Éléments de corrections TD5

Roland.Bacher@univ-grenoble-alpes.fr

March 27, 2024

Corrections assez succinctes.

0.1 Exo 51

(1) $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y-2z^2, 4z^3-4yz)$. On a $\nabla f(0,0,1) = (0,-2,4)$ qui montre $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) \neq 0$. Donc φ existe dans un voisinage de $(0,0)$ par le thm fct implicite (f polynomiale, donc C^1).

(2) $\nabla f = (0,0,0)$ implique $x=0$ et $y=z^2$ et $f(0,z^2,z) = -1 \neq 0$ donc $f(x,y,z)=0$ définit une sous-variété lisse de dimension 2 (surface) dans $\mathbb{R}^3$.

(3) $(x,y) \longmapsto f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ implique

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{4\varphi^3(x,y) - 4y\varphi(x,y)}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{2\varphi^2(x,y) - 2y}{4\varphi^3(x,y) - 4y\varphi(x,y)}$$

donc

$$\nabla\varphi(x,y) = \frac{1}{2\varphi^3(x,y) - 2y\varphi(x,y)}(-x, \varphi^2(x,y) - y)$$

0.2 Exo 52

$C = f^{-1}(0)$ pour $f = x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ avec $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2x + 1, 3y^2 - 2y - 1)$. Donc la droite $x = y$ (perpendiculaire à $\nabla f(0,0) = (1,-1)$ est la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point $(0,0)$. La courbe $\mathcal{C}$ à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ est donné par $x^2+y^2 = x-y$ et le changement de variable $u = x+y,\ v = x-y$ donne $u^2+v^2 = 2v$ équivalant à $u^2+(v-1)^2 = 1$. Donc cercle osculateur centré en $(1/2,-1/2)$ (de rayon $1/\sqrt{2}$) et $\mathcal{C}$ ressemble au voisinage de $(0,0)$ à son cercle osculateur.

Au voisinage de $(1,1)$ on a $\nabla f(1,1)=(3,0)$ donc point lisse avec tangente verticale. Changement de variable $x=X+1, y=Y+1$ (simplifie l'étude : on se ramène à l'origine), donne

$$(X+1)^2+(Y+1)^3-(X+1)^2-(Y+1)^2+(X+1)-(Y+1)$$

$$=X^4+4X^3+5X^2+3X+Y^3+2Y^2$$

et le comportement est donné (à l'ordre 2) par l'ellipse

$$5(X+3/10)^2+2Y^2=9/20.$$

0.3 Exo 53

(1) Posons $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ qui est C^1. On a $\nabla f(x,y,z)=3(x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy)$. Si $\nabla f(x,y,z)=(0,0,0)$ alors $x(x^2-yz)+y(y^2-xz)+z(z^2-xy)=f(x,y,z)$. Tous les points critiques de f se trouvent donc dans $f^{-1}(0)$ et $C=f^{-1}(1)$ est une variété.

(2) (a) Réunion des deux droites de coordonnées. Pt singulier à l'origine. (b) hyperbole lisse ($\nabla(x,y)=(y,x)=(0,0)$ implique $(x,y)=(0,0)$ qui n'est pas sur l'hyperbole.)

(3) Intersection de la sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon 1 et centre $(0,0,0)$ avec le cylindre $(x-1/2)^2+y^2=1/4$ de rayon $1/2$ et d'axe $(1/2,0,\mathbb{R})$. Notons f_1,f_2 les deux équations.

$\nabla f_1=(2x,2y,2z)$ et $\nabla f_2=(2x-1,2y,0)$. Il peut y avoir problème si ∇f_1 et ∇f_2 collinéaires.

Si $z\neq 0$, alors $y=0,\ x=1/2$ et $(1/2,0,z)$ n'appartient pas au cylindre $x^2+y^2=x$. Donc $z=0$. En soustrayant les deux équations ($x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2-x=0$ on obtient alors $x=1$ et $y=0$. Le point $(1,0,0)$ de l'intersection est donc le seul point problématique. Le changement de variable $x=X+1$ donne $X^2+2X+y^2+z^2=0$ et $X^2+X+y^2=0$ et on obtient donc $X=-z^2$ ce qui donne $y=\pm z\sqrt{1-z^2}$. Infinitésimalement, on a donc deux courbes avec des tangentes distinctes qui se croisent en $(1,0,0)$.

En suivant les indications: $x=1/2+\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$. On a $\rho=1/2$ et θ,z arbitraires sur le cylindre. Pour $\mathbb{S}^2$ on obtient alors

$$(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta+4z^2=4$$

qui donne $z^2=\frac{1-\cos\theta}{2}$ et on a donc $z=\pm\sqrt{(1-\cos\theta)/2}=\pm\theta/2+o(\theta)$ qui montre de nouveau un croisement transverse de deux courbes en $(1,0,0)$ (correspondant à $\theta=0$).

0.4 Exo 54

1. La courbe paramétrée $x \longmapsto f(x) = (\sin(x), \sin(2x))$ a comme vecteur vitesse $f' = (\cos(x), 2\cos(2x)) = (\cos(x), 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$ qui est toujours $\neq (0,0)$. La courbe est donc lisse sauf en ses points d'auto-intersection. Cette courbe est 2π-périodique et on a $\sin x = \sin x'$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \cos 2x' = 2\sin x' \cos x'$ si et seulement si $\{x, x'\} = \{0, \pi\}$ pour $x \neq x'$ dans $[0, 2\pi)$. La courbe est donc lisse sur $f(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$. (La courbe $f(\mathbb{R})$ ressemble au symbol ∞.) L'image $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété.

2. g a comme jacobienne $\begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 sauf pour $u = v = 0$ et g est une injection de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^3$ (les deux premières coordonnées de l'image déterminent u, v à transposition près. La troisième coordonnée donne l'ordre sauf si $u = \pm v$. L'image n'est pas une sous-variété.

0.5 Exo 55

(1) $\mathcal{S}$ d'équation $4x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$ est une hyperboloide à une nappe d'axe de rotation $\mathbb{R}(0,0,1)$.

(2) L'intersection de S avec un plan est soit une hyperbole, parabole, ellipse, ou deux droites (cas dégénéré).

$S \cap P$ contient $\pm(1/2, 1/2, 1)$ donc $S \cap P$ est non vide. P donne $z = x + y$ et on obtient $1 = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^2 = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ et $3x^2 - 2xy + 3y^2$ est une forme quadratique défini positive donc $E = S \cap P$ est une ellipse (cercle de rayon 1 pour cette forme quadratique), donc E est borné.

(3) En tout point de E pour lequel la troisième coordonnée $z = x + y$ n'est pas extrémale (donc pour z dans l'intervale ouvert $(-1, 1)$. (Petit calcul de multiplicateurs de Lagrange: il faut maximiser/minimiser $x + y$ sur $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$). On obtient ± 1 donc z dans l'ouvert $(-1, 1)$ convient. ....

(4) $(\varphi(z), \psi(z), z)$ sur S si et seulement si $4\varphi^2 + 4\psi^2 - z^2 = 1$ et en dérivant par rapport à z on trouve

$$8\varphi(z)\varphi'(z) + 8\psi(z)\psi'(z) - 2z = 0$$

et $(\varphi(z), \psi(z), z)$ sur P donne similairement

$$\varphi'(z) + \psi'(z) - 1 = 0$$

(en dérivant $\varphi + \psi - z = 0$).

On a donc $\varphi'(z) = \frac{z - 4\psi(z)}{4(\varphi(z) - \psi(z))}$ et $\psi'(z) = \frac{z - 4\varphi(z)}{4(\psi(z) - \varphi(z))}$. Pour $h = \varphi - \psi$ on obtient $h'(z) = \frac{-z}{2h(z)}$ après simplifications utilisant l'identité $z = \varphi(z) + \psi(z)$. On a donc $hh' = -z/2$ et une intégration donne $h^2(z) = -z^2/2 + c$. Donc

$h(z) = \pm\sqrt{c - h^2/2}$. On obtient ainsi (modulo erreurs de calculs)

$$\varphi(z), \psi(z) = \frac{z \pm \sqrt{c - z^2/2}}{2}$$

en résolvant le système linéaire $\varphi - \psi = h$, $\varphi + \psi = z$.

0.6 Exo 56

a dans M implique l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}_a \subset \mathbb{R}^n$ de a et d'une fonction $f : \mathcal{V}_a \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ différentiable avec $df(a)$ de rang $n - p$ tel que $M \cap \mathcal{V}_a = f^{-1}(0)$. Pareil pour b dans N avec $g : \mathcal{V}_b \longrightarrow \mathbb{R}^{m-q}$ et on peut donc prendre $(f, g) : \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m-p-q}$ ce qui montre que $M \times N$ est une sous-variété de dimension $p + q$.

0.7 Exo 57

Idée: La condition $T_aM + T_aN = \mathbb{R}^n$ implique que cela se passe localement comme pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension p et q qui engendrent $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang donne la dimension $p+q-n$ de cette intersection.

Attention: L'hypothèse $T_AM + T_aN = \mathbb{R}^n$ pour a dans $M \cap N$ est cruciale: Deux courbes dans $\mathbb{R}^3$ peuvent s'intersecter (par exemple) en de petits segments fermés de longueur strictement positive.

0.8 Exo 58

(Maximiser $5x + y - 3z$ sur $\{(x, y, z), x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.)

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ définit la sphère $\mathbb{S}^2$ qui est compact et qui contient donc le fermé $M = f^{-1}(\{(0, 0)\})$ (la fonction f est continue). Donc M est compact. g continu sur un compact atteint ses extréma.

Points critiques pour $g|M$: $\nabla g \in \mathbb{R}\nabla f_1 + \mathbb{R}\nabla f_2$. Donc

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 8x - 16y + 8z$$

donc $y = (x + z)/2$ et $x + y + z = 0$ implique $z = -x,\ y = 0$. En utilisant l'équation pour $\mathbb{S}^2$ on trouve finalement les pts critiques $\pm(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ correspondant aux extréma globaux $\pm 4\sqrt{2}$ sur M.

0.9 Exo 59

(Étude de $F(x, y) = x^2 - y^2 + 2\ln\frac{y}{x}$.)

1. $F(x, y) = F(-x, -y)$. On peut donc supposer $x \geq 0$. Comme le log doit être défini, on doit alors avoir $xy > 0$.

2. $\nabla(F) = 2(x-1/x, -y+1/y)$ et on a donc $\nabla F = (0,0)$ si et seulement si $x = y = 1$ (en regardant les numérateurs de $\frac{x^2-1}{x}$ et $\frac{1-y^2}{y}$).

3. $f' = 2\frac{x^2-1}{x}$ est < 0 sur $(0,1)$ et > 0 sur $(1,\infty)$. La fonction $f(x) = x^2 - 2\ln x$ est donc décroissante sur $(0,1)$, a minimum 1 en 1 et elle croît sur $(1,\infty)$. On a $(x,y) = \Gamma$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Donc soit $y = x$ (ce qui définit la fonction identité $x \longmapsto y = x$ qui est croissante) soit $y = x'$ avec 1 appartenant à l'intervalle fermé délimité par x et x'. La fonction $x \longmapsto y = x'$ est bien décroissante grâce aux propriété de f. Le point critique $(1,1)$ de Γ est l'intersection des graphes des deux fonctions.

0.10 Exo 60

($E = M_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \subset E$ les matrices inversibles.)

1. $\Omega = E \setminus \det^{-1}(0)$ et det est continu car polynomiale.

2. $d\Psi(A,B)(X,Y) = \frac{d}{ds}(A+sX)(B+sY) - I = AY + XB$. On a donc $d\Psi(A,A^{-1})(X,Y) = AY + XA^{-1}$ et $Y \longmapsto AY$ bijective implique $A \longmapsto A^{-1}$ localement difféo. Pour $d\varphi$ on a $Ad\varphi(A)(X) + XA^{-1} = 0$ ce qui donne $d\varphi X = -A^{-1}XA^{-1}$. (Vérification pour $n = 1$: $a + x \longmapsto \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x + o(x)$ et on a bien $(a+x)\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}\right) = 1 + o(x)$.)

3. φ est involutif: $\varphi \circ \varphi = id$. C'est donc globalement inversible et c'est partout un difféo local. C'est donc un difféo global.

0.11 Exo 61

($\det(A - \lambda I)$ sur $M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.)

(a) f est polynomiale en tous les $n^2 + 1$ arguments.

(b) $df(A,\lambda)(X,\kappa) = \frac{d}{ds}\det(A - \lambda I + sX - s\kappa I)$ Si $\det(A - \lambda I) \neq 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\det(A - \lambda I + sX - s\kappa I) \\
&= \frac{1}{\det(A-\lambda I)^{-1}}\frac{d}{ds}\det\left(I + sX(A-\lambda I)^{-1} - s\kappa(A-\lambda I)^{-1}\right) \\
&= \det(A-\lambda I)\left(\mathrm{tr}(X(A-\lambda I)^{-1}) - \kappa\mathrm{tr}((A-\lambda I)^{-1})\right)
\end{aligned}$$

FINIR!!!

(c) $\frac{\partial}{\partial\lambda}f(A,\lambda)$ est la dérivée du polynome caractéristique de A en λ. Elle est donc non-nulle pour λ une racine simple.

(d) U est le complementaire de $h^{-1}(0)$ pour $h(U) = \det(U)\mathrm{discriminant}(\det(U - tI))$ (le discriminant d'un polynome est une fonction polynomiale de ses coefficients qui est nulle si et seulement si le polynome a au moins une racine multiple).

0.12 Exo 62

(Extrema de $2x + 3y + 2z$ sur l'intersection d'un plan avec un cylindre.)

Points critiques par multiplicateurs de Lagrange:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 6x$$

Donc $x = 0$ pour les points critiques. Ceci donne $z = 1$, $y = \pm 1$ et extrema $2 \pm 3 = \{-1, 5\}$.

0.13 Exo 63

Solution géométrique:

La transformation $(x, y, z) \longmapsto (ax, by, cz)$ est un homéo de la sphère unité standard $\mathbb{S}^2$ sur E qui multiplie les volumes par abc. On peut donc supposer $a = b = c = 1$ et travailler avec $\mathbb{S}^2$. Soit P un parallélipipède de volume maximale à sommets dans $\mathbb{S}^2$. Soient H, H' deux plans affines parallèles contenant deux faces parallèles de P. Les intersections $P \cap H$ et $P \cap H'$ sont deux parallélogrammes isométriques et on a donc $H = -H'$. Ces parallélogrammes sont inscrits dans des cercles, ce sont donc des rectangles. Si ce n'est pas des carrés, on peut augmenter leur surface (tracer une diagonale pour le voir) et donc le volume de P en gardant la hauteur (distance entre H et H') constante. Ceci montre que P est un cube. Donc $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^3$ convient pour P.

En multipliant les trois coordonnées par a, b, c on obtient un parallélipipède de volume maximale $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ dans E.

Correction du cas particulier où les sommets sont de la forme $(\pm x, \pm y, \pm z)$ **avec** $x, y, z > 0$**.** Le volume est alors $8xyz$ et il faut donc maximiser la fonction $(x, y, z) \longmapsto xyz$ sur le compact E. Donc (mult de Lagr) (yz, xz, xy) et $(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$ doivent être collinéaires. Donc $yz/b^2 = xz/a^2$ etc. donne $(x, y, z) = \lambda(a, b, c)$ et on trouve $\lambda = 1/\sqrt{3}$ pour un volume de $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$.

0.14 Exo 64

(a) Σ est l'intersection de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ avec le plan affine $x + y + z = 1$. Comme Σ contient les trois points $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, c'est l'unique cercle passant par ces trois points. C'est donc une variété lisse de dimension 1.

Par calcul: Les deux gradients sont $\nabla f_1 = (1, 1, 1)$ et $\nabla f_2 = (2x, 2y, 2z)$. Donc collinéaire en $x = y = z$ mais le point $1/3(1, 1, 1)$ du plan affine n'appartient pas à $\mathbb{S}^2$. L'intersection est donc une sous-variété lisse de dimension 1.

(b) C'est la droite

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(aussi donnée par $\mathbb{R}(1,1,1)$) obtenue en intersectant les deux plans tangents (à $\mathbb{S}^2$ et au plan affine) en $1/3(2,2,-1)$. (Pour obtenir l'espace tangent affine en $(1/3(2,2,-1)$, il faut ajuster : $2x + 2y - z = 7/3$ et $x + y + z = 1$.)

(c) Point critique par multiplicateurs de Lagrange:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = 2(xy^2 + yz^2 + zx^2 - y^2z - z^2x - x^2y)$$

En remplaçant $z = 1 - x - y, z^2 = 1 - x^2 - y^2$ on obtient

$$(y - x)(3xy + 1 - x - y) = 0$$

Si $y = x$ on a $z = 1 - 2x$ et $(1 - 2x)^2 = 1 - 2x^2$ donne $x(3x - 2) = 0$ donc $(0,0,1)$ ou $(2/3, 2/3, -1/3)$.

Si $3xy + 1 - x - y = 0$ on obtient $y = \frac{x-1}{3x-1}$ et $z = 1 - x - y = 3x\frac{x-1}{3x-1}$ et finalement

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = \frac{(3x-1)^2(1-x^2) - (x-1)^2}{(3x-1)^2} = \frac{9x^2(x-1)^2}{(3x-1)^2}$$

qui donne l'équation polynomiale

$$(3x-1)^2(1-x)(1+x) - (x-1)^2 - 9x^2(x-1)^2 = 2x(1-x)(3x-2)(3x+1)$$

dont les racines $0, 1, 2/3, -1/3$ donnent les permutations cycliques des deux points critiques $(0,0,1)$ et $(2/3, 2/3, -1/3)$ trouvés ci-dessus.

On a donc un minimum $-4/27$ en $1/3(2,2,-1)$ et permutations et un maximum 0 en $(1,0,0)$ et permutations.

0.15 Exo 65

En suivant l'indication, il s'agit de maximiser le log du produit. Multiplicateurs de Lagrange:

$$\nabla = (\ldots, \frac{1}{a_i} - \frac{1}{1-a_i} = \frac{1-2a_i}{a_i(1-a_i)}, \ldots)$$

doit être proportionnel à $(1,1,\ldots,1)$. Or $\frac{1-2x}{x(1-x)}$ a dérivée

$$\frac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(1-x)^2} < 0$$

pour x dans $(0,1)$. Les coefficients du gradient ∇ sont donc monotones en leurs arguments $a_1, \ldots, a_n$ ce qui implique $a_1 = \ldots = a_n$ en cas d'égalité. Comme le produit tend clairement vers 0 'au bord' (correspondant à au moins un des facteurs a_i ou $1 - a_i$ nul), l'égalité correspond au maximum $a_i = 1/n$ donnant $\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$ (qui tend vers 0 car $(n-1)^n/n^n$ tend vers $1/e$).

0.16 Exo ?? (supprimé?)

(1) f continu sur C compact (car simplexe fermé de dimension $n-1$ avec sommets $(1/\alpha_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1/\alpha_n))$, donc f atteint son sup. $f(\partial C) = 0$ pour $\partial C = C \setminus C'$ et $f(\frac{1}{n\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{n\alpha_n}) > 0$ donc f atteint le max en un point a de C'.

(2) H hyperplan affine, C' ouvert non-vide dans H. Les deux sont donc des sous-variétés de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$.

(3) $\nabla h = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\nabla \log \circ f = ((\alpha_1/x_1, \ldots, \alpha_n/x_n)$ sont collinéaires en un maximum n. Donc $x_1 = \ldots = x_n = 1$ car $\sum \alpha_i x = x$. C'est le seul point critique. C'est donc le maximum et on a bien $f(\mathbf{x}) \leq f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ pour $\mathbf{x} \in C$.

(4) Les deux cotés de l'inégalité sont homogènes de degré 1 (car $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n)$ grâce à $\sum \alpha_i = 1$. On peut donc se restreindre à C où on a bien l'inégalité $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 1 = \sum \alpha_i x_i$. On a égalité pour $x_1 = \ldots = x_n$.

(5) On a $V^2 = (xyz)^2 = (xy)(xz)(yz)$ et $S = 2(xy+xz+yz)$. On obtient

$$V^{2/3} = (xy)^{1/3}(xz)^{1/3}(yz)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(xy + xz + yz) = \frac{1}{6}S$$

en appliquant l'inégalité du (4) à xy, xz, yz avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$.

La surface à volume donné est minimale en cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus. Ce cas correspond au cube.

0.17 Exo ?? (supprimé?)

(1) $(X, Y, Z) = f(t, \theta)$ implique $\theta = Z$ et $t = Y/\sin Z$ si $Z \notin \pi\mathbb{Z}$, respectivement $t = X/\cos Z$ pour $Z \in \pi\mathbb{Z}$. L'application f est donc bijective sur son image.

C'est une immersion C^1 car

$$Jf(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta \\ \sin\theta & t\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 pour tout t, θ.

(2) $(x, y, z) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$ satisfait l'équation définissant $\mathcal{H}$. Donc $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{H}$.

D'autre part, (x, y, z) dans $\mathcal{H}$ implique que la projection orthogonale $(x, y, z) \longmapsto (x, y)$ est perpendiculaire à $(\sin z, -\cos z)$, donc de la forme $t(\cos z, \sin z)$ ce qui montre $\mathcal{H} \subset f(\mathbb{R}^2)$.

(3) Déjà vu. On peut aussi travailler avec $\mathcal{H} = h^{-1}(\{0\})$ pour $h(x, y, z) = x\sin z - y\cos z$ de gradient $\nabla h(x, y, z) = (\sin z, \cos z, x\cos z + y\sin z) \neq (0, 0, 0)$ pour tout (x, y, z). Donc $S = \mathcal{H}$ est une sous-variété lisse de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

(4) Jf de rang 2 partout et le sous-ev engendré par les deux vecteurs lignes de Jf ne contient pas $(0,0,1)$ si $t \neq 0$. Donc Z existe par le thm des fcts implicites.

(5) $Z_0 = \arctan(y/x)$.

(6) $\nabla h(0,0,0) = (0,1,0)$. Le plan tangent en $(0,0,0)$ est donc le plan $Y = 0$.

$\nabla h(1,0,0) = (0,1,1)$. Le plan tangent en $(1,0,0)$ est donc le plan $Y + Z = 0$.

(7) $\sup(\varphi(S)) = +\infty$ car $\varphi(x,y,z)$ est la distance au carré de (x,y,z) au point $(0,-1,0)$ et S n'est pas borné.

Comme S est fermé, $\min(\varphi(S))$ est atteint sur les points de S à distance minimale de $(0,-1,0)$. Notons

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ f = (t\cos\theta)^2 + (1 + t\sin\theta)^2 + \theta^2 = t^2 + 2t\sin\theta + 1 + \theta^2 \ .$$

Comme f est une paramétrisation de S, minimiser φ sur $S = \mathcal{H}$ équivaut à minimiser $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\nabla\tilde{\varphi}(t,\theta) = 2(t + \sin\theta, t\cos\theta + \theta)$$

ce qui donne $t = -\sin\theta$ et $\theta = \sin\theta\cos\theta$ en un point critique. Comme $|\sin\theta\cos\theta| \leq |\theta|$ avec égalité pour $\theta = 0$, le point $(0,0)$ est l'unique point critique de $\tilde{\varphi}$ et il y a donc un unique minimum (local) qui vaut 1, atteint par le point $(0,0,0)$ de S. Le gradient de l'équation $x\sin z = y\cos z$ définissant $\mathcal{H}$ vaut $(0,-1,0)$ et le gradient de φ vaut $(0,2,0)$. Le multiplicateur de Lagrange en ce point critique vaut donc -2.

0.18 Exo ?? (supprimé?)

(1) $M \ni x \longmapsto d(x, x_0)$ est une fonction réelle continue sur le compact M. Elle atteint donc son minimum.

(2) $f_1, \ldots, f_{n-d}$ foncts C^1 définissant M localement comme $f_i^{-1}(\{0\})$ au vsge d'un minimum x tel que $\nabla f_i(x)$ lin indep. Le gradient $\nabla d_{x_0}(x) = 2(x - x_0)$ au point x d'un minimum x est donc dans l'ev. engendré par $\nabla f_i(x)$ et les $\nabla f_i(x)$ sont tous orthogonaux à l'esp tgt de M en x.

0.19 Exo ?? (supprimé?)

(1) Pour $g(x,y,z) = xyz - 6$ on $\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Donc (x,y,z) point critique si au plus un seul parmi x, y, z est non-nul. Donc $g(x,y,z) = -6$ en un pt critique et $S = g^{-1}(\{0\})$ est surface lisse de dimension 2.

Plan tangent en un point (x,y,z) de S:

$$\begin{aligned} 0 &= yz(X - x) + xz(Y - y) + xy(Z - z) \\ &= yzX + xzY + xyZ - 3(xyz - 6) - 18 \end{aligned}$$

Un point (X,Y,Z) du plan tangent au point (x,y,z) de S véfifie donc l'équation

$$yzX + xzY + xyZ = 18$$

(2) $S = g^{-1}(\{0\})$ est préimage d'un fermé par une application polynomiale, donc S fermé. $(6,t,1/t) \in S$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ est non-borné. Donc S n'est pas compact.

(3) Prenons $R \geq \frac{M^2}{6}$. $\max(x,y,z) \geq R$ implique

$$\min(x,y,z) \leq \sqrt{\frac{xyz}{\max(x,y,z)}} \leq \sqrt{6/R} \leq \frac{6}{M}.$$

On a donc

$$f(x,y,z) \geq \max(xy,xz,yz) = \frac{xyz}{\min(x,y,z)} = \frac{6}{\min(x,y,z)} \geq M$$

(4) Prenons $M = f(3,2,1) = 18$. Pour $R = M^2/6 = 18^2/6 = 54$, la question (3) montre que $f(x,y,z) \geq 18$ pour (x,y,z) dans S avec $\|(x,y,z)\|_\infty \geq 54$. La fonction continue f atteint donc son minimum ≤ 18 sur le compact $K = [0,54]^3 \cap S$ obtenu en intersectant le fermé S avec la boule fermée de rayon 54 pour la norme sup.

(5) Multiplicateurs de Lagrange: $\nabla g(x,y,z) = (yz,xz,xy)$ et $\nabla f(x,y,z) = (y+2z, x+3z, 2x+3y)$ sont collinéaires en un point critique. Comme $x,y,z > 0$, on a $xyz > 0$ et on obtient

$$\frac{y+2z}{yz} = \frac{x+3z}{xz} = \frac{2x+3y}{xy}$$

équivalant à

$$\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z} + \frac{3}{x} = \frac{2}{y} + \frac{3}{x}.$$

À partir de $\frac{1}{z} + \frac{2}{y} = \frac{2}{y} + \frac{3}{x}$ on obtient $x = 3z$ et ensuite similairement $y = 2z$ ce qui donne $6z^3 = 6$ donc $z = 1$ et le minimum $18 = f(3,2,1)$ est atteint au point $(3,2,1)$ de S.

(6) L'inégalité est homogène (de degré 3). Il suffit donc de la démontrer pour (x,y,z) dans S. On veut

$$6 \leq C(\min f(S))^{3/2} = C(3\sqrt{2})^3$$

avec égalité pour $C = \frac{1}{9\sqrt{2}}$.