Mathématiques MAT 432
Analyse de Fourier et théorie spectrale
Correction de l'interrogation écrite du 22 septembre 2003

Exercice 1. La fonction $f(z) = \frac{e^{izt}}{(z-i)(z-ia)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{i, ia\}$.

Si $a \neq 1$, elle possède donc deux pôles simples aux points $z_1 = i$ et $z_2 = ia$. Les résidus de f en ces points sont $Res(f,i) = \frac{e^{-t}}{i(1-a)}$ et $Res(f,ia) = \frac{e^{-at}}{i(a-1)}$.

Si $a = 1$, la fonction $f(z)$ possède un pôle double au point $z_1 = i$. On écrit $h(z) = e^{izt} = h(i) + (z-i)h'(i) + (z-i)^2 u(z)$ où $u(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le résidu de f en ce point est $Res(f,i) = h'(i) = ite^{-t}$.

Soit $R > sup(a,1)$.

<u>Si $t \geq 0$</u> : Considérons le contour formé du segment $\gamma_0 = [-R,R]$ de la droite réelle et du demi cercle γ_R dans le demi plan positif paramétré par $z = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [0,\pi]$.

Le théorème des résidus donne donc

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = \begin{cases} 2i\pi(Res(f,i) + Res(f,ia)) & \text{si } a \neq 1 \\ 2i\pi Res(f,i) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

On a $\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta$ et $\mid f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} \mid < \frac{e^{-Rtsin\theta}R}{(R-1)(R-a)}$. Comme $t \geq 0$ et $sin\theta \geq 0$ pour $\theta \in [0,\pi]$, on obtient que $\lim\limits_{R\to+\infty} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} = 0$ et il existe $M > 0$ tel que, pour tout $R > sup(a,1)$ et tout $\theta \in [0,\pi]$ l'on ait $\mid f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} \mid < M \in L^1([0,\pi])$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgues on obtient $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Pour $t \geq 0$, on a donc $\begin{array}{ll} \text{si } a \neq 1 & \text{alors } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-i)(x-ia)}dx = 2\pi\frac{e^{-at}-e^{-t}}{a-1} \\ \text{si } a = 1 & \text{alors } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-i)(x-ia)}dx = -2\pi te^{-t} \end{array}$

<u>Si $t < 0$</u> : Considérons cette fois le contour formé du segment $\gamma_0 = [-R,R]$ de la droite réelle (parcouru de R à $-R$) et du demi cercle γ'_R dans le demi plan négatif paramétré par $z = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [-\pi, 0]$. La fonction f n'a pas de pôles dans le demi-plan négatif et donc le théorème des résidus donne

$$\int_\gamma f(z)dz + \int_{\gamma'_R} f(z)dz = 0$$

On a, de même que précédemment $\mid f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta} \mid < \frac{e^{-Rtsin\theta}R}{(R-1)(R-a)}$ et donc comme $t < 0$ et $sin\theta \leq 0$ pour $\theta \in [-\pi,0]$, on en déduit que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Par suite, l'intégrale cherchée est nulle pour $t < 0$

Conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(x-i)(x-ia)}dx = \begin{cases} 2\pi\frac{e^{-at}-e^{-t}}{a-1}\mathbf{1}_{[0,\infty[} & \text{si } a \neq 1 \\ -2\pi te^{-t}\mathbf{1}_{[0,\infty[} & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. La fonction $u(z) = z^{5/2} = e^{5l(z)/2}$ est définie sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[$. Sur cet ouvert, la fonction $f(z) = \frac{z^{5/2}}{z^2+1} = \frac{z^{5/2}}{(z+i)(z-i)}$ possède deux pôles simples aux points $z_0 = i = e^{i\pi/2}$ et $z_1 = -i = e^{-i\pi/2}$. On obtient

$$Res(f, i) = \frac{e^{5i\pi/4}}{2i} = \frac{e^{3i\pi/4}}{2}$$

$$Res(f, -i) = \frac{e^{-5i\pi/4}}{-2i} = \frac{e^{-3i\pi/4}}{2}$$

Exercice 3. Il s'agit du développement en demi-période et en terme de la fonction sinus de la fonction cos(x) dans $L^2(0, \pi)$. On a donc, pour $p \geq 1$,

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi cos(x) sin(px) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (sin(p+1)x + sin(p-1)x) dx$$

Par conséquent, on a : $a_1 = 0$ et pour $p \neq 1$, on a

$$a_p = \frac{2p}{\pi(p^2-1)}(1 + (-1)^p)$$

Exercice 4. La fonction $g(z) = z$ vérifie la propriété voulue et c'est la seule par le principe du prolongement analytique. (Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant la même propriété, le point 0 est un zéro non isolé de $f - g$.)