COMMENT DÉFINIR UNE TOPOLOGIE ?

GRÉGORY BERHUY

Le but de ce petit texte est de donner différentes manières de définir un espace topologique (autrement que par les ouverts).

Le propos de ce texte n'étant pas de se substituer à un cours de topologie, une connaissance du vocabulaire et des exemples de base de topologie générale est souhaitable.

1. Définition par des ouverts, des fermés

On commence par rappeler la définition d'un espace topologique.

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une *topologie sur* X est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X (i.e. un sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$), vérifiant les propriétés suivantes :

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(O2) $\mathcal{O}$ est stable par union quelconque : pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$;

(O3) $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie : pour tous $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, on a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

Une récurrence facile montre que (O3) est équivalent à : pour tout $n \geq 0$, et pour tous $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}$, on a $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{O}$.

Un *espace topologique* est un couple $(X, \mathcal{O})$, où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est un ensemble d'ouverts de X. On dit aussi que $\mathcal{O}$ est une *topologie sur* X.

Un élément de $\mathcal{O}$ est appelé un *ouvert* de X. Un sous-ensemble de X est dit *fermé* si c'est le complémentaire d'un ouvert.

On a le lemme suivant, immédiat d'après les propriétés du complémentaire.

Lemme 1.2. *Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X, et soit $\mathscr{F}_{\mathcal{O}} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{O}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des fermés de X.*

Alors :

(i) $\emptyset, X \in \mathscr{F}_{\mathcal{O}}$;

(ii) *$\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ est stable par intersection quelconque : pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathscr{F}_{\mathcal{O}}$;*

(iii) *$\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ est stable par union finie : pour tous $F_1, F_2 \in \mathscr{F}_{\mathcal{O}}$, on a $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}_{\mathcal{O}}$.*

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 1.3. Soit X un ensemble. Une *topologie de fermés sur X* est un ensemble $\mathscr{F}$ de parties de X (i.e. un sous-ensemble de $\mathscr{P}(X)$), vérifiant les propriétés suivantes :

(F1) $\emptyset, X \in \mathscr{F}$;

(F2) $\mathscr{F}$ est stable par intersection quelconque : pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{F}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i \in \mathscr{F}$;

(F3) $\mathscr{F}$ est stable par union finie : pour tous $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, on a $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$.

Une récurrence facile montre que (F3) est équivalent à : pour tout $n \geq 0$, et pour tous $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}$, on a $F_1 \cup \ldots \cup F_n \in \mathscr{F}$.

Exemples 1.4.

(1) Si $\mathcal{O}$ est une topologie sur X, $\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ est une topologie de fermés de X, d'après le lemme 1.2.

(2) Si $\mathscr{F}$ est une topologie de fermés sur X, $\mathcal{O}_{\mathscr{F}} = \{X \setminus F \mid F \in \mathscr{F}\}$ est une topologie sur X.

En effet, c'est clair d'après les définitions et les propriétés du passage au complémentaire.

On a alors le théorème suivant, qui nous dit en substance que l'on peut définir une unique topologie en se donnant un ensemble de fermés.

Théorème 1.5. *Soit X un ensemble. On a une correspondance bijective entre l'ensemble* $\mathrm{Topo}(X)$ *des topologies sur X et l'ensemble* $\mathrm{Topf}(X)$ *des topologies de fermés sur X. Cette correspondance est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longmapsto & \mathscr{F}_{\mathcal{O}} \\ \mathcal{O}_{\mathscr{F}} & \longleftarrow & \mathscr{F}. \end{array}$$

Démonstration. On sait déjà que $\mathscr{F}_{\mathcal{O}}$ est une topologie de fermés et $\mathcal{O}_{\mathscr{F}}$ est une topologie, d'après les exemples précédents. Il reste à voir que les deux applications de l'énoncé sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire :

(a) pour toute famille d'ouverts $\mathcal{O}$, on a $\mathcal{O}_{\mathscr{F}_{\mathcal{O}}} = \mathcal{O}$;

(b) pour toute famille de fermés $\mathscr{F}$, on a $\mathscr{F}_{\mathcal{O}_{\mathscr{F}}} = \mathscr{F}$.

Ceci est clair puisque pour toute partie Y de X, on a $(Y^c)^c = Y$. □

Tout ce qui précède n'est franchement qu'un tissu d'évidences. Néanmoins, le message à retenir ici est que l'on peut définir une unique topologie sur X par ses fermés. Nous allons maintenant parler un peu de voisinages.

2. Définition par une famille de voisinages

Commençons par quelques considérations générales sur les ensembles d'ouverts.

Lemme 2.1. *Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Pour tout $x \in X$, on pose*

$$\mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x) = \{V \subset X \mid \text{ il existe } U \in \mathcal{O} \text{ tel que } x \in U \text{ et } U \subset V\}.$$

Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$ possède les propriétés suivantes :

(i) *pour tout $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, on a $x \in V$;*

(ii) *$X \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$;*

(iii) *pour tout $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$ et tout $V' \subset X$, on a $V \subset V' \Longrightarrow V' \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$;*

(iv) *pour tous $V_1, V_2 \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, on a $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$;*

(v) *pour tout $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, il existe $W \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$ tel que $W \subset V$, et pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(y)$.*

Démonstration. Le point (i) découle de la définition de $\mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, et le point (ii) est clair, puisque $X \in \mathcal{O}$. Si maintenant une partie V de X contient un ouvert U contenant x, alors tout partie de X contenant V contient aussi U (qui contient x), d'où (iii). Soient maintenant $V_1, V_2 \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$. Par hypothèse, il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ deux ouverts contenant x tels que $U_1 \subset V_1$ et $U_2 \subset V_2$. Mais alors, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ et contient x, et on a $U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$. Par conséquent, $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, d'où (iv). Il reste à démontrer (v). Soit $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$. Il existe donc $U \in \mathcal{O}$ contenant x tel que $U \subset V$. Remarquons que $U \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$ par définition de $\mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$, et bien entendu $U \subset V$. De plus, pour tout $y \in U$, on a $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(y)$, puisque $U \subset V$ et $y \in U$. Ceci achève la démonstration. □

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.2. Soit X un ensemble. Une *topologie de voisinages de* X est une famille $(\mathscr{V}(x))_{x \in X}$ d'ensembles de parties de X vérifiant les propriétés suivantes pour tout $x \in X$:

(V1) pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, on a $x \in V$;

(V2) $X \in \mathscr{V}(x)$;

(V3) pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$ et tout $V' \subset X$, on a $V \subset V' \Longrightarrow V' \in \mathscr{V}(x)$;
(V4) pour tous $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(x)$, on a $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}(x)$;
(V5) pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, il existe $W \in \mathscr{V}(x)$ tel que $W \subset V$, et pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathscr{V}(y)$.

Si $x \in X$, un élément de $\mathscr{V}(x)$ est appelé un *voisinage de* x.

Remarques 2.3.

On peut reformuler les propriétés de l'ensemble des voisinages d'un point $x \in X$ comme suit :

(V1) x est contenu dans tout voisinage de x ;
(V2) X est un voisinage de x ;
(V3) toute partie de X contenant un voisinage de x est un voisinage de x ;
(V4) l'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x ;
(V5) tout voisinage V de x contient un voisinage W de x tel que V soit un voisinage de chaque point de W.

Comme le nom « voisinage » le suggère, on peut considérer qu'un voisinage de x est un ensemble qui contient des points à proximité de x ou autrement dit qui contient des voisins de x (comme en urbanisme !). Les axiomes requis sont alors assez conformes à l'intuition que l'on s'en fait : x est son propre voisin, l'espace entier contient des voisins de x, etc. Le dernier axiome dit en substance qu'un voisin de x est aussi voisin de tout voisin de x suffisamment proche.

Bien évidemment, (V4) est équivalent à : pour tout $n \geq 0$, et tous $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{V}(x)$, on a $V_1 \cap \ldots \cap V_n \in \mathscr{V}(x)$.

L'axiome (V5) est souvent remplacé par l'axiome suivant :

(V5$'$) pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, il existe $V' \in \mathscr{V}(x)$ tel que pour tout $y \in V'$, on a $V \in \mathscr{V}(y)$.

Ces deux formulations sont clairement équivalentes : étant donné $V \in \mathscr{V}(x)$, si V' vérifie les propriétés de (V5), alors $W = V \cap V'$ vérifie les propriétés de (V5$'$), et si un ensemble W vérifie les propriétés de (V5$'$), il vérifie aussi les propriétés de (V5).

Exemples 2.4.

(1) Si $\mathcal{O}$ est une topologie sur X, et si $x \in X$, tout ouvert contenant x est un voisinage de x.
(2) Si $\mathcal{O}$ est une topologie sur X, alors la famille $\mathscr{V}_{\mathcal{O}} = (\mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x))_{x \in X}$ définie dans le lemme 2.1 est une topologie de voisinages de X, par définition même (on a tout fait pour !)

Avant de continuer, notons la caractérisation suivante des ouverts en termes de voisinages.

Lemme 2.5. *Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Alors, un sous-ensemble de X est un ouvert de X si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points (par rapport à $\mathscr{V}_{\mathcal{O}}$).*

Autrement dit, pour tout $U \subset X$, on a $U \in \mathcal{O}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, on a $U \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$.

Démonstration. On a déjà vu qu'un ouvert est voisinage de chacun de ses points. Inversement, soit $U \subset X$ tel que pour tout $x \in U$, on a $U \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}}(x)$. Soit $x \in U$. Alors, par hypothèse, il existe $U_x \in \mathcal{O}$ tel que $x \in U_x$ et $U_x \subset U$. On a alors $\displaystyle\bigcup_{x \in U} U_x = U$. En effet, on a $\displaystyle\bigcup_{x \in U} U_x \subset U$ puisque chaque U_x est inclus de U. De plus, pour tout $y \in U$, on a $y \in U_y \subset \displaystyle\bigcup_{x \in U} U_x$, d'où l'égalité annoncée. Comme une réunion quelconque d'ouverts de X est un ouvert de X, on obtient que U est un ouvert de X. □

Notre but est maintenant de montrer que l'on peut définir une topologie de manière unique à l'aide d'une famille de voisinages. Le lemme précédent suggère de prendre l'ensemble des parties de X qui sont voisinages de chacun de leur point. Cela va effectivement fonctionner, comme la suite le démontre.

Lemme 2.6. *Soit X un ensemble, et soit $\mathscr{V} = (\mathscr{V}(x))_{x \in X}$ une topologie de voisinages sur X. Alors, l'ensemble*

$$\mathcal{O}_{\mathscr{V}} = \{U \subset X \mid \text{ pour tout } x \in U, \text{ on a } U \in \mathscr{V}(x)\}$$

est une topologie sur X.

Démonstration. Clairement, $\emptyset$ est voisinage de chaque de ses points, puisqu'il n'en contient aucun. De plus, X est voisinage de chacun de ses points, puisque $X \in \mathscr{V}(x)$ pour tout $x \in X$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathscr{V}}$, et soit $x \in \displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$. Alors, il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Par hypothèse, $U_j \in \mathscr{V}(x)$. Comme $U_j \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i, \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{V}(x)$, par définition d'une topologie de voisinages. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i$ est voisinage de chacun de ses points et par conséquent $\displaystyle\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$. Enfin, soient $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$, et soit $x \in U_1 \cap U_2$. Comme $x \in U_1$ et $x \in U_2$, on a $U_1 \in \mathscr{V}(x)$ et $U_2 \in \mathscr{V}(x)$. Par définition d'une topologie de voisinages, on a alors $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{V}(x)$. Par conséquent $U_1 \cap U_2$ est voisinage de chacun de ses points, et on a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$, d'où le résultat. $\square$

On peut alors énoncer le théorème que l'on avait en vue.

Théorème 2.7. *Soit X un ensemble. On a une correspondance bijective entre l'ensemble* $\mathrm{Topo}(X)$ *des topologies sur X et l'ensemble* $\mathrm{Topv}(X)$ *des topologies de voisinages de X. Cette correspondance est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longmapsto & \mathscr{V}_{\mathcal{O}} \\ \mathcal{O}_{\mathscr{V}} & \longleftarrow & \mathscr{V}. \end{array}$$

Démonstration. Si $\mathcal{O}$ est une topologie, le lemme 2.1 montre que $\mathscr{V}_{\mathcal{O}}$ est une topologie de voisinages de X. D'autre part, si $\mathscr{V}$ est une famille de voisinages de X, le lemme 2.6 montre que $\mathcal{O}_{\mathscr{V}}$ est une topologie sur X. Il reste donc à démontrer que les deux applications sont inverses l'une de l'autre.

Montrons tout d'abord que pour toute topologie $\mathcal{O}$ sur X, on a $\mathcal{O}_{\mathscr{V}_{\mathcal{O}}} = \mathcal{O}$. Cette égalité dit exactement qu'un sous-ensemble de X est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points, ce qui a été établi dans le lemme 2.5.

Soit $\mathscr{V}$ une topologie de voisinages sur X, et montrons que $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}} = \mathscr{V}$.

Remarquons que pour tout $x \in X$, on a

$$\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}}(x) = \{V \subset X \mid \text{il existe } U \in \mathcal{O}_{\mathscr{V}}, x \in U, U \subset V\}.$$

Autrement dit, pour tout $V \subset X$, on a $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}}(x)$ si et seulement s'il contient un sous-ensemble U contenant x tel que, pour tout $y \in U$, on a $U \in \mathscr{V}(y)$.

En particulier, pour tout $x \in X$, en prenant $y = x$ dans ce qui précède, on voit que si $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}}(x)$, alors V contient un sous-ensemble $U \in \mathscr{V}(x)$. Mais alors, $V \in \mathscr{V}(x)$ par définition d'une topologie de voisinages. Inversement, si $V \in \mathscr{V}(x)$, posons

$$U = \{y \in U \mid V \in \mathscr{V}(y)\}.$$

Alors, $x \in U$ car $V \in \mathscr{V}(x)$. De plus, $U \subset V$. En effet, soit $y \in U$. Alors, $V \in \mathscr{V}(y)$. En particulier, $y \in V$.

Montrons que pour tout $y \in U$, on a $U \in \mathscr{V}(y)$. Soit $y \in U$. Alors, $V \in \mathscr{V}(y)$. D'après la définition d'une topologie de voisinages, il existe $W \subset V$ tel que $y \in W$, et pour tout $z \in W$, on a $V \in \mathscr{V}(z)$. Puisque on a $V \in \mathscr{V}(z)$ pour tout $z \in W$, on a $W \subset U$. Comme $W \in \mathscr{V}(y)$, on a alors $U \in \mathscr{V}(y)$. Bref, $V \in \mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}}(x)$.

On a donc démontré l'égalité $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{\mathscr{V}}}(x) = \mathscr{V}(x)$ pour tout $x \in X$, et ceci achève la démonstration. $\square$

On peut donc définir une topologie de manière unique à partir de ses voisinages.

Comme on l'a vu, l'idée sous-jacente de voisinage est celle de proximité. Nous proposons maintenant deux autres façons de définir une notion de proximité, qui généralise toutes deux la notion d'adhérence.

3. Définition à l'aide d'un opérateur de clôture

Commençons par rappeler la définition d'adhérence. Nous le ferons ici pour une topologie classique.

Définition 3.1. Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Si A est une partie de X, *l'adhérence de* A, notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés de X (par rapport à la topologie $\mathcal{O}$) contenant A. Autrement dit, c'est le plus petit fermé de X contenant A (au sens de l'inclusion).

On dit que $x \in X$ est *adhérent à* A si $x \in \overline{A}$.

Remarque 3.2. La notion d'adhérence reflète une idée de proximité, même si ce n'est pas très apparent. Il est peut-être plus simple de passer au complémentaire, afin de réaliser que les points non adhérents à une partie A sont « éloignés » de A. On a $x \in X \setminus \overline{A}$ si et seulement s'il existe un ouvert U de X disjoint de A contenant x. Ainsi, un point non adhérent à A non seulement n'appartient pas à A, mais il en est de même pour tout un voisinage de A. Intuitivement, cela colle bien à l'idée que x « n'adhère pas à » A.

On peut aussi se faire une vision positive de cette idée de proximité dans les espaces métriques. Il est bien connu que dans ce cas, les points adhérents à A sont les limites de suites de points de A. En particulier, pour tout $x \in \overline{A}$, il existe une infinité de points de A arbitrairement proches de x.

Rappelons quelques propriétés de l'adhérence.

Lemme 3.3. *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Alors, on a :*

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
(2) *pour tout $A \subset X$, on a $A \subset \overline{A}$;*
(3) *pour tout $A \subset X$, on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;*
(4) *pour tous $A, B \subset X$, on a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

De plus, une partie A de X est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration. Remarquons que si A est fermé, A est le plus petit fermé de X contenant A, et donc $\overline{A} = A$. Inversement, si $A = \overline{A}$, alors

$\overline{A}$ est fermé, puisque $\overline{A}$ l'est. Comme $\emptyset$ et $\overline{A}$ sont fermés, on en déduit (1) et (3). Comme $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A, il contient A, d'où (2). Enfin, pour tous $A, B \subset X$, puisque $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, on a $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Mais alors, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$, et donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. D'autre part, on a $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$. Ainsi, $\overline{A \cup B}$ est un fermé de X contenant A, d'où $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. On montre de même que $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Finalement, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Par conséquent, on obtient (4). $\square$

On peut maintenant définir un opérateur de clôture.

Définition 3.4. Soit X un ensemble. Un *opérateur de clôture sur X* est une application $\mathscr{C}\ell : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(CL1) $\mathscr{C}\ell(\emptyset) = \emptyset$;

(CL2) pour tout $A \subset X$, on a $A \subset \mathscr{C}\ell(A)$;

(CL3) pour tout $A \subset X$, on a $\mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(A)) = \mathscr{C}\ell(A)$;

(CL4) pour tous $A, B \subset X$, on a $\mathscr{C}\ell(A \cup B) = \mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(B)$.

Exemple 3.5. Soit $\mathscr{F}$ une topologie de fermés sur X. Pour tout $A \subset X$, on pose

$$\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(A) = \bigcap_{\substack{F \in \mathscr{F} \\ A \subset F}} F.$$

Alors, $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}$ est un opérateur de clôture sur X.

En effet, il suffit de recopier la démonstration du lemme 3.3. On peut aussi invoquer ce même lemme, en l'appliquant à la topologie $\mathcal{O}_{\mathscr{F}}$ (i.e. la topologie dont les ouverts sont les complémentaires des éléments de $\mathscr{F}$).

Ce lemme dit d'ailleurs que l'opérateur d'adhérence par rapport à une topologie $\mathcal{O}$ est un opérateur de clôture. Ce n'est d'ailleurs rien d'autre que l'opérateur précédent pour la topologie de fermés définie par $\mathcal{O}$ (celle dont les éléments sont les complémentaires des éléments de $\mathcal{O}$).

Remarquons également que pour tout $A \subset X$, on a $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(A) \in \mathscr{F}$, puisqu'une intersection quelconque d'éléments de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.

Le lemme suivant donne une description légèrement différente des opérateurs de clôture.

Lemme 3.6. *Soit X un ensemble, et soit $\mathscr{C}\ell : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$. Alors, $\mathscr{C}\ell$ est un opérateur de clôture si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(CL1) $\mathscr{C}\ell(\emptyset) = \emptyset$;

(CL2) *pour tout* $A \subset X$*, on a* $A \subset \mathscr{C}\ell(A)$ *;*

(CL3′) *pour tous* $A, B \subset X$*, on a* $A \subset \mathscr{C}\ell(B) \Longrightarrow \mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(B)$ *;*

(CL4′) *pour tous* $A, B \subset X$*, on a* $\mathscr{C}\ell(A \cup B) \subset \mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(B)$.

Démonstration. Supposons que $\mathscr{C}\ell$ soit un opérateur de clôture. Alors, (CL1), (CL2) et (CL4′) sont clairement vérifiées. Soient $A, B \subset X$ tels que $A \subset \mathscr{C}\ell(B)$. Alors, on a $A \cup \mathscr{C}\ell(B) = \mathscr{C}\ell(B)$, et par conséquent $\mathscr{C}\ell(A \cup \mathscr{C}\ell(B)) = \mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(B))$. Par (CL4), on en déduit

$$\mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(B)) = \mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(B))).$$

Par (CL3), on obtient $\mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(B) = \mathscr{C}\ell(B)$, puis $\mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(B)$, d'où (CL4′).

Supposons maintenant que $\mathscr{C}\ell$ vérifie (CL1), (CL2), (CL3′) et (CL4′). Pour tout $A \subset X$, on a $\mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(A))$ par (CL1). De plus, comme $\mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(A)$, on a $\mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(A)) \subset \mathscr{C}\ell(A)$ par (CL4′). On en déduit que $\mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(A)) = \mathscr{C}\ell(A)$, d'où (CL3).

Si $A, B \subset X$, on a $\mathscr{C}\ell(A \cup B) \subset \mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(B)$ par (CL4′). De plus, on a

$$A \subset A \cup B \subset \mathscr{C}\ell(A \cup B)$$

par (CL2), et on en déduit que $\mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(A \cup B)$ par (CL4′). On montre de même que $\mathscr{C}\ell(B) \subset \mathscr{C}\ell(A \cup B)$, d'où

$$\mathscr{C}\ell(A) \cup \mathscr{C}\ell(B) \subset \mathscr{C}\ell(A \cup B).$$

Par conséquent, on a (CL4). □

On va maintenant voir que l'on peut définir une topologie de fermés (et donc une topologie tout court) à partir d'un opérateur de clôture. Le point de départ est la caractérisation d'un fermé comme étant une partie de X égale à son adhérence.

Lemme 3.7. *Soit* X *un ensemble, et soit* $\mathscr{C}\ell$ *un opérateur de clôture sur* X*. Alors, l'ensemble*

$$\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell} = \{F \subset X \mid \mathscr{C}\ell(F) = F\}$$

est une topologie de fermés sur X*.*

Démonstration. Par définition d'un opérateur de clôture, on a $\emptyset \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$. De plus, par définition d'un opérateur de clôture, on a $X \subset \mathscr{C}\ell(X)$. Mais $\mathscr{C}\ell(X)$ étant une partie de X, on a $\mathscr{C}\ell(X) = X$, d'où $X \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$.

Soit maintenant une famille $(F_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$. Par (CL2), on a $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset \mathscr{C}\ell(\bigcap\limits_{i\in I} F_i)$. De plus, pour tout $i \in I$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset F_i = \mathscr{C}\ell(F_i)$. Puisqu'un opérateur de clôture vérifie (CL4′), on a $\mathscr{C}\ell(\bigcap\limits_{i\in I} F_i) \subset F_i$, et ceci pour tout $i \in I$. Par conséquent, on obtient

$$\mathscr{C}\ell(\bigcap_{i\in I} F_i) \subset \bigcap_{i\in I} F_i.$$

Ainsi, $\mathscr{C}\ell(\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I} F_i$, d'où $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$.

Enfin, soient $F_1, F_2 \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$. Par (CL3), on a alors

$$\mathscr{C}\ell(F_1 \cup F_2) = \mathscr{C}\ell(F_1) \cup \mathscr{C}\ell(F_2) = F_1 \cup F_2,$$

d'où $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$. Ceci achève la démonstration. □

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.8. *Soit X un ensemble. Alors, on a une correspondance bijective entre l'ensemble* Topf(X) *des topologies de fermés sur X et l'ensemble* Topcl(X) *des opérateurs de clôture sur X. Cette correspondance est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \longmapsto & \mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}} \\ \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell} & \longleftarrow\!\!\shortmid & \mathscr{C}\ell. \end{array}$$

Démonstration. Le lemme 3.5 montre que pour toute topologie de fermés $\mathscr{F}$, l'application $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}$ est un opérateur de clôture, et le lemme 3.8 montre pour tout opérateur de clôture $\mathscr{C}\ell$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$ est une topologie de fermés. Montrons que les applications sont inverses l'une de l'autre.

Soit $\mathscr{F}$ une topologie de fermés, et montrons que $\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}} = \mathscr{F}$. Par définition, on a

$$\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}} = \{F \subset X \mid \mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F) = F\}.$$

Si $F \subset X$ vérifie $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F) = F$, on a $F \in \mathscr{F}$, car $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F) \in \mathscr{F}$ (cf. exemple 3.5). On a ainsi $\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}} \subset \mathscr{F}$. Soit maintenant $F \in \mathscr{F}$. Par définition d'un opérateur de clôture, on a $F \subset \mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F)$. De plus, comme $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F)$ est l'intersection des éléments de $\mathscr{F}$ contenant F, on a $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F) \subset F$, d'où $\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}(F) = F$. Ainsi, $F \in \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}}$ et $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell_{\mathscr{F}}}$. On a donc l'égalité voulue.

Soit maintenant $\mathscr{C}\ell$ un opérateur de clôture. On doit démontrer que pour tout $A \subset X$, $\mathscr{C}\ell(A)$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}_{\mathscr{C}\ell}$ contenant A, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}\ell(A) = \bigcap_{\substack{F \subset X \\ \mathscr{C}\ell(F) = F \\ A \subset F}} F.$$

Si $F \subset X$ vérifie $A \subset F$ et $\mathscr{C}\ell(F) = F$, alors $A \subset \mathscr{C}\ell(F)$, et donc $\mathscr{C}\ell(A) \subset \mathscr{C}\ell(F) = F$ par (CL4′). Par conséquent, on a $\mathscr{C}\ell(A) \subset$

$\bigcap_{\substack{F\subset X\\ \mathscr{C}\ell(F)=F\\ A\subset F}} F$. De plus, par (CL2) et (CL3), on a $A\subset \mathscr{C}\ell(A)$ et $\mathscr{C}\ell(\mathscr{C}\ell(A)) = \mathscr{C}\ell(A)$. Par conséquent, $\bigcap_{\substack{F\subset X\\ \mathscr{C}\ell(F)=F\\ A\subset F}} F \subset \mathscr{C}\ell(A)$. Finalement, on a l'égalité annoncée, d'où le résultat. □

Ce théorème dit en substance que l'on peut définir une unique topologie en spécifiant son opération d'adhérence.

4. Définition à l'aide d'une relation de proximité

Nous allons maintenant définir une relation de proximité sur un ensemble X. On commence par un lemme totalement évident.

Lemme 4.1. *Soit X un ensemble, et soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X. Alors, pour tous $A, B \subset X$, et pour tout $x \in X$, on a les propriétés suivantes :*

(1) *aucun élément de X n'est adhérent à $\emptyset$;*
(2) *si $x \in A$, alors x est adhérent à A ;*
(3) *si x est adhérent à $A\cup B$, x est adhérent à A ou x est adhérent à B ;*
(4) *si x est adhérent à A et si tout élément de A est adhérent à B, alors x est adhérent à B.*

Démonstration. Les propriétés (1), (2) et (3) découlent directement du lemme 3.3. Il reste à montrer que si $x\in\overline{A}$ et $A\subset\overline{B}$, on a $x\in\overline{B}$. Cela découle du fait que l'opérateur d'adhérence est un opérateur de clôture (cf. exemple 3.5), mais on peut le démontrer directement. En effet, comme $\overline{B}$ est un fermé de X contenant A, on a $\overline{A}\subset\overline{B}$. Ainsi, un élément adhérent à A est alors adhérent à B. □

Cela incite à poser la définition suivante.

Définition 4.2. Soit X un ensemble. *Une relation de proximité sur X* est une relation δ entre les éléments de X et l'ensemble des parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) pour tout $x \in X$, $x \not\delta \emptyset$;
(P2) pour tout $A\subset X$, et tout $x\in X$, on a $x\in A \Longrightarrow x\ \delta A$;
(P3) pour tous $A, B\subset X$, et tout $x\in X$, on a $x\ \delta A$ et $y\ \delta B$ pour tout $y\in B \Longrightarrow x\in B$;
(P4) pour tous $A, B\subset X$, et tout $x\in X$, on a $x\ \delta A\cup B \Longrightarrow x\ \delta A$ ou $x\ \delta B$.

Autrement dit, une relation de proximité sur X est une relation entre les éléments de X et l'ensemble des parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

(1) aucun élément de X n'est proche de $\emptyset$;
(2) si $x \in A$, alors x est proche de A ;
(3) si x est proche de A et si tout élément de A est proche de B, alors x est proche B ;
(4) si x est proche de $A \cup B$, x est proche de A ou x est proche de B.

Exemple 4.3. Soit X un ensemble. Si $\mathcal{O}$ est une topologie sur X, la relation « être adhérent à » est une relation de proximité sur X par le lemme 4.1.

L'exemple précédent se généralise en fait à tout opérateur de clôture.

Lemme 4.4. *Soit X un ensemble, et soit $\mathscr{C}\ell$ un opérateur de clôture sur X. Pour tout $x \in X$ et tout $A \subset X$, on note $x\ \delta_{\mathscr{C}\ell} A$ si $x \in \mathscr{C}\ell(A)$. Alors, $\delta_{\mathscr{C}\ell}$ est une relation de proximité sur X.*

Démonstration. Les propriétés (P1), (P2), (P3) et (P4) découlent respectivement des propriétés (CL1), (CL2), (CL3′) et (CL4′) d'un opérateur de clôture. □

Nous allons maintenant associer un opérateur de clôture à une relation de proximité.

Lemme 4.5. *Soit X un ensemble, et soit δ une relation de proximité sur X. Pour tout $A \subset X$, on pose*

$$\mathscr{C}\ell_\delta(A) = \{x \in X \mid x\ \delta A\}.$$

Alors, $\mathscr{C}\ell_\delta$ est un opérateur de clôture sur X.

Démonstration. Les propriétés (CL1), (CL2), (CL3′) et (CL4′) découlent respectivement des propriétés (P1), (P2), (P3) et (P4). Ainsi, $\mathscr{C}\ell_\delta$ est un opérateur de clôture sur X par le lemme 3.6. □

On a alors le résultat suivant.

Théorème 4.6. *Soit X un ensemble. Alors, on a une correspondance bijective entre l'ensemble* $\mathrm{Topprox}(X)$ *des relations de proximité sur X et l'ensemble* $\mathrm{Topcl}(X)$ *des opérateurs de clôture sur X. Cette correspondance est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \delta & \longmapsto & \mathscr{C}\ell_\delta \\ \delta_{\mathscr{C}\ell} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathscr{C}\ell. \end{array}$$

Démonstration. Le lemme 4.5 montre que pour toute relation de proximité δ, l'application $\mathscr{C}\ell_\delta$ est un opérateur de clôture, et le lemme 4.4 montre que pour tout opérateur de clôture $\mathscr{C}\ell$, $\delta_{\mathscr{C}\ell}$ est une relation de proximité sur X. Montrons que les applications sont inverses l'une de l'autre.

Soit δ une relation de proximité sur X. Pour tout $A \subset X$ et tout $x \in X$, on doit démontrer que $x\ \delta_{\mathscr{C}\ell_\delta} A$ si et seulement si $x\ \delta A$. Or, on a

$$x\ \delta_{\mathscr{C}\ell_\delta} A \iff x \in \mathscr{C}\ell_\delta(A) \iff x\ \delta A,$$

d'où le résultat.

Soit maintenant $\mathscr{C}\ell$ un opérateur de clôture sur X. Pour tout $A \subset X$, on a

$$\mathscr{C}\ell_{\delta_{\mathscr{C}\ell}}(A) = \{x \in X \mid x\ \delta_{\mathscr{C}\ell} A\} = \{x \in X \mid x \in \mathscr{C}\ell(A)\} = \mathscr{C}\ell(A).$$

Ainsi, $\mathscr{C}\ell_{\delta_{\mathscr{C}\ell}} = \mathscr{C}\ell$. Ceci achève la démonstration. □

Le théorème précédent et le théorème 3.8 donne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 4.7. *Soit X un ensemble. Alors, on a une correspondance bijective entre l'ensemble* $\mathrm{Topf}(X)$ *des topologies de fermés sur X et l'ensemble* $\mathrm{Topprox}(X)$ *des relations de proximité sur X. Cette correspondance est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \longmapsto & \mathscr{C}\ell_\delta \\ \delta_{\mathscr{C}\ell} & \longleftarrow & \mathscr{C}\ell. \end{array}$$

Exercice. Soit X un ensemble.

1.

(a) Montrer que si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille de topologies sur X, alors $\mathcal{O} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est une topologie sur X.

(b) Pour tout $i \in I$, soient $\mathscr{F}_i, \mathscr{V}_i, \mathscr{C}\ell_i, \delta_i$ la topologie de fermés, la topologie de voisinages, l'opérateur de clôture, la relation de proximité correspondant à $\mathcal{O}_i$. Décrire la topologie de fermés, la topologie de voisinages, l'opérateur de clôture, la relation de proximité correspondant à $\mathcal{O}$ en fonction de $\mathscr{F}_i, \mathscr{V}_i, \mathscr{C}\ell_i, \delta_i$.

2. Soit$X$ un ensemble, soit $\mathcal{O}$ une topologie sur X, et soit $Y \subset X$.

(a) Montrer que $\mathcal{O}_{|_Y} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$ est une topologie sur Y, appelée topologie induite.

(b) Soient $\mathscr{F}, \mathscr{V}, \mathscr{C}\ell, \delta$ la topologie de fermés, la topologie de voisinages, l'opérateur de clôture, la relation de proximité correspondant à $\mathcal{O}$. Décrire la topologie de fermés, la topologie de voisinages, l'opérateur de clôture et la relation de proximité correspondant à $\mathcal{O}_{|Y}$ en fonction de $\mathscr{F}, \mathscr{V}, \mathscr{C}\ell, \delta$.

On va maintenant utiliser les diverses façons de définir une topologie pour réinterpréter la notion de continuité.

5. Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in I$. Rappelons que f est dite *continue en* a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

On dit que f est continue (sur I) si f est continue en tout point de I.

Commençons par réinterpréter la définition en termes de voisinages. Rappelons tout d'abord que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties U de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$.

La topologie sur I est alors la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$.

Lemme 5.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$.*

Démonstration. Supposons que f soit continue en a, et soit V un voisinage de $f(a)$. Alors, il existe un ouvert U contenant $f(a)$ tel que $U \subset V$. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subset U$. Posons

$$W = f^{-1}(]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[) \cap I = \{x \in I \mid |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}.$$

Par hypothèse sur f, il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\cap I \subset W$. Comme $]a - \eta, a + \eta[\cap I$ est un ouvert de I contenant a, W est un voisinage de a. Par définition de W, on a alors

$$f(W) \subset]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subset U \subset V.$$

Inversement, supposons que pour tout voisinage V de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $V =]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$. C'est un ouvert contenant $f(a)$, donc un voisinage de $f(a)$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. Soit W' un ouvert de I contenant a tel que $W' \subset W$. On a donc $W' = U' \cap I$, où U' est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset U'$. Par conséquent,

$$]a - \eta, a + \eta[\cap I \subset U' \cap I = W' \subset W.$$

Mais alors, on a $f(]a - \eta, a + \eta[\cap I) \subset f(W) \subset V$, ce qui revient exactement à dire que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. $\square$

Dans tout ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, les topologies seront définies de manière usuelle, à partir d'une famille d'ouverts $\mathcal{O}$, et les notions de fermés, voisinages, adhérence, seront les notions classiquement définies à partir de cette topologie $\mathcal{O}$.

Ceci motive la définition suivante.

Définition 5.2. Soient X, Y deux espaces topologiques, soit $f : X \longrightarrow Y$ une application, et soit $a \in X$. On dit que f *est continue en* a si pour tout voisinage de $f(a)$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$.

On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de X.

Remarque 5.3. La définition de la continuité en a sera reformule aussi de la façon suivante : f est continue en a si pour tout voisinage de V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.

En effet, si cette dernière propriété est vérifiée, alors pour tout voisinage V de $f(a)$, $W = f^{-1}(V)$ est un voisinage de a et on a $f(W) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

Inversement, supposons que f soit continue en a, et soit V un voisinage de $f(a)$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. Autrement dit, $W \subset f^{-1}(V)$. Mais W étant un voisinage de a, $f^{-1}(V)$ aussi.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.4. *Soient X, Y deux espaces topologiques, soit $f : X \longrightarrow Y$ une application, et soit $a \in X$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *f est continue ;*
(2) *pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;*
(3) *pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X ;*
(4) *pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \in \overline{f(A)}$.*

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons f continue, et soit U un ouvert de Y. Si U est disjoint de $f(X)$, alors $f^{-1}(U)$ est vide, donc ouvert. Sinon, il existe au moins un point $a \in X$ tel que $f(a) \in U$. Comme U est ouvert, en particulier, U est un voisinage de $f(a)$. Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a. Soit $x \in f^{-1}(U)$. Alors $f(x) \in f(f^{-1}(U)) \subset U$. Ainsi, U est aussi un voisinage de $f(x)$, et donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x. On a donc montré que $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert par le lemme 2.5.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Il suffit de passer au complémentaire.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $a \in X$, soit V un voisinage de $f(a)$, et soit U un ouvert contenant $f(a)$ tel que $U \subset V$. Alors, $Y \setminus U$ est un fermé ne contenant pas $f(a)$, et par suite $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ est un fermé ne contenant pas a. Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est un ouvert contenant a. Comme $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, on en déduit que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. Ainsi, f est continue en a.

On a donc montré l'équivalence des trois premières propriétés. Nous allons maintenant montrer l'équivalence entre (3) et (4).

(3) $\Longrightarrow$ (4) Soit $A \subset X$. Alors $\overline{f(A)}$ est un fermé de Y, donc $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé de Y. Or, on a $f(A) \subset \overline{f(A)}$, et donc $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Comme $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé, on en déduit $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, soit $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Soit F un fermé, et soit $A = f^{-1}(F)$. On doit démontrer que $\overline{A} = A$. Par hypothèse, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))}$. Or $f(f^{-1}(F))$ est contenu dans F, qui est fermé, et donc $\overline{f(f^{-1}(F))} \subset F$. Mais alors $f(\overline{A}) \subset F$, soit $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Donc $\overline{A} = A$, et A est fermé. $\square$

Grâce aux résultats des paragraphes précédents, on peut donc définir la continuité d'une application $f : X \longrightarrow Y$ de diverses manières, toutes équivalentes :

(1) si les topologies sur X et Y sont définies par des ouverts, f est continue si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ;

(2) si les topologies sur X et Y sont définies par des topologies de fermés, f est continue si l'image réciproque de tout fermé est un fermé ;

(3) si les topologies sur X et Y sont définies par des topologies de voisinages, f est continue si pour tout $a \in X$, l'image réciproque d'un voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;

(4) si les topologies sur X et Y sont définies par des opérateurs de clôture $\mathscr{C}\ell_X$ et $\mathscr{C}\ell_Y$, f est continue si pour tout $A \subset X$, on a $f(\mathscr{C}\ell_X(A)) \subset \mathscr{C}\ell_Y(f(A))$;

(5) si les topologies sur X et Y sont définies par des relations de proximité δ_X et δ_Y , f est continue si pour tout $x \in X$ et tout $A \subset X$, on a $x \ \delta_X A \Longrightarrow f(x) \ \delta_Y f(A)$.

Tout ceci est parfaitement clair, vu toutes les correspondances établies précédemment. La dernière interprétation est peut-être la plus naturelle : f est continue si pour tout $A \subset X$, si x est proche de A, alors $f(x)$ est proche de $f(A)$ (une fonction continue ne peut pas faire de sauts). C'est particulièrement flagrant lorsque $A = \{a\}$.

Exercice. Soient X, Y deux ensembles, et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. Soit $\mathcal{O}_Y$ une topologie sur Y. Montrer que $\mathcal{O}_X = f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ est une topologie sur X, et que c'est la plus petite topologie qui rende f continue.

2. Donner la topologie de fermés, la topologie de voisinages, l'opérateur de clôture et la relation de proximité sur X en fonction de celles sur Y.