Éléments de corrections TD6

Roland.Bacher@univ-grenoble-alpes.fr

April 15, 2024

!!! Je n'ai pas vérifié toutes les corrections!!!

0.1 Exo 66

Les trois équations ne vérifient pas les cond. du thm de Cauchy-Lipschitz en $x = 0$. On risque donc d'avoir des problemes en $x = 0$.

(A) équation homogène $xy' = y$ donne $\log y = c + \log x$ et $y = Cx$. Variation des constantes: $C = C(x)$. On obtient $xC'(x)x+xC(x)-xC(x) = x$ ce qui donne $C'(x) = 1/x$ donc $C(x) = \log|x| + \kappa$ et $y(x) = x\log|x| + \kappa x$. Pas de solution au voisinage de $x = 0$ mais solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(B) On obtient similairement $y(x) = x^2C(x)$ pour la variation des cstes. En dérivant: $C'(x) = 1$ donc $C(x) = \kappa + x$ et $y(x) = \kappa x^2 + x^3$. Solutions existent pour tout x dans $\mathbb{R}$ mais on perd l'unicité en $x = 0$ (on peut changer de valeur de κ en $x = 0$) et on a de toute façon $y(0) = 0$.

(C) $x^3/3$ est sol particulière de l'éq inhomogène (avec terme source). sols gén du syst lin.: $y' = \kappa x$ donc $y = \kappa x^2/2 + \lambda$. Solution particulière : $y = x^3/3$. Donc sols du syst (C) est $y(x) = x^3/3 + \kappa x^2/2 + \lambda$. Sols C^1 sur $\mathbb{R}$.

0.2 Exo 67

(1) On a $y' = x^3y^3 - xy$. On a pour x dans (α, β) et $y, \tilde{y}$ dans (A, B)

$$\begin{aligned}
&|x^3y^3 - xy - (x^3\tilde{y}^3 - x\tilde{y})| \\
\leq\ & |x| \cdot |y - \tilde{y}| + |x|^3|y^2 + y\tilde{y} + \tilde{y}^2| \cdot |y - \tilde{y}| \\
\leq\ & \max(1, |\alpha|, |\beta|)^3(1 + 3\max(A^2, B^2))|y - \tilde{y}|.
\end{aligned}$$

(2) Le changement $z = y^{-2}$ suggéré implique $y' = -z'y^3/2$ et transforme l'éq diff en $z' = 2xz - 2x^3$. Ce qui donne $z = C(x)e^{x^2}$ pour la variation des constantes et $z = x^2 + 1$ comme solution particulière après une intégration par parties. On a ensuite $y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2+\kappa e^{x^2}}}$ (signe perdu lors de la mise au carré de y) ou $y(x) = 0$ (solution perdue lors de la substitution car division par 0) et on obtient la solution maximale $y(x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$ avec $y(0) = 1$ pour $\kappa = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Les solutions globales correspondent à $\kappa \geq 0$. Toutes les autres solutions explosent en temps fini. Géométriquement, les solutions $\pm 1/\sqrt{1+x^2}$ (qui ressemblent à une hyperbole avec asymptotes $y = \pm x$) bordent les solution non-bornées. Au dessus et en dessous les solutions explosent en temps fini.

0.3 Exo 68

Dans le lemme de Gronwall, on a seulement besoin de la positivité de b mais pas de f et de a. En appliquant l'inégalité de Gronwall à $f(t) = a(t) + \int_0^t b(s)f(s)ds$ et à $-f(t) = -a(t) + \int_0^t b(s)(-f(s))ds$ on obtient

$$a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)dr}ds \leq f(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)dr}ds$$

qui implique $f(t) = a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)dr}ds$.

Si a est de classe C^1, on a $f' = a' + bf$. Alors $f(t) = C(t)e^{\int_0^t b(s)ds}$ (séparation des variables suivie de variations des constantes) et on obtient : $C' = a'e^{-B}$ donc $C = ae^{-\int b} + \int abe^{-\int b}$. Donc

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t) + \int_0^t a(r)b(r)e^{-\int_0^r b(s)ds + \int_0^t b(s)ds}dr \\ &= a(t) + \int_0^t a(r)b(r)e^{-\int_r^t b(s)ds}dr. \end{aligned}$$

(On peut aussi faire l'exo à l'envers : D'abord le cas C^1 et ensuite le cas général (a seulement continu) : 0n fixe $\epsilon > 0$ et on approche a par une fonction α qui est C^1 à ϵ près (Bolzano-Weierstraß) sur $[0, T]$. On a alors $\| a - \alpha \|_\infty = O(\epsilon)$ (avec une constante dépendant de $\| ab \|_\infty, e^{\int_0^T b(s)ds}$ et T).)

0.4 Exo 69

On va supposer $n = 1$ pour simplifier. On est donc ramené au cas $f : [t_0, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $f(t_0) = 0$. On applique le lemme de Gronwall (sous la forme $u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$, comme dans le cours) à

$$f(t) = \int_{t_0}^t f'(\tau)d\tau \leq \int_{t_0}^t kf(\tau)d\tau$$

avec $c = 0$ et $a = k$ fonctions constantes (et $u = f$. On peut se ramener à $t_0 = 0$ par le changement de variable $T = t + t_0$). On a donc

$$0 \leq f(t) \leq \int_{t_0}^t 0 \cdot k \exp\left(\int_\tau^t kds\right) d\tau = 0.$$

0.5 Exo 71

(1) On a

$$y(t) - x(t) = y(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s) - x'(s)ds > 0$$

car $y(t_0) > x(t_0)$ et l'intégrand $y'(s) - x'(s)$ est strictement positif.

(2) Sinon il existe $\tau = \inf((y-x)^{-1}(\{0\}))$ et on a $y(\tau) = x(\tau)$. Comme $x(t_0) < y(t_0)$ on a $\tau > t_0$. Comme $y'(\tau) = f(\tau, y(\tau)) > x'(\tau)$, la fonction $y - x$ est croissante en τ et s'annulle en τ. Il existe donc $t_1 < \tau$ tel que $x(t_1) > y(t_1)$. Par le thm des val intermed. il existe donc τ' dans (t_0, t_1) tel que $x(\tau') = y(\tau')$ en contradiction avec le choix de τ comme inf.

(3) S'il existe $t_1 > t_0$ tq $x(t_1) \geq y(t_1)$ alors il existe τ dans $(t_0, t_1]$ tel que $x(\tau) = y(\tau)$ (thm val intermédiaires). Comme les deux sont solutions d'une équa diff loclmtn lipschitz. on a donc $x(t) = y(t)$ pour tout t par unicité des sols.

0.6 Exo 72

Comme $t^2y(t)^2 \geq 0$, on a $y(t) \geq u(t)$ pour $t \geq t_0$ et u tq $u' = tu$ et $u(t_0) = y_0 > 0$. On trouve $u(t) = \kappa e^{t^2/2}$ avec $\kappa = y_0 e^{-t_0^2/2} > 0$. Donc $y(t) \geq u(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$ et on peut supposer $t_0 \geq 1$ en prolongeant une solution (si elle n'a pas déjà explosée avant). Pout $t \geq t_0 \geq 1$ avec $y(t_0) > 0$ on a maintenant $ty(t) + t^2y(t)^2 \geq t^2y(t)^2 \geq y(t)^2$ et on a donc $y(t) \geq z(t)$ pour $t \geq t_0 \geq 1$ et $z' = z^2$ avec $z(t_0) = y_0$. On trouve donc $z(t) = \frac{-1}{t+\tau}$ avec $\tau = -\frac{1+ty_0}{y_0}$ On trouve donc une solution qui explose en temps $t \leq t_0 + \frac{1+ty_0}{y_0}$.

0.7 Exo 73

Si $y(x) = \alpha(x-x_0)^n + O((x-x_0)^{n+1})$ avec $\alpha \neq 0$ et $n \geq 1$, alors $\sin y^3 = \alpha^3(x-x_0)^{3n} + O((x-x_0)^{3n+1})$ et $\log(1+y^4) = \alpha^4(x-x_0)^{4n} + O((x-x_0)^{4n+1})$. Donc y' s'annulle au moins à l'ordre $3n-1 > n-1$ en x_0 ce qui est absurde. Donc $y(x) = 0$ est l'unique solution qui s'annulle quelque part.

Autre façon : L'équa diff est Lippschitz. Les solutions sont donc unqiques et $y(x) = 0$ est solution. C'est donc l'unique solution qui s'annulle par lipschitzité.

0.8 Exo 74

C'est l'ens. des fcts C^1 tq $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Ces fcts vérifient clairement la condition.

Soit maintenant f une fct C^1 tq $\lim_{x\to\infty} f'(x) + f(x) = l$. En remplaçant f par $f - l$ on peut supposer $l = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors A tq $|f'(x) + f(x)| < \epsilon$ pour tout $x > A$. Supposons qu'il existe $x > A$ tq $f(x) > 2\epsilon$ (le cas $f(x) < -2\epsilon$ est analogue). On a donc $f'(x) < -\epsilon$ et il existe donc y dans $(x, (f(x)-2\epsilon)/\epsilon)$ tel que $f(y) < 2\epsilon$. Comme $f(x)$ est décroissant pour $x > A$ tq $f(x) > \epsilon$, $f(x) \leq 2\epsilon$ pour tout $x > y$. Un argument analogue montre $f(x) > -2\epsilon$ pour x suffisamment grand ce qui prouve $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et ensuite $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

0.9 Exo 75

S'annuler: avoir (au moins une) des racines. (exple $\sin x$ pour $p = 1$).

(1) Si f ne s'annule pas, f est de signe constant car continu et ne peut donc pas changer de signe par le thm des valeurs intermédiaires.

(2) Supposons $f(x) > 0$. Comme p n'est pas identiquement nulle, il existe a tq $p(a) > 0$ donc $f''(a) = -f(a)p(a) < 0$. Comme $p(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$ pour tout x et $f'(x)$ est donc décroissante. Si $f'(a) > 0$ alors $f'(x) \geq f(a)$ pour $x < a$ et on a donc pour $f(\xi) \leq 0$ pour $\xi = x - f(a)/f'(a) < x$ ce qui est absurde. Si $f'(a) < 0$, un raisonnement analogue marche. Si $f'(a) = 0$ alors $f'(a-\epsilon) > 0$ pour $\epsilon > 0$ par continuité et positivité de p en $p(a) > 0$.

0.10 Exo 76

(1) l'éq est partout Lippschitz avec la même constante: $|\sin u - \sin v| \leq |u-v|$. Donc existence et unicité localement pour tout x. Comme $|\sin y| \leq 1$, on a $|y'| \leq 1$ et aucune solution ne peut exploser. Donc solutions sur $\mathbb{R}$. Supposons y de classe C^m. Alors $y' = \sin y$ est de classe C^m ce qui implique que y est de classe C^{m+1} et y est donc de classe C^∞ par ré'currence (car y est C^1 par définition).

(2) Solutions stationnaires: $y' = \pi n$ pour un entier relatif n donc $y(t) \in \pi\mathbb{Z}$.

(3) $y_0 \in (0, \pi)$. La solution correspondante $y(t_0) = y_0$ ne peut pas croiser les deux solutions stationnaires $y(t) = 0$ et $y(t) = \pi$ par unicité. Elle est donc coincée dans $y(t) \in (0, \pi)$ pour tout t. Comme $\sin y$ est > 0 pour $y \in (0, \pi)$, la solution est croissante. Comme elle est bornée par π elle converge. Elle ne peut pas converger vers une valeur limit $l < \pi$, sinon sa dérivée tend vers $\sin l > 0$ ce qui est absurde. (Plus précisément, on arrive à une absurdité en utilisant les accroissement finis.) Pareil pour $x \to -\infty$ (la limite est 0).

(4) (i) On a $f(0 = g(0) = \pi/2$ et

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(-t)(-1) \\ &= \sin(f(-t)) \\ &= \sin(\pi - f(-t)) \\ &= \sin(g(t)) \end{aligned}$$

ce qui montre que $g(t) = f(t)$.

(ii) Comme $y' > 0$ (pour $y_0 \in (0, \pi)$) on a $f'' = \cos f f' = \cos f \sin f < 0$ pour $y \in (\pi/2, \pi)$ ce qui montre que f est convexe pour $t > 0$.

(iii) Si $\cos(f(t)) = -\mathrm{th}(t)$ alors $f(t) = \arccos(-\mathrm{th}(t))$ t on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{\sqrt{1-(\mathrm{th}^2 t)}} \frac{(-1)}{\cosh^2(t)} \\ &= \ldots = \frac{1}{\cosh(t)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin(f(t)) &= \sin(\arccos(-\mathrm{th}(t))) \\ &= \sqrt{1-\mathrm{th}^2(t)} \\ &= \ldots \\ &= \frac{1}{\cosh(t)} \ . \end{aligned}$$

0.11 Exo 77

sols stationnaires (constantes) : $x(t) = 0$ et $x(t) = 1$.

$\int \frac{dx}{x-x^2} = \log |(x/(1-x)| = \int dt = t + C$ donne $\frac{x}{1-x} = \kappa e^t$ et on obtient $x = \frac{\kappa e^t}{1+\kappa e^t}$.

Pour $\kappa > 0$, on a $x(t) \in [0, 1]$ ($\kappa = 01$ donne $x(t) = 0$ et $\kappa = +\infty$ donne $x(t) = 1$. Pour $\kappa < 0$, on a des solutions qui explosent en $t = -\log(-\kappa)$. Pour $t < -\log(-\kappa)$, on a $x(t) < 0$ et pour $t > -\log(-\kappa)$ on a $x(t) > 1$. Limites aux bornes: $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$.

0.12 Exo 79

(1) $u, \tilde{u}$ dans (a, b) implique

$$|u^2 - \tilde{u}^2| = |u + \tilde{u}| \cdot |u - \tilde{u}| \leq 2 \max(|a|, |b|)|u - \tilde{u}| \ .$$

(On peut aussi simplement remarquer que $u' = f(t, u)$ avec f qui est C^1, donc lippschitz.)

(2) $u(t) = -1/(t - 1/u_0)$ est continu sur $(-\infty 1/u)$ et $\lim_{t \to u_0 -} u(t) = -\infty$. D'autre part, u est bien solution de l'équa diff (E_c) qui est lippschitz. Le problème de Cauchy $u(0) = u_0$ a donc une unique solution.

(3) g C^1 implique que l'équa diff est lippschitz et on a localement existence et unicité de la solution. Ceci implique que (les graphes de) deux solutions distinctes ne se rencontrent pas. Il suffit donc de montrer le résultat pour v tel que $v(a) = u(a)$ (remplacer u par la solution $\tilde{u}$ au problème de

Cauchy $\tilde{u}(a) = v(a)$ et on a $\tilde{u}(t) \geq u(t)$ pour $t \geq a$.) Si $v'(t) \geq g(t, v(t))$ alors $v - u$ est ≥ 0 pour t dans $[a, a + \epsilon)$ (maladroit, incomplet?)

(4) (pas de question, donc pas de réponse)

(5)

$$\begin{aligned} u'(t) &= x(t) + y(t) + 2x^2(t) + 2y^2(t) \\ &= x(t) + y(t) + (x(t) + y(t))^2 + (x(t) - y(t))^2 \\ &> (x(t) + y(t))^2 = u^2(t) \end{aligned}$$

car $x(t) + y(t) > 0$.

(6) La solution de $u(t)$ est au-dessus de la solution de $y' = y^2$ par le point (3) et la solution de $y' = y^2$ explose en temps fini par (2).

0.13 Exo 80

Matrice A: Val propres $a \pm b$ de vecteurs propres $(1, \pm 1)$ et on a $P^{-1}AP = \text{diag}(a + b, a - b)$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On trouve donc

$$\exp(A) = P\text{diag}(e^{a+b}, e^{a-b})P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{a+b} + e^{a-b} & e^{a+b} - e^{a-b} \\ e^{a+b} - e^{a-b} & e^{a+b} + e^{a-b} \end{pmatrix}.$$

L'application

$$\mathbb{C} \ni (a + ib) \longmapsto \varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est un morphisme d'anneaux. On a donc

$$e^B = \varphi(\exp(a + ib)) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Pour $C = D + N$ avec $D = \text{diag}(a, a)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui commutent on a $\exp(C) = \exp(A)\exp(N) = \text{diag}(e^a, e^a)(Id_2 + N) = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

0.14 Exo 81

(1) On a $\det(xId_3 - A) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$. Deux valeurs propres avec partie réelle > 0, donc point déquilibre instable.

(2) Il faut calculer $\exp(tA)$: Vecteurs propres: $v_1 = (7, -5, 2), v_2 = (3, -1, 1), v_{-2} = (1, 1, -1)$. Avec

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ 1/4 & 1/12 & -2/3 \end{pmatrix}$$

nous avons $P^{-1}AP = D(1,2,-2)$ avec D diagonal de coeffs $1, 2, -2$. On a donc

$$R(t) = PD(e^t, e^{2t}, e^{-2t})P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 3/4e^{2t} + 1/4e^{-2t} & -7/3e^t + 9/4e^{2t} + 1/12e^{-2t} & -7/3e^t + 3e^{2t} - 2/3e^{-2t} \\ -1/4e^{2t} + 1/4e^{-2t} & 5/3e^t - 3/4e^{2t} + 1/12e^{-2t} & 5/3e^t - e^{2t} - 2/3e^{-2t} \\ 1/4e^{2t} - 1/4e^{-2t} & -2/3e^t + 3/4e^{2t} - 1/12e^{-2t} & -2/3e^t + e^{2t} + 2/3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(Vérification : on a bien $R(0) = I_3$.)

(3) On a

$$R(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7e^t - 6e^{2t} - e^{-2t} \\ -5e^t + 2e^{2t} - e^{-2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

0.15 Exo 82

(1) On a avec $X(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) L'équation (E) est Lipschitz avec une constante uniforme. Donc solutions maximales sur $\mathbb{R}$.

(3) $A = I_3 + 2J + 3J^2$.

(4) $J^3 = 0I_3$. Donc $\exp(tJ) = I_3 + tJ + t^2/2J$ et $\exp(tJ^2) = I_3 + tJ^2$.

(5) On a

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tI_3)\exp(2tJ)\exp(3tJ^2) \\ &= e^t I_3(I_3 + 2tJ + 2t^2J^2)(I_3 + 3tJ^2) \\ &= e^t(I_3 + 2tJ + (2t^2 + 3t)J^2) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (2t^2+3t)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(6) Variation des constantes :

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (2t^2+3t)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(t)e^t + 2t\beta(t)e^t + (2t^2+3t)\gamma(t)e^t \\ e^t\beta(t) + 2t\gamma(t)e^t \\ \gamma(t)e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient après simplifications :

$$\begin{aligned}
\alpha' + 2t\beta' + (2t^2+3t)\gamma' &= te^{-t}\\
\beta' + 2t\gamma' &= e^{-t}\\
\gamma' &= e^{-t}
\end{aligned}$$

On obtient d'abord $\gamma(t) = -e^{-t} + c$. Ensuite

$$\beta' = e^{-t}(1-2t)$$

donne $\beta(t) = 2te^{-t} + e^{-t} + b$ et

$$\alpha' + e^{-t}(2t-4t^2) + e^{-t}(2t^2+3t) = te^{-t}$$

équivalant à $\alpha' = e^{-t}(-4t+2t^2)$ donne $\alpha(t) = -2t^2e^{-t}+a$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & (2t^2+3t)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 2t & (2t^2+3t) \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t^2 \\ 1+2t \\ -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (a+2tb+(2t^2+3t)c)e^t - t \\ (b+2tc)e^t+1 \\ ce^t-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(7) Pour $t_0 = 0$ on obtient $a = x_0, b = y_0 - 1, c = z_0 + 1$ ce qui donne

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} (x_0 + 2t(y_0-1) + (2t^2+3t)(z_0+1))e^t - t \\ (y_0 - 1 + 2t(z_0+1))e^t + 1 \\ (z_0+1)e^t - 1 \end{pmatrix}$$

On laisse le cas $t_0 \neq 0$ aux intrépides.

0.16 Exo 83

On a

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

Poly char $(x+1)^2$: la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. $v_{-1} = (1,-2)$ est vect propre. Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ On a donc

$$\begin{aligned}\exp(xA) &= P \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2x)e^{-x} & xe^{-x} \\ -4xe^{-x} & (1-2x)e^{-x} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pour la solution de l'équation homogène. Variation des constantes : On considère

$$\begin{pmatrix} \alpha(x)(1+2x)e^{-x} + \beta(x)xe^{-x} \\ -\alpha(x)4xe^{-x} + \beta(x)(1-2x)e^{-x} \end{pmatrix}$$

On trouve après simplification

$$\begin{aligned}\alpha'(x)(1+2x) + x\beta'(x) &= xe^{x}, \\ -\alpha'(x)4x + \beta'(x)(1-2x) &= 2xe^{x}\end{aligned}$$

donnant $\beta'(x) = (8x^2+2x)e^x$ et $\alpha'(x) = (x-4x^2)e^x$.
On trouve

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= (-4x^2+9x-9)e^x + a, \\ \beta(x) &= (8x^2-14x+14)e^x + b\end{aligned}$$

ce qui donne la solution générale

$$\begin{pmatrix} a(1+2x)e^{-x} + bxe^{-x} + 5x - 9 \\ -4axe^{-x} + b(1-2x)e^{-x} - 6x + 14 \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$ donnent $a = 10, b = -14$ ce qui donne la solution particulière

$$\begin{aligned}y(x) &= (10+6x)e^{-x} + 5x - 9 \\ z(x) &= -(14+12x)e^{-x} - 6x + 14\end{aligned}$$

0.17 Exo 85

(1) Il faut calculer $R(t) = \exp(tA)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de poly char $(z+1)(z-3)$. Vecteurs propres: $v_{-1} = (1,-1)$ et $v_3 = (1,1)$. Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

on a $P^{-1}AP = D(-1,3)$ matrice diagonale avec coeffs diag -1 et 3. On a donc

$$\begin{aligned}R(t) &= PD(e^{-t}, e^{3t})P^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) (On peut chercher une solution particulière sous forme de combinaison linéaire de e^t et e^{2t}. On trouve que

$$\begin{aligned} x &= -1/2e^t - 1/3e^{2t}, \\ y &= -2/3e^{2t} \end{aligned}$$

marche.)

Variation des constantes : On pose

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha(t)(e^{-t} + e^{3t})/2 + \beta(t)(-e^{-t} + e^{3t})/2 \\ y(t) &= \alpha(t)(-e^{-t} + e^{3t})/2 + \beta(t)(e^{-t} + e^{3t})/2 \end{aligned}$$

On obtient apres simplification :

$$\begin{aligned} \alpha'(t)(e^{-t} + e^{3t}) + \beta'(t)(-e^{-t} + e^{3t}) &= 2e^{2t} \\ \alpha'(t)(-e^{-t} + e^{3t}) + \beta'(t)(e^{-t} + e^{3t}) &= 2e^{t} \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t} - e^{2t} + e^{3t}) \\ \beta' &= \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t} + e^{2t} - e^{3t}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -e^{-2t}/4 - e^{-t}/2 - e^{2t}/4 + e^{3t}/6 + a \\ \beta(t) &= -e^{-2t}/4 - e^{-t}/2 + e^{2t}/4 - e^{3t}/6 + b \end{aligned}$$

En posant $a = b = 0$ on trouve la solution particulière déjà rencontrée.

Pour trouver la solution particulière avec $x(0) = y(0) = 1$, on remarque que la solution particulière trouvée plus haut vérifie $x(0) = -5/6$ et $y(0) = -2/3$. Il faut donc rajouter la solution $R(t)(11/12, 5/6)^t$ du système homogène à cette solution particulière. On trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= -1/2e^t - 1/3e^{2t} + 1/12e^{-t} + 7/4e^{3t}, \\ y(t) &= -2/3e^{2t} - 1/12e^{-t} + 7/4e^{3t}. \end{aligned}$$