1/2) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

7) $\Gamma(z+n)$ est holomorphe sur $\mathcal{R}e(z) > -n$ et le dénominateur s'annule pour $z = 0, -1, \dots, -(n-1)$. Le domaine d'holomorphie est donc

$$\{z \mid \mathcal{R}e(z) > -n\} \setminus \{-(n-1), -(n-2), \dots, -1, 0\}.$$

8) On a,

$$f(n+1,z) = \frac{\Gamma(n+1+z)}{(z+n)\dots z} = \frac{(z+n)\Gamma(n+z)}{(z+n)\dots z} = f(n,z),$$

dès que les fonctions sont définies. En particulier, si $\mathcal{R}e(z) > 0$,

$$f(n,z) = \Gamma(z).$$

On démontre le cas général par récurrence.
9) Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{-\mathbf{N}\}$, on choisit un entier n tel que $-n < \mathcal{R}e(z)$ et on pose,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\ldots(z+1)z}$$

Cela ne dépend pas de n et est holomorphe au voisinage de z et coïncide avec la définition intégrale de Γ pour $\mathcal{R}e(z) > 0$

Problème II 1) Le théorème de Green-Riemann donne,

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int\int_D dxdy = A.$$

En effet $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = x$.
2) La fonction z est périodique et de classe C^1, elle est donc dans $L^2([-\pi,\pi])$ ou, ce qui revient au même, dans $L^2_{2\pi}$ avec les notations du polycopié.
L'égalité signifie donc que la série converge en moyenne quadratique et est égale presque partout à la fonction.
3) Il n'est, a priori, pas permis de dériver la série terme à terme. Par contre, z' étant continue, elle est dans $L^2([-\pi,\pi])$, on peut donc calculer ses coefficients par la formule habituelle,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z'(s)e^{-ins}ds = \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(s)e^{-ins}ds = inc_n$$

par intégration par parties.

4) On a,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(x(s)y'(s) - y(s)x'(s))ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Im}(\overline{z}(s)z'(s))ds = \pi\mathrm{Im}(z|z').$$

Ici, Im désigne la partie imaginaire.
5) Le produit scalaire des deux fonctions de $L^2_{2\pi}$ que sont z et z' se calcule à l'aide de leurs coefficients de Fourier,

$$(z|z') = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{c_n}(inc_n),$$

d'où,

$$A = \pi\sum n|c_n|^2.$$

6) Si la courbe est parcourue à vitesse constante $|z'(s)|$ =C. La longueur est,

$$L = \int_{-\pi}^{\pi}|z'(s)|ds = 2\pi C$$

d'où la vitesse $|z'(s)| = \frac{L}{2\pi}$.
7) On calcule,

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z'(s)|^2ds = \sum n^2|c_n|^2,$$

en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval.
8) On a alors,

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \sum n^2|c_n|^2 \geq \sum n|c_n|^2 = \frac{A}{\pi}.$$

Ici on a utilisé $n^2 \geq n$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$. C'est l'inégalité désirée.

9) Si l'égalité est réalisée dans l'inégalité ci-dessus, on doit avoir $c_n = 0$ dès que $n \neq 0$ ou $n \neq 1$. Les courbes qui réalisent l'égalité sont donc données par,

$$z(s) = c_0 + c_1 e^{is}.$$

Ce sont des cercles. On vérifie, par ailleurs, que les cercles satisfont l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique.