TOPOLOGIE COFINIE

GRÉGORY BERHUY

Le but de ce document est d'étudier les espaces topologiques munis de la topologie cofinie (connexité, compacité, suites convergentes, etc.). Toutes les notions de topologie utilisées seront rappelées au fur et à mesure.

Néanmoins, une connaissance de la topologie des espaces métriques est recommandée, ne serait-ce que pour mieux apprécier les bizarreries de la topologie cofinie.

Nous nous sommes efforcés de faire en sorte de n'admettre aucun résultat auxiliaire. Néanmoins, afin de ne pas trop délayer ce document et de nous concentrer spécifiquement sur la thématique proposée, nous utiliserons certains faits bien connus sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, faits dont nous reporterons la démonstration dans le dernier paragraphe (existence et propriété des bornes supérieures et inférieures, connexité des intervalles, etc.).

Table des matières

1. Topologie cofinie : définition et premières propriétés.

Commençons par des rappels.

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une *topologie* sur X est un ensemble $\mathscr{O}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\emptyset, X \in \mathscr{O}$;

(2) pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathscr{O}$, on a $\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{O}$;

(3) pour tout $n \geq 0$, et tous $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{O}$, on a $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathscr{O}$.

Autrement dit, une topologie sur X est un ensemble de parties de X contenant $\emptyset$ et X, stable par réunion quelconque et intersection finie.

Les éléments de $\mathscr{O}$ sont appelés les *ouverts* de X. Un *fermé* de X est un sous-ensemble de X qui est le complémentaire d'un ouvert.

Un *espace topologique* est un couple $(X, \mathscr{O})$, où X est un ensemble et $\mathscr{O}$ est une topologie sur X.

Exemple 1.2. L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ est bien entendu une topologie sur X, appelé *topologie discrète*. Par définition, tout sous-ensemble de X est ouvert et fermé pour la topologie discrète.

Remarque 1.3. Se donner les ouverts d'une topologie est équivalent à se donner les fermés de cette même topologie. On peut donc aussi définir une topologie sur X comme étant un ensemble $\mathscr{F}$ de parties de X contenant $\emptyset$ et X, stable par réunion finie et intersection quelconque.

Définissons maintenant l'objet de notre étude.

Lemme 1.4. *Soit X un ensemble. Alors, il existe une unique topologie sur X dont les fermés sont X et les sous-ensembles finis de X.*

Démonstration. L'unicité est claire, puisqu'une topologie est définie par l'ensemble de ses fermés (ou de ses ouverts). On va montrer que les complémentaires des éléments de

$$\mathscr{F} = \{X\} \cup \{F \in \mathscr{P}(X) \mid F \text{ fini } \}$$

vérifient les axiomes d'une famille de fermés. Tout d'abord, X est fermé, car $\emptyset$ est ouvert par définition. De plus, X est ouvert, car de complémentaire vide, donc $\emptyset$ est fermé.

Soient $F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F}(X)$. Si un des F_i est égal à X, leur réunion est égale à X, donc fermée. Si tous les F_i sont finis, leur réunion est finie, donc fermée.

Soient maintenant $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de fermés. Si I est ou si tous les F_i sont égaux à X, leur intersection est égale à X, donc fermée. Si au moins un des F_i est fini, leur intersection est finie, donc fermée. $\square$

Définition 1.5. Soit X un ensemble. La topologie sur X dont les fermés sont X et les sous-ensembles finis de X s'appelle la *topologie cofinie* sur X.

Ses ouverts sont par définition l'ensemble vide, et les sous-ensembles de X dont le complémentaire est fini.

Remarque 1.6. Si X est fini, tout sous-ensemble de X est fini, donc fermé, et la topologie cofinie n'est rien d'autre que la topologie discrète.

On continue par étudier la topologie induite sur un sous-ensemble. On commence par un rappel.

Définition 1.7. Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique, et soit A une partie de X. L'ensemble
$$\mathscr{O}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathscr{O}\}$$
vérifie les axiomes d'une topologie sur A, appelée *topologie induite sur A*.

Remarquons que, puisque $A \setminus (U \cap A) = (A \setminus U) \cap A$ pour tout $U \in \mathscr{O}$, la topologie induite sur A est l'unique topologie sur A dont les fermés sont les sous-ensembles $F \cap A$, où F est un fermé de X.

On a alors le lemme suivant.

Lemme 1.8. *Soit X un ensemble, et soit A une partie de X. La topologie induite sur A par la topologie cofinie sur X est la topologie cofinie sur A.*

Démonstration. Un fermé pour la topologie induite sur A est par définition de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de X. Les fermés de A sont donc A, ou les ensembles $F \cap A$, où F est un sous-ensemble fini de X. Or, un tel ensemble est un sous-ensemble fini de A. Inversement, si F' est une partie finie de A, c'est aussi une partie finie de X, et comme $F' = F' \cap A$, c'est donc un fermé pour la topologie induite.

Bref, les fermés de A pour la topologie induite sont A et les parties finies de A, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

On finit par étudier la propriété de séparation.

Définition 1.9. Un espace topologique $(X, \mathscr{O})$ est *séparé* si pour tous $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, il existe deux ouverts U_1, U_2 disjoints tels que $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$.

De manière équivalente, $(X, \mathscr{O})$ est *séparé* si pour tous $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, il existe deux fermés F_1, F_2 tels que $F_1 \cup F_2 = X$ vérifiant $x_1 \notin F_1$ et $x_2 \notin F_2$.

Notons qu'un espace topologique possédant au plus un élément est toujours séparé.

Remarque 1.10. Un sous-ensemble d'un espace topologique séparé est séparé.

En effet, soit X un espace topologique séparé, et soit A une partie de X. Soient $x_1, x_2 \in A$ distincts. Comme X est séparé, il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$. Mais comme $x_1, x_2 \in A$, on a $x_1 \in U_1 \cap A$ et $x_2 \in U_2 \cap A$. Cela démontre le résultat voulu, puisque $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$ sont deux ouverts de A, disjoints puisque U_1 et U_2 le sont.

Exemple 1.11. La topologie discrète sur un ensemble X est séparée. En effet, si X possède au plus un élément, il n'y a rien à faire. Si X possède au moins deux éléments, et si x_1 et x_2 sont deux points de X distincts, il suffit de prendre $U_1 = \{x_1\}$ et $U_2 = \{x_2\}$.

Lemme 1.12. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie. Alors, X est séparé si, et seulement si, X est fini.*

Démonstration. Si X est fini, la topologie cofinie est la topologie discrète (exemple 1.6), qui est séparée (exemple 1.11).

Supposons que X soit séparé. Si X possède au plus un élément, il est fini. Supposons maintenant que X possède au moins deux points x_1, x_2 deux points distincts. Par hypothèse, il existe deux fermés F_1, F_2 tels que $F_1 \cup F_2 = X$ vérifiant $x_1 \notin F_1$ et $x_2 \notin F_2$. Comme F_i ne contient pas x_i, on a $F_i \neq X$, pour $i = 1, 2$. Par définition de la topologie cofinie, F_1 et F_2 sont finis, et par conséquent $X = F_1 \cup F_2$ est fini. □

On finit ce paragraphe en étudiant les parties denses d'un ensemble muni de la topologie cofinie. On fait d'abord quelques rappels.

Définition 1.13. Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique. Si A est une partie de X, son *adhérence* $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de X contenant A. C'est le plus petit fermé de X contenant A.

La définition implique immédiatement que A est fermé si, et seulement si, $\overline{A} = A$.

À l'extrême opposé, on dit que A est *dense* si $\overline{A} = X$. On montre aisément que A est dense si, et seulement si, on a $A \cap U \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide U de X (nous n'aurons pas besoin de ce fait).

Lemme 1.14. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie. Alors, les parties denses de X sont X et les parties infinies de X.*

En particulier, si X est fini, X est l'unique partie dense de X.

Démonstration. Bien entendu, X est dense pour n'importe quelle topologie. Soit A une partie de X.

Si A est finie, A est fermée et donc $\overline{A} = A$. Si A est infinie, le seul fermé contenant A est X, puisque les fermés distincts de X sont finis. On a donc $\overline{A} = X$.

Cela montre qu'une partie infinie est dense, et qu'une partie finie n'est dense que si elle est égale à X, d'où le résultat. □

2. Compacité

Rappelons la définition de la (quasi-)compacité.

Définition 2.1. Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique. On dit que X est *quasi-compact* si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, on a

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \implies \text{ il existe } J \subset I \text{ fini tel que } X = \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Cela revient à dire que pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$, on a

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \implies \text{ il existe } J \subset I \text{ fini tel que } \bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset.$$

On dit que X est *compact* si X est quasi-compact et séparé. Une partie A de X est dite (quasi-)compacte si elle l'est pour la topologie induite.

Remarque 2.2. Gardons les notations précédentes.

Pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X, on a

$$A = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap A) \iff A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Vu la définition de la topologie induite, on voit que A est quasi-compacte si, et seulement si, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X, on a

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i \implies \text{ il existe } J \subset I \text{ fini tel que } A \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Bien entendu, ceci est tout à fait valable si $A = X$.

Exemples 2.3.

(1) Tout espace topologique fini est quasi-compact, puisqu'il ne possède alors qu'un nombre fini d'ouverts.
(2) Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact (résultat classique).
(3) Tout fermé d'un espace (quasi-)compact est (quasi-)compact.
    En effet, soit X un espace topologique, et soit F un fermé de X.
    Si X est séparé, F est séparé par la remarque 1.10.
    Supposons que X soit quasi-compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'ouverts de X tels que $F \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Comme F est fermé, F^c est ouvert. On a alors
    $$X = F^c \cup F \subset F^c \cup \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Par hypothèse sur X, il existe $J \subset I$ fini tel que

$$X \subset \bigcup_{j\in J} U_j \quad \text{ou} \quad X \subset F^c \cup \bigcup_{j\in J} U_j.$$

En intersectant avec F, on a dans les deux cas

$$F \subset \bigcup_{j\in J}(U_j \cap F) \subset \bigcup_{j\in J} U_j,$$

d'où le résultat.

Proposition 2.4. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie. Alors, toute partie de X est quasi-compacte. En particulier, une partie de X est compacte si, et seulement si, elle est finie.*

Démonstration. La topologie induite sur A est la topologie cofinie sur A d'après le lemme 1.8. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $A = X$.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. En particulier, il existe $i_0 \in I$ tel que U_{i_0} est non vide. Alors, $X \setminus U_{i_0}$ est fini. Soient $x_1, \ldots, x_r$ les éléments de $X \setminus U_{i_0}$. Par choix des U_i, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, il existe $i_k \in I$ tel que $x_k \in U_{i_k}$. Puisque tous les points de X distincts de $x_1, \ldots, x_r$ appartiennent à U_{i_0}, on a

$$X = \bigcup_{i=0}^{r} U_{i_k},$$

d'où la quasi-compacité de X. La dernière partie découle alors du lemme 1.12. $\square$

3. Connexité, connexité par arcs

Rappelons la définition d'espace connexe et connexe par arcs. Commençons par rappeler la définition d'une application continue.

Définition 3.1. Soient $(X_1, \mathscr{O}_1)$ et $(X_2, \mathscr{O}_2)$ deux espaces topologiques. Une application $f : X_1 \longrightarrow X_2$ est *continue* si l'image réciproque de tout ouvert de X_2 par f est un ouvert de X_1.

L'image réciproque se comportant bien par complémentaire, cela revient à demander que l'image réciproque de tout fermé de X_2 par f est un fermé de X_1.

Définition 3.2. Un espace topologique $(X, \mathscr{O})$ est *connexe* s'il ne peut s'écrire comme la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Cela revient à dire que les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.

Un espace topologique $(X, \mathscr{O})$ est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$ (où $[0,1]$ est muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$).

Bien entendu, un espace topologique possédant au plus un élément est connexe et connexe par arcs.

Une partie A de X est connexe/connexe par arcs si elle l'est pour la topologie induite.

Afin d'être complet, rappelons les résultats classiques suivants.

Proposition 3.3. *Soit* $(X, \mathscr{O})$ *un espace topologique. Alors :*

(1) *l'espace topologique* X *est connexe si, et seulement si, toute fonction continue* $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ *est constante (où* $\{0,1\}$ *est muni de la topologie discrète) ;*
(2) *si* $f : X \longrightarrow Y$ *est une application continue entre deux espaces topologiques, et si* X *est connexe, alors* $f(X)$ *est connexe ;*
(3) *si* X *est connexe par arcs, alors* X *est connexe.*

Démonstration. Supposons X connexe, et soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue. Comme $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts et f est continue, $U_0 = f^{-1}(\{0\})$ et $U_1 = f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts. De plus, on a

$$X = f^{-1}(\{0,1\}) = U_0 \cup U_1,$$

et la réunion est disjointe, puisque $\{0\}$ et $\{1\}$ sont disjoints. Par connexité, un de ces deux ouverts est vide, et l'autre est alors égal à X. En particulier, vu la définition de U_0 et U_1, cela implique que f est constante.

Supposons que X ne soit pas connexe, et soient U_0, U_1 deux ouverts disjoints non vides tels que $X = U_0 \cup U_1$. Soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U_0 \\ 1 & \text{si } x \in U_1. \end{cases}$$

Alors, on a

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(\{0\}) = U_0,\ f^{-1}(\{1\}) = U_1,\ f^{-1}(\{0,1\}) = X.$$

Dans tous les cas, on obtient des ouverts de X. Ainsi, f est continue et non constante. Cela démontre (1).

Montrons (2). Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Supposons que X soit connexe, et soit $g : f(X) \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Comme f est en fait à valeurs dans $f(X)$, on peut composer f et g. L'application $g \circ f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est continue, donc constante par connexité de X en vertu de (1). Mais cela revient à dire que g est constante, par définition de g.

Il reste à établir (3). Supposons que X soit connexe par arcs, et soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Montrons que f est constante. Soient $x, y \in X$. Par hypothèse, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Mais alors, l'application $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ est continue. Puisque $[0,1]$ est connexe, elle est constante. En particulier, on a $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$, soit $f(x) = f(y)$. Ceci étant vrai pour tous $x, y \in X$, cela démontre que f constante, d'où le résultat. □

Proposition 3.4. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie. Alors, les parties connexes de X sont l'ensemble vide, les singletons, et les parties infinies de X.*

Démonstration. La topologie induite sur A est la topologie cofinie sur A d'après le lemme 1.8. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $A = X$. Si X est vide ou un singleton, il est clairement connexe par définition. Supposons que X soit infini, et soit Y un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé. Si $Y = X$, il n'y a rien à faire. Supposons que $Y \neq X$. Alors, comme Y est fermé, Y est fini. Mais alors, $X \setminus Y$ est infini car X est infini. Comme Y est aussi ouvert, $X \setminus Y$ est donc un fermé infini. Vu la description des fermés de X, la seule possibilité est $X \setminus Y = X$, c'est-à-dire $Y = \emptyset$. Ainsi, X est connexe dans ce cas. Pour conclure, il reste à démontrer que si X est fini et possède au moins deux éléments, X n'est pas connexe. Puisque X est finie, la topologie cofinie est la topologie discrète. Soit $x \in X$. Les $\{x\}$ et $X \setminus \{x\}$ sont deux ouverts de X disjoints, de réunion X, et sont tous deux non vides, puisque X possède au moins deux éléments. Ainsi, X n'est pas connexe. □

On s'intéresse maintenant à la connexité par arcs. Rappelons tout d'abord quelques définitions de théorie des ensembles.

Définition 3.5. On dit qu'un ensemble X :

(1) est *dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$;
(2) *a la puissance du continu* s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$;
(3) *a au moins la puissance du continu* s'il contient un sous-ensemble en bijection avec $\mathbb{R}$.

On continue par un théorème sur les applications continues $[0,1] \longrightarrow X$.

Théorème 3.6. *Soit X un ensemble, muni de la topologie cofinie. Alors :*

(1) *toute application $[0,1] \longrightarrow X$ injective est continue ;*
(2) *si X est dénombrable, toute application continue $[0,1] \longrightarrow X$ est constante.*

Démonstration. Montrons que toute application injective $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ est continue.

Soit F un fermé de X. Si $F = X$, alors $\gamma^{-1}(X) = [0,1]$ est fermé. Si F est fini, l'injectivité de γ entraîne que $\gamma^{-1}(F)$ est fini, puisque chaque élément de F possède au plus un antécédent par γ. Or un sous-ensemble fini de $[0,1]$ est fermé. Ainsi, γ est continue, d'où (1).

Montrons (2). Supposons que X soit dénombrable, et soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ une application continue. Puisqu'une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable (résultat classique de théorie des ensembles), et que la topologie induite sur l'image de γ est sa topologie cofinie, on peut supposer sans perte de généralité que γ est surjective. Puisque γ est continue et $[0,1]$ est connexe, son image X est alors connexe par la proposition 3.3 (2), et non vide puisque $[0,1]$ est non vide. Si X est fini, la proposition 3.4 implique que c'est un singleton. Ainsi, γ est constante. Supposons que X soit en bijection avec $\mathbb{N}$, et soit $\{x_n \; n \geq 0\}$ une énumération des éléments de X. Pour tout $n \geq 0$, l'ensemble $F_n = \gamma^{-1}(\{x_n\})$ est non vide, car γ est surjective, et fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Mais alors, on a

$$[0,1] = \bigcup_{n \geq 0} F_n.$$

De plus, les fermés $F_n, n \geq 0$ sont deux à deux disjoints par définition. C'est impossible d'après la proposition 5.10. □

Remarque 3.7. Notons que l'existence d'une application injective $[0,1] \longrightarrow X$ implique que X n'est pas dénombrable (puisque $[0,1]$ ne l'est pas). Les points (1) et (2) s'excluent donc mutuellement.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.8. *Soit X un ensemble, muni de la topologie cofinie, et soit A une partie de X. Alors :*

(1) *si A est dénombrable, alors A est connexe par arcs si, et seulement si A est vide ou un singleton ;*

(2) *si A a au moins la puissance du continu, alors A est connexe par arcs.*

Démonstration. Comme d'habitude, on peut supposer que $A = X$.

Supposons que X soit dénombrable. Supposons que X soit connexe par arcs. Soient $x, y \in X$, et soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ une application continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. D'après le théorème 3.6, γ est constante. En particulier, $x = y$. Ainsi, X est un singleton s'il est non vide. Inversement, si X possède au plus un élément, il est connexe par arcs.

Supposons maintenant que X ait au moins la puissance du continu. Soient $x, y \in X$. Si $x = y$, l'application constante $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ égale à x est continue, et vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Supposons maintenant que $x \neq y$. Nous allons construire une application injective $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme une telle application est continue par le théorème précédent, cela montrer que X est connexe par arcs dans ce cas.

Par hypothèse, X contient un ensemble en bijection avec $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe une application injective $\mathbb{R} \longrightarrow X$, et par restriction, une application $f : [0,1] \longrightarrow X$ injective. Nous allons considérer trois cas.

Premier cas : x et y ne sont pas dans l'image de f. Alors, l'application $\gamma : [0,1] \longrightarrow A$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \\ y & \text{si } t = 1 \\ f(t) & \text{si } t \neq 0, 1 \end{cases}$$

convient. Notons que γ est bien injective car x et y ne sont pas atteintes par f.

Deuxième cas : exactement un des deux éléments x ou y n'est pas dans l'image de f. Supposons par example que x ne soit pas dans l'image de f, et donc que y est dans l'image de f. Soit $\beta \in [0,1]$ tel que $f(\beta) = y$. Alors, l'application $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \\ f(\beta t) & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

convient. En effet, la restriction de γ à $]0,1]$ est injective comme composée de deux fonctions injectives. Comme x n'est pas dans l'image de f, on en conclut que γ est injective. De plus, $\gamma(0) = f(0) = x$ et $\gamma(1) = f(\beta) = y$.

Troisième cas : x et y sont dans l'image de f. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $f(\alpha) = x$ et $f(\beta) = y$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \gamma \colon [0,1] &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto f(t\alpha + (1-t)\beta) \end{aligned}$$

convient. En effet, elle est injective comme composée de deux fonctions injectives. Enfin $\gamma(0) = f(\alpha) = x$ et $\gamma(1) = f(\beta) = y$.

Bref, dans tous les cas, on dispose d'une application injective $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Ceci achève la démonstration. □

Remarques 3.9.

(1) Ce théorème et la proposition 3.4 montrent en particulier qu'un ensemble infini dénombrable, muni de la topologie cofinie, est connexe, mais pas connexe par arcs.

(2) Sous l'hypothèse du continu, le théorème précédent se reformule comme suit.

Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie. Alors, les parties connexes par arcs de X sont l'ensemble vide, les singletons et les parties non dénombrables.

4. Suites convergentes

On s'intéresse maintenant à la convergence des suites. Rappelons la définition d'une suite convergente.

Définition 4.1. Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique. Soit $x \in X$. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X *converge vers* x si pour tout ouvert U de X contenant x, il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N, u_n \in U$.

Dans ce cas, on dit que x est *une limite* de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X est *convergente* si elle possède au moins une limite. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est *divergente* si elle n'est pas convergente.

Rappelons que si X est séparé, toute suite convergente possède une unique limite.

Exemple 4.2. Toute suite constante est convergente, et une limite est la valeur de la constante en question.

On commence par un lemme.

Lemme 4.3. *Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique. Soit $x \in X$, et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans X convergeant vers x. Alors, la seule valeur éventuellement prise une infinité de fois par les termes de la suite est x.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ prenne la valeur $y \in X$ une infinité de fois, et supposons que $y \neq x$. Soit $U = X \setminus \{y\}$. Alors, U est un ouvert non vide contenant x (puisque $x \neq y$). Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \in U$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $u_n \neq y$. En particulier, y ne peut être atteinte que par un nombre fini de termes de la suite, contredisant la définition de y. Par conséquent, $y = x$. $\square$

Le résultat que l'on a en vue est le suivant.

Proposition 4.4. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie, et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans X. Alors :*

(1) *s'il existe au moins deux valeurs distinctes atteintes une infinité de fois par les termes de la suite, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est divergente ;*

(2) *s'il existe exactement une valeur x atteinte une infinité de fois par les termes de la suite, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et x est son unique limite ;*

(3) *si chaque valeur de la suite n'est atteinte qu'un nombre fini de fois, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers tout élément de X.*

En particulier, toute suite à valeurs dans X possède une sous-suite convergente.

Démonstration. Le lemme 4.3 montre que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers $x \in X$, alors x est la seule valeur qui puisse éventuellement être atteinte une infinité de fois par les termes de la suite. Cela établit (1), ainsi que l'unicité de la limite dans le point (2).

On va maintenant démontrer le résultat suivant. Soit $x \in X$ tel que toute valeur différente de x n'est atteinte qu'un nombre fin ide fois par les termes de la suite. Alors, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers x.

Soit U un ouvert contenant $x \in X$. Comme U est non vide, $X \setminus U$ est fini. En particulier, $X \setminus U$ contient un nombre fini de valeurs de la suite. Ces valeurs étant différentes de x, elles sont prises un nombre fini de fois. Ainsi, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in X \setminus U\}$ est fini. S'il est vide, il n'y a rien à faire, puisqu'alors tous les termes de la suite sont dans U. Sinon, il possède un élément maximal $N \geq 0$, et alors pour tout $n \geq N$, on a $u_n \in U$. Ainsi, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers x.

Ce résultat entraîne alors le point (3) et la partie convergence du point (2). Enfin, on peut toujours extraire une sous-suite constante d'une suite vérifiant les conditions du point (1), qui est convergente. Les autres cas étant évidents, on a fini. □

Rappelons maintenant la relation entre limite de suites et adhérence.

Proposition 4.5. *Soit $(X, \mathscr{O})$ un espace topologique, et soit A une partie de X. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A convergeant vers $a \in X$, alors $a \in \overline{A}$.*

En particulier, si A est fermé, toute limite d'une suite d'éléments de A convergeant dans X appartient à A.

Démonstration. On garde les notations de l'énoncé. Supposons a contrario que $a \notin \overline{A}$. Alors, $a \in \overline{A}^c$. Comme $\overline{A}$ est fermé, $\overline{A}^c$ est ouvert. Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \in \overline{A}^c$. En particulier, $u_N \in A^c$ puisque $A \subset \overline{A}$, c'est-à-dire $u_N \in A$, d'où une contradiction. □

La réciproque de la propriété précédente est fausse en général, bien qu'elle soit vraie par exemple pour les espaces vectoriels normés. En revanche, elle est vraie pour les ensembles munis de la topologie cofinie.

Proposition 4.6. *Soit X un ensemble muni de la topologie cofinie, et soit A une partie de X. Alors, A est fermée si, et seulement si, toute limite d'une suite d'éléments de A convergeant dans X appartient à A.*

Démonstration. D'après la proposition 4.5, il suffit de montrer que, si toute limite d'une suite d'éléments de A convergeant dans X appartient à A, alors A est fermé.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de A convergente dans X. S'il existe une unique valeur $x \in X$ atteinte une infinité de fois par les termes de la suite, alors $x \in A$ (puisque c'est une valeur atteinte par la suite), et $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x \in A$, d'après la proposition 4.4.

Supposons maintenant que toutes les valeurs atteintes par la suite le soient un nombre fini de fois. Alors, tout élément de X est une limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ par cette même proposition. L'hypothèse entraîne alors que $A = X$, qui est fermé. □

5. Annexe : quelques résultats sur la topologie de $\mathbb{R}$

On démontre ici les deux résultats sur les intervalles que nous avons utilisé précédemment. Le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de problème d'auto-référence. On commence par rappeler la définition de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Lemme 5.1. *Soit $\mathscr{O}$ l'ensemble des parties U de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset U$. Alors, $\mathscr{O}$ définit une topologie sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Clairement $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide sont des éléments de $\mathscr{O}$. Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{O}$, et soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Alors, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Par définition, il existe alors $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset U_{i_0}$. Mais alors $]x-r, x+r[\subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Ainsi, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathscr{O}$.

Il reste à voir que $\mathscr{O}$ est stable par intersection finie. Clairement, il suffit de montrer que si $U_1, U_2 \in \mathscr{O}$, on a $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}$. Soient donc $U_1, U_2 \in \mathscr{O}$. On peut supposer que $U_1 \cap U_2$ est non vide, sinon le résultat est clair. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Alors, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que

$$]x-r_1, x+r_1[\subset U_1 \quad \text{et} \quad]x-r_2, x+r_2[\subset U_2.$$

Si $r = \min(r_1, r_2)$, on a $]x-r, x+r[\subset]x-r_1, x+r_1[$ et $]x-r, x+r[\subset]x-r_2, x+r_2[$, d'où

$$]x-r, x+r[\subset]x-r_1, x+r_1[\cap]x-r_2, x+r_2[\subset U_1 \cap U_2.$$

Ceci achève la démonstration. □

Exemples 5.2.

(1) Un intervalle $]a,b[$ ouvert de $\mathbb{R}$ (possiblement non borné) est ouvert.
En effet, soit $x \in]a,b[$, et soit $r = \min(\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2})$. Remarquons que $r > 0$, puisque $x \in]a,b[$. Alors, pour tout $y \in]x-r, x+r[$, on a
$$y \geq x - r \geq x - \frac{x-a}{2},$$
d'où $y \geq a + \frac{x-a}{2} > a$. De même, on a
$$y \leq x + r \leq x + \frac{b-x}{2},$$
d'où $y \leq b - \frac{b-x}{2} < b$. Bref, on a $]x-r, x+r[\subset]a,b[$, d'où le résultat.

(2) Un intervalle $[a,b]$ fermé borné est fermé.
En effet, $[a,b]$ est le complémentaire de l'ouvert $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$.

Faisons quelques rappels sur les bornes supérieure et inférieure.

Définition 5.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est :

(1) un *majorant de* A si pour tout $a \in A$, on a $a \leq m$;
(2) un *maximum de* A si $m \in A$, et $a \leq m$ pour tout $a \in A$ (i.e. m est un majorant de A) ;
(3) un *minorant de* A si pour tout $a \in A$, on a $a \geq m$;
(4) un *minimum de* A si $m \in A$, et $a \geq m$ pour tout $a \in A$ (i.e. m est un minorant de A).

Si A possède un maximum/minimum, il est facile de voir que celui-ci est unique. Dans ce cas, on note $\max(A)$ et $\min(A)$ le maximum et le minimum de A respectivement.

On dit que A possède une *borne supérieure* si l'ensemble des majorants de A possède un minimum. Ce minimum est alors appelé la *borne supérieure de* A, et est noté $\sup(A)$. Autrement dit, $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.

On dit que A possède une *borne inférieure* si l'ensemble des minorants possède un maximum. Ce maximum est alors appelé la *borne inférieure de* A, et est noté $\inf(A)$. Autrement dit, $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

Par convention, $\sup(\emptyset) = +\infty$ et $\inf(\emptyset) = -\infty$.

Selon la construction de $\mathbb{R}$ choisie, le résultat suivant est soit une définition, soit une propriété. Quoiqu'il en soit, nous l'admettrons.

Théorème 5.4. *Toute partie non vide majorée de A possède une borne supérieure, et toute partie non vide minorée de A possède une borne inférieure.*

Le résultat suivant est facile.

Lemme 5.5. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors :*

(1) *l'ensemble A possède un maximum si, et seulement A possède une borne supérieure et* $\sup(A) \in A$. *Dans ce cas,* $\sup(A) = \max(A)$ *;*
(2) *l'ensemble A possède un minimum si, et seulement A possède une borne inférieure et* $\inf(A) \in A$. *Dans ce cas,* $\inf(A) = \min(A)$.

Démonstration. Supposons que A possède un maximum. Alors, $\max(A)$ est un majorant de A. En particulier, A possède une borne supérieure d'après le théorème précédent. Comme $\max(A) \in A$, on a $\max(A) \sup(A)$, puisque $\sup(A)$ est un majorant de A. Mais $\max(A)$ est aussi un majorant de A, et donc $\sup(A) \leq \max(A)$, puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants. Par conséquent, $\sup(A) = \max(A)$.

Supposons maintenant que A possède une borne supérieure et $\sup(A) \in A$. Alors, $\sup(A)$ est un majorant de A et appartient à A. C'est donc un maximum de A.

L'autre assertion s'obtient de manière similaire, ou en appliquant le premier point à $-A = \{-a \mid a \in A\}$. ☐

On rappelle la caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures.

Théorème 5.6. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors :*

(1) *supposons que A soit majorée, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,* $\alpha = \sup(A)$ *si, et seulement si, α est un majorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers α ;*
(2) *supposons que A soit minorée, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,* $\alpha = \inf(A)$ *si, et seulement si, α est un minorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers α.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le premier point, le second se démontrant de manière similaire ou en appliquant le premier point à $-A$.

Soit $\alpha = \sup(A)$, et soit $n \geq 0$. Comme $\alpha - \dfrac{1}{n+1} < \alpha$, $\alpha - \dfrac{1}{n}$ ne peut être un majorant de A (sinon, cela contredirait le fait que α est le plus petit des majorants de A). Il existe donc $a_n \in A$ tel que $a_n > \alpha - \dfrac{1}{n+1}$. Comme $a_n \leq \alpha$, on a alors

$$0 \leq \alpha - a_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent, $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers α. De plus, α est un majorant de A.

Inversement, soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers α, où α est un majorant de A. Comme α est un majorant de A, on a $\sup(A) \leq \alpha$.

Supposons que $\sup(A) < \alpha$. Puisque $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers α, il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|\alpha - a_n| < \alpha - \sup(A)$. Comme α est un majorant de A, on a en particulier $\alpha - a_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$. Pour tout $n \geq N$, on a donc $\alpha - a_n < \alpha - \sup(A)$, soit $\sup(A) < a_n$. Cela contredit le fait que $\sup(A)$ est un majorant de A. Bref, $\alpha = \sup(A)$. □

Corollaire 5.7. *Toute partie fermée non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède un maximum, et toute partie fermée non vide minorée de A possède un minimum.*

Démonstration. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ non vide majorée. Alors, F admet une borne supérieure. Comme $\sup(F)$ est limite d'une suite d'éléments de F d'après le théorème 5.6, on a $\sup(F) \in F$ par la proposition 4.5. Mais alors, F possède un maximum par le théorème 5.5. L'autre assertion se démontre de même, ou appliquant ce qui précède au fermé $-F$. □

Nous allons continuer en démontrant la connexité des intervalles.

Proposition 5.8. *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.*

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si I est vide, I est connexe. Supposons que I soit non vide, et que I ne soit pas connexe.

On peut donc écrire $I = V_1 \cup V_2$, où V_1, V_2 sont deux ouverts disjoints non vides de I. Écrivons $V_1 = U_1 \cap I$ et $V_2 = U_2 \cap I$, avec U_1, U_2 ouverts dans $\mathbb{R}$. On a donc $U_1 \cap U_2 \cap I = \emptyset$. En particulier, tout élément de I appartient, soit à U_1, soit à U_2, mais pas aux deux.

Soit $a_1 \in V_1$ et $a_2 \in V_2$. Comme V_1 et V_2 sont disjoints, on a $a_1 \neq a_2$, et quitte à échanger les rôles de V_1 et V_2, on peut supposer que $a_1 < a_2$. Comme $a_1, a_2 \in I$, on a $[a_1, a_2] \subset I$ puisque I est un intervalle.

Soit $F_1 = [a_1, a_2] \cap U_2^c$. C'est donc un fermé de $\mathbb{R}$. Remarquons que $a_1 \in V_1$, donc $a_1 \in U_1$, et comme $a_1 \in I$, on a $a \in U_2^c$ par une remarque précédente. Bref, $a_1 \in F_1$. Ainsi, F_1 est non vide, majoré par a_2. Il possède alors un maximum b_1 par le corollaire 5.7. En particulier, $b_1 \in [a_1, a_2]$, et a fortiori $b_1 \in I$. Comme de plus $b_1 \in U_2^c$, on a $b_1 \in V_1$. Puisque $a_2 \in V_2$, on a nécessairement $b_1 < a_2$.

Soit maintenant $F_2 = [b_1, a_2] \cap U_1^c$. Comme précédemment, on montre que F_2 est fermé, non vide (car $a_2 \in F_2$), et minoré par b_1. Il possède alors un minimum b_2 par le corollaire 5.7, et on a $b_2 \in [b_1, a_2]$. Comme

$b_1 \in V_1 \subset U_1$, on a $b_1 \notin F_2$, et ainsi $b_1 < b_2$. Soit alors $x \in]b_1, b_2[$. Notons que l'on a alors $x \in [b_1, a_2]$, car $b_2 \leq a_2$. On ne peut alors avoir $x \in U_1^c$, car sinon on a aurait à la fois $x < b_2$ et $x \in F_2$, ce qui contredirait le fait que b_2 soit le minimum de F_2. Par conséquent, $x \in U_1$. Mais alors, comme $x \in [b_1, b_2] \subset [a_1, a_2] \subset I$, on a $x \in U_2^c$. Puisque $x \in [a_1, a_2]$, on a finalement $x \in F_1$. Or, $b_1 < x$, ce qui contredit la maximalité de b_1. Ceci achève la démonstration. □

Passons à des résultats plus techniques. Le premier généralise le théorème des suites adjacentes.

Proposition 5.9. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement croissante et soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement décroissante, telles que $a_n < b_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors, on a $\sup_{n\geq 0}(a_n) \leq \inf_{n\geq 0}(b_n)$ et l'égalité*

$$\bigcap_{n\geq 0}]a_n, b_n[= [\sup_{n\geq 0}(a_n), \inf_{n\geq 0}(b_n)].$$

En particulier, $\bigcap\limits_{n\geq 0}]a_n, b_n[$ est non vide.

Démonstration. Notons que, vu les hypothèses, on a $a_n < b_n < b_1$ et $b_n > a_n > a_1$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$ est majorée et $B = \{b_n \mid n \geq 0\}$ est minorée, ce qui justifie l'existence de $a = \sup(A) =$ et $b = \inf_(B)$.

Montrons maintenant que $a \leq b$. Supposons que $a - b > 0$. Comme $a > b$, b ne peut être un majorant de A, car a est le plus petit de ces majorants. Il existe donc $N_1 \geq 0$ tel que $b < a_{N_1}$. De même, a ne peut être un minorant de B, car b est le plus grand de ces minorants, et il existe $N_2 \geq 0$ tel que $b_{N_2} < a$. Si $N = \max(N_1, N_2)$, on a donc $b < a_N$ et $b_N < a$, vu les hypothèses de monotonie de l'énoncé, Mais alors, $b < a_N < b_N < a$, d'où une contradiction. Ainsi, $a \leq b$.

Montrons maintenant l'égalité souhaitée.

Soit $x \in \bigcap\limits_{n\geq 0}]a_n, b_n[$. Pour tout $n \geq 0$, on a donc $a_n \leq x \leq b_n$. Ainsi, x est un majorant de A et un minorant de B. Par définition des bornes supérieure et inférieure, on obtient $a \leq x \leq b$, i.e. $x \in [a, b]$.

Inversement, soit $x \in [a, b]$. Supposons tout d'abord que $x \in]a, b[$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a

$$a_n \leq a < x < b \leq b_n,$$

car a est un majorant de A et b est un minorant de B. Par conséquent, $x \in \bigcap\limits_{n\geq 0}]a_n, b_n[$. Il reste à voir que a et b appartiennent à $\bigcap\limits_{n\geq 0}]a_n, b_n[$. Par définition de a, on a $a_n \geq a$ pour tout $n \geq 0$. Supposons qu'il existe $N \geq 0$ tel que $a_N = a$. Alors, $a = a_N < a_{N+1}$, d'où une contradiction.

Ainsi, $a_n < a$ pour tout $n \geq 0$. De même, on a $b < b_n$ pour tout $n \geq 0$. Comme $a \leq b$, on a finalement $a, b \in \bigcap_{n\geq 0}]a_n, b_n[$, d'où le résultat voulu.

□

On finit par un grand classique.

Proposition 5.10. *L'intervalle* $[0,1]$ *ne peut s'écrire comme réunion infinie dénombrable de fermés non vides deux à deux disjoints.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une famille de fermés non vides deux à deux disjoints de $[0,1]$ telle que $[0,1] = \bigcup_{n\geq 0} F_n$.

Remarquons que F_n est l'intersection d'un fermé de $\mathbb{R}$ et de $[0,1]$, qui est aussi un fermé de $\mathbb{R}$. Ainsi, F_n est également un fermé de $\mathbb{R}$.

On va montrer le fait suivant.

Fait. Il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geq -1}$ strictement croissante et une suite de réels $(b_n)_{n\geq -1}$ strictement décroissante, telles que $a_n < b_n$ pour tout $n \geq -1$, et une suite d'entiers $(i_n)_{n\geq 0}$ strictement croissante telle que $]a_{-1}, b_{-1}[=]0,1[$ et $]a_n, b_n[\subset \bigcap_{k=0}^{i_n} F_k^c$ pour tout $n \geq 0$, le complémentaire étant pris dans $[0,1]$.

Supposons ce fait démontré. Comme $(i_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante, on a $i_n \geq n$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a donc

$$]a_n, b_n[\subset \bigcap_{k=0}^{i_n} F_k^c \subset F_n^c.$$

Mais alors , on obtient $\bigcap_{n\geq 0}]a_n, b_n[\subset \bigcap_{n\geq 0} F_n^c$. Par hypothèse sur $(F_n)_{n\geq 0}$, l'intersection de droite est vide, et donc l'intersection de gauche aussi, ce qui contredit la proposition 5.9.

Il reste à établir le fait. On procède par récurrence sur $n \geq -1$. Pour $n = -1$, il suffit de poser $a_{-1} = 0, b_{-1} = 1$.

Supposons maintenant que $]a_n, b_n[$ soit construit pour un certain $n \geq -1$. Pour éviter le cas particulier $n = -1$, posons $i_{-1} = -1$. Alors, il existe $i_{n+1} > i_n$ tel que $]a_n, b_n[$ intersecte $F_{i_{n+1}}$. Sinon, on aurait $]a_n, b_n[\subset F_k^c$ pour tout $k > i_n$. Mais par construction, $]a_n, b_n[\subset F_k^c$ pour tout $k \in [\![0, i_n]\!]$. Par conséquent, $]a_n, b_n[\subset \bigcap_{k\geq 0} F_k^c$. Or, cette dernière intersection est vide par hypothèse sur $(F_n)_{n\geq 0}$, et $]a_n, b_n[$ est vide, d'où une contradiction puisque $a_n < b_n$.

Soit donc un entier $i_{n+1} > i_n$ tel que $]a_n, b_n[$ intersecte $F_{i_{n+1}}$. On ne peut avoir $]a_n, b_n[= \bigcup_{k=0}^{i_{n+1}} F_k$, car sinon $]a_n, b_n[$ serait ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$, non vide, donc égal à $\mathbb{R}$ par connexité de $\mathbb{R}$, d'où une contradiction. Bref, $]a_n, b_n[\cap \bigcap_{k=0}^{i_{n+1}} F_k^c$ est non vide. Puisque F_k est fermé dans $\mathbb{R}$, cette dernière intersection est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent, si on choisit un point de cet ouvert, il contient un intervalle ouvert I_{n+1} centré autour de ce point.

On a bien entendu

$$I_{n+1} \subset \bigcap_{k=0}^{i_{n+1}} F_k^c.$$

Puisque $]a_n, b_n[$ intersecte $F_{i_{n+1}}$, donc $\bigcup_{k=0}^{i_{n+1}} F_k$, ce qui n'est pas le cas de I_{n+1}, on a une inclusion stricte $I_{n+1} \subsetneq]a_n, b_n[$.

On sait qu'il existe $c < d$ tel que $]c, d[\subset I_{n+1} \subset [c, d]$ (en fait $c = \inf(I)$ et $d = \sup(I)$). Vu l'inégalité stricte, on a $c > a_n$ ou $d < b_n$. Si $c > a_n$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + c}{2}$ et $b_{n+1} = a_n$. Si $d < b_n$, on pose $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n + d}{2}$. Dans les deux cas, on a bien $a_{n+1} > a_n$ et $b_{n+1} < b_n$. Ceci achève la récurrence. $\square$