

Table des matières

Partie 1. Phase d'approche : rappels et compléments

I. Théorie des ensembles	
1. Applications	3
2. Relations d'équivalence	7
3. Lois internes, structures algébriques	11
4. Ensembles ordonnés	16
5. Exercices	17
II. Arithmétique dans \mathbb{Z}	
1. Divisibilité dans \mathbb{Z}	23
2. Division euclidienne, algorithme d'Euclide	25
3. Entiers premiers entre eux	28
4. Décomposition en facteurs premiers	29
5. pgcd et ppcm d'une famille quelconque d'entiers	31
6. Arithmétique modulaire	32
7. Exercices	36
III. Rappels et compléments d'algèbre linéaire	
1. Généralités	41
2. Familles libres, génératrices, bases	44
3. Somme d'espaces vectoriels	49
4. Matrices représentatives, changement de base	50
5. Formes linéaires, droites et hyperplans	53
6. Exercices	58

IV. Déterminant

1. Introduction éclair au groupe symétrique	63
2. Formes multilinéaires alternées, déterminant	68
3. Déterminant d'un endomorphisme	72
4. Déterminant d'une matrice	74
5. Transvections et dilatations	79
6. Exercices	90

V. Un peu de géométrie

1. Affinités vectorielles	95
2. Espaces euclidiens, espaces hermitiens	99
3. Isométries d'un espace euclidien : premiers résultats	105
4. Structure des endomorphismes normaux	112
5. Espace euclidiens orientés	118
6. Exercices	126

Partie 2. Groupes : il faut agir !!**VI. Propriétés élémentaires des groupes**

1. Généralités	133
2. Sous-groupes	141
3. Sous-groupes engendrés par une partie	149
4. Théorème de Lagrange, ordre d'un élément	153
5. Interlude : formule d'inversion de Möbius	161
6. Groupes monogènes, groupes cycliques	163
7. Exercices	166

VII. Groupes opérant sur un ensemble

1. Actions de groupe	181
2. Premières applications	189
3. Coloriages	194
4. Exercices	204

VIII. Groupe symétrique, groupe alterné

1. Préliminaires	211
2. Décomposition en produit de cycles	214
3. Systèmes de générateurs	224
4. Signature, groupe alterné	225
5. Structure des groupes symétrique et alterné	229
6. Exercices	232

IX. Groupes quotients	
1. Définition	247
2. Théorème de factorisation	251
3. Suites de composition	259
4. Présentations de groupes	275
5. Exercices	296
X. Produits directs et semi-directs	
1. Préliminaires	303
2. Produits directs	305
3. Produits semi-directs	310
4. Exercices	319
XI. Actions de groupe et structure des groupes finis	
1. Théorème de Sylow	325
2. Actions primitives et critère de simplicité d'Iwasawa	329
3. Exercices	342
XII. Thème et variations sur les groupes abéliens	
1. Torsion dans un groupe abélien	355
2. Exposant d'un groupe	359
3. Caractères linéaires d'un groupe abélien fini	362
4. Groupes abéliens libres	366
5. Structure des groupes abéliens de type fini	373
6. Groupes abéliens divisibles	381
7. Exercices	393
XIII. Classification des groupes finis : résumé des épisodes précédents	
1. Quelques théorèmes de classification	397
2. Groupes finis d'ordre ≤ 15	399

Partie 3. Anneaux : la loi des irréductibles

XIV. Propriétés élémentaires des anneaux et des corps	
1. Généralités	403
2. Éléments remarquables d'un anneau	410
3. Anneaux intègres, corps	414
4. Idéaux	420
5. Produit direct d'anneaux	427
6. Anneaux de polynômes	431
7. Polynômes symétriques	449
8. Exercices	461
XV. Anneaux quotients, théorème chinois	
1. Anneaux quotients, théorème de factorisation	473
2. Idéaux premiers, maximaux	477
3. Théorème chinois	481
4. Exercices	490
XVI. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en long, en large et en travers	
1. Échauffement	503
2. Structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$	506
3. Carrés de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	510
4. Symboles de Legendre et de Jacobi	516
5. Exercices	530
XVII. Divisibilité dans les anneaux	
1. Divisibilité, éléments irréductibles et premiers	533
2. Arithmétique des anneaux principaux	542
3. Anneaux euclidiens	547
4. Anneaux noethériens	556
5. Anneaux factoriels	560
6. Exercices	569
XVIII. Matrices à coefficients dans un anneau euclidien	
1. Déterminant : le retour	589
2. Équivalence de matrices	592
3. Modules sur un anneau	604
4. Théorème de la base adaptée et applications	612
5. Exercices	625

XIX. Polynômes irréductibles et applications	
1. Polynômes irréductibles et racines	629
2. Quelques critères d'irréductibilité	636
3. Factorialité de $A[X]$	643
4. Irréductibilité d'un polynôme bicarré	649
5. Polynômes cyclotomiques et applications	661
6. Polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_p , corps finis	671
7. Exercices	683
XX. Idéaux de $A[X]$	
1. Principalité des idéaux de $A[X]$	689
2. Noethérianité de $A[X]$	693
3. Idéaux premiers de $A[X]$, A principal	697
4. Exercices	701
XXI. Séries formelles	
1. Premières propriétés	703
2. Composition et dérivation de séries formelles	712
3. Séries formelles usuelles	729
4. Quelques applications des séries formelles	738
5. Exercices	744
XXII. Complétion I-adique	
1. Complété I -adique	751
2. Propriétés métriques	758
3. Complétion en un idéal principal	768
4. Exercices	779

Partie 4. Des corps ! Des corps partout !

XXIII. Constructions à la règle et au compas et théorie des corps	
1. Préliminaires	785
2. Extensions de corps	793
3. Extensions algébriques, transcendentes	804
4. Quelques problèmes de construction à la règle et au compas	813
5. Et après...	827
6. Exercices	830

XXIV. Polynômes et racines

1. Existence de racines dans une extension et applications	833
2. Corps de rupture, corps des racines d'un polynôme	842
3. Clôture algébrique d'un corps	849
4. Entiers algébriques	855
5. Exercices	862

XXV. Plongements et extensions séparables

1. Plongements	870
2. Propriétés des extensions séparables	877
3. Polynômes séparables	883
4. Traces et normes	888
5. Exercices	895

XXVI. Extensions galoisiennes

1. Extensions normales	903
2. Extensions galoisiennes	906
3. Le groupe de Galois d'un polynôme	913
4. Extensions cyclotomiques	922
5. Théorie de Kummer	926
6. Exercices	930

XXVII. Nul n'est censé ignorer Galois

1. Théorie de Galois	941
2. Résolubilité des équations par radicaux	950
3. Constructions à la règle et au compas : le retour	958
4. Exercices	960

Partie 5. Algèbre linéaire : réduisons en miettes !**XXVIII. Réduction des endomorphismes**

1. Polynômes d'endomorphismes	971
2. Diagonalisation	984
3. Trigonalisation, décomposition de Dunford	991
4. Décomposition de Jordan	1007
5. Exponentielle de matrices	1019
6. Exercices	1031

XXIX. Décomposition de Frobenius

1. Sous-espaces stables engendrés par un vecteur	1047
2. Endomorphismes cycliques	1050
3. Décomposition de Frobenius : approche classique	1053
4. Décomposition de Frobenius : calcul pratique	1059
5. Commutant et bicommutant d'un endomorphisme	1072
6. Exercices	1078

XXX. Dualité

1. Introduction	1085
2. Formes linéaires et bilinéaires, espace dual	1088
3. Interlude : espaces vectoriels quotients	1097
4. Dualité entre sous-espaces	1099
5. Bases duales	1107
6. Endomorphismes adjoints	1111
7. Exercices	1120

Partie 6. Représentations : agissons dans l'espace !**XXXI. Représentations linéaires des groupes finis : introduction**

1. Modules simples, modules indécomposables	1129
2. Représentations linéaires : définitions et premiers exemples	1133
3. Interlude : produit tensoriel	1148
4. Opérations sur les représentations	1154
5. Théorème de Maschke	1160
6. Exercices	1165

XXXII. Théorie des caractères

1. Caractère d'une représentation	1175
2. Orthogonalité des caractères et conséquences	1184
3. Table des caractères d'un groupe fini	1205
4. Décomposition en somme de représentations irréductibles	1213
5. Propriétés d'intégralité et applications	1222
6. Degré des représentations irréductibles	1230
7. Exercices	1237

Bibliographie**1245**

