Éléments de corrections TD3

Roland.Bacher@univ-grenoble-alpes.fr

February 13, 2024

Comme rédiger bien est extrêmement chronophage, je vais parfois enfreindre les règles du préambule du TD1. Certaines corrections seront donc un peu plus approximatives.

Merci de me signaler d'éventuelles erreurs.

0.1 Exo 25

(a) Jacobienne:

$$J = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos y \\ \cos x & \sin y \end{pmatrix}$$

On a donc $J(a,b)^t = (-a\sin x - b\cos y, a\cos x + b\sin y)^t$ de norme

$$\sqrt{a^2+b^2+2ab(\sin x\cos y+\cos x\sin y)}\ .$$

Comme $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ on a $\sin x\cos y + \cos x\sin y = \sin(x+y)$. On a donc $|\sin x\cos y + \cos x\sin y| \leq 1$ ce qui donne les inégalités

$$(|a|-|b|)^2 \leq a^2+b^2+2ab(\sin x\cos y+\cos x\sin y) \leq (|a|+|b|)^2$$

qui impliquent $\| J(a,b)^t \| \leq |a|+|b| \leq \sqrt{2}$ si $a^2+b^2 \leq 1$.

(b) L'application $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}F(x,y)$ est donc contractante et la suite (x_n,y_n) a un unique point fixe (égale à $(x_\infty,y_\infty) \sim (0.5419, -0.2291)$) d'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x & = \cos x - \sin y, \\ 2y & = \sin x - \cos x. \end{array} \right.$$

0.2 Exo 26

(a) f et g sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et même analytique).

(b) La Jacobienne J_f de f est donnée par

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Comme $g = f \circ f$, on a $J_g = (J_f \circ f)J_f$ pour la Jacobienne J_g de g. On obtient donc

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x^2-y) & -1 \\ 2(x^2-y) & 2(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

(c) $dg(0,0)$ par rapport à la base standard est donnée par

$$J_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $g(0,0) = (0,0)$, que g est $\mathcal{C}^1$ et que $dg(0,0)$ est nul, il existe bien $\delta > 0$ (dépendant de la norme utilisé) tel que $\| dg(x,y) \| \leq 1/2$ si $\| (x,y) \| \leq \delta$.

(d) La fonction g fixe $(0,0)$ et (majoration par acroissements finies) elle est strictement contractante dans la boule de rayon δ. L'origine $(0,0)$ est donc l'unique point fixe dans cette boule. (Mais dans $\mathbb{R}^2$, la fonction f et donc aussi $g = f \circ f$ possède un autre point fixe donnée approximativement par $(-0.46557, 0, 68233)$ qu'on peut trouver algébriquement : $y = x^2 - x$ en un point fixe et on trouve ainsi $x^2 - x = x^2 + (x^2-x)^2$ ce qui donne un polynôme de degré 4 en x qui a deux racines réelles.)

0.3 Exo 27

Jacobienne de $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(\sin(x+y), \cos(x-y))$ donnée par

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x-y) & \sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \| J(a,b)^t \| &= \frac{1}{2}\sqrt{\cos(x+y)^2(a+b)^2 + \sin(x-y)^2(-a+b)^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \| (a,b) \| . \end{aligned}$$

(L'inégalité de la deuxième ligne est une égalité pour $y = -x = \pi/4$.)

L'application $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(\sin(x+y), \cos(x-y))$ est donc strictement contractante et possède un unique point fixe $\sim (0.386, 0.497)$.

0.4 Exo 28

La préimage $K = \nu^{-1}(0)$ de $\nu : x \longmapsto \| df(x) \|$ est certainement fermé dans Ω car f est $\mathcal{C}^1$.

K est non-vide si f s'annule sur un point de Ω.

Il suffit donc de montrer que K est ouvert pour avoir l'égalité $K = \Omega$ car Ω convexe est connexe. Donc K ouvert et fermé dans Ω est une réunion non-vide de composantes connexes.

Soit x_0 dans K tel que $f(x_0) = 0$. Comme Ω est convexe on peut utiliser les accroissements finis sur le segment compacte I (on a seulement besoin de la convexité pas du fait qu'on travaille avec un ouvert pour les accroissements finis) joignant x_0 à x et on obtient

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(x_0) \| = \| f(x) \| &\leq \| x - x_0 \| \max_{\xi \in I} \| df(\xi) \| \\ &\leq \| x - x_0 \| \ \ k \max_{\xi \in I} \| f(\xi) \| \ . \end{aligned}$$

En itérant on a donc

$$\| f(x) \| \leq \| x - x_0 \|^n \ \ k^n \max_{\xi \in I} \| f(\xi) \|$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$. En prenant x tel que $\| x - x_0 \| < 1/k$ et en passant à la limite pour $n \to \infty$ on a $f(x) = 0$. Ceci montre que K est ouvert.

0.5 Exo 29

Les coordonnées de g sont des produits de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ avec Jacobienne

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

de déterminant e^x, donc inversible.

Comme $g(x,y) = g(x, y + 2\pi)$, la fonction g n'est pas injective.

$g(x,y) = (\Re(e^{x+iy}), \Im(e^{x+iy}))$.

0.6 Exo 30

(a) $f'(x) = 1 + 2x \sin(\pi/x) - \pi \cos(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \sin(\pi/x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + x \sin(\pi/x) = 1.$$

(b) On a

$$f'(1/(2k)) = 1 + \frac{1}{k} \sin(2k\pi) - \pi \cos(2k\pi) = 1 - \pi < -2$$

pour k dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et

$$f'(1/(1+2k)) = 1 + \frac{2}{1+2k} \sin((1+2k)\pi) - \pi \cos((1+2k)\pi) = 1 + \pi > 4$$

pour k dans $\mathbb{Z}$. La fonction f n'est donc bijective dans aucun voisinage de 0 et elle n'a donc pas de fonction réciproque dans un voisinage de 0.

(c) Non : La dérivée de f est discontinue en 0.

0.7 Exo 31

x et y sont les racines du polynôme $Z^2 - (x+y)Z + xy$. Elles sont bien déterminée à permutation près. Un ouvert maximal d'injectivité pour f ne contient pas de paire de points distincts $(a,b),(b,a)$. On peut donc prendre une des composante de $\mathbb{R}^2 - \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale. (C'est clair que c'est un difféo car le discriminant du polynôme ci-dessus sera strictement positif dans un tel ouvert connexe maximal.)

0.8 Exo 32

Considérons $(X,Y,Z) = \Phi(x,y,z)$. Posons $Z = x-y$ pour obtenir $x = y+Z$. On a ensuite

$$\left\{ \begin{array}{ll} X & = U + V, \\ Y & = e^{2Z}U - V, \end{array} \right.$$

pour $U = e^{2y} > 0$ et $V = e^{2z} > 0$.

En résolvant on obtient $U = \frac{X+Y}{1+e^{2Z}}$ et $V = \frac{e^{2Z}X-Y}{1+e^{2Z}}$.

Comme U et V sont strictement positifs, on a

$$\text{Image}(\Phi) = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3, X+Y > 0, Y < e^{2Z}X\}$$

(en considérant les numérateurs de $U = \frac{X+Y}{1+e^{2Z}}$ et de $V = \frac{e^{2Z}X-Y}{1+e^{2Z}}$). On peut alors prendre l'inverse en calculant d'abord U,V en fonction de X,Y,Z. On obtient ainsi $y = \frac{1}{2}\log U$ et $z = \frac{1}{2}\log V$ et finalement $x = y+Z$). Comme il n'y a que des fonctions différentiables impliquées, la fonction Φ est un difféo de $\mathbb{R}^3$ sur Image(Φ).

0.9 Exo 33

(a) La Jacobienne de g est

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\det(J_g(x,y) = 1 - f'(y)f'(x) \geq 1 - k^2 > 0$ et comme g est $\mathcal{C}^1$, elle est localement un difféomorphisme. L'image $g(\mathbb{R}^2)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $(x,y),(x',y')$ deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ tels que $g(x,y) = g(x',y')$. Supposons d'abord $|x-x'| \geq |y-y'|$ et considérons la fonction différentiable $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la première coordonnée

$$h(t) = g_1(x+t(x'-x), y+t(y'-y)) = x + t(x'-x) + f(y+t(y'-y))$$

de la restriction de $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$ à la droite paramétrée $(x,y)+t(x'-x, y'-y)$.

On a $h(0) = h(1)$ et il existe donc $\tau \in (0,1)$ tel que $h'(\tau) = 0$. Or

$$|h'(\tau)| = |x' - x + f'(y + \tau(y' - y))(y' - y)| \geq |x' - x| - k|y' - y| > 0$$

en contradiction avec $h'(\tau) = 0$.

Si $|y' - y| \geq |x' - x|$ on remplace la première coordonnée g_1 par la deuxième coordonnée g_2 de g.

(c) Notons $m = \| g(0,0) \|_\infty$. On a (accroissements finis appliquées aux deux coordonnées de g restreint au segment reliant $(0,0)$ à (x,y))

$$\| g(x,y) \|_\infty \geq \max(|x| - k|y| - m, |y| - k|x| - m)$$

donc

$$2 \| g(x,y) \|_\infty \geq (1-k) \| (x,y) \|_\infty - 2m$$

qui implique

$$\| (x,y) \|_\infty \leq 2 \frac{\| g(x,y) \|_\infty + p}{1-k} .$$

Si $g(x_n, y_n)$ converge vers une limite (a,b), on a donc

$$\max(|x_n|, |y_n|) \leq 2 \frac{\max(|a|, |b|) + 1 + m}{1-k}$$

si $\| g(x_n, y_n) - (a,b) \|_\infty < 1$. La suite (x_n, y_n) est donc bornée dans $\mathbb{R}^2$ et possède une sous-suite convergente vers une limite (x_∞, y_∞) dans $\mathbb{R}^2$ et on a $g(x_\infty, y_\infty) = (a,b)$ par continuité.

Chaque point d'accumulation (x,y) de $g(\mathbb{R}^2)$ appartient donc à l'image de g. Ceci montre que l'image de g est fermé.

(d) g est un difféomorphisme local dont l'image est un ouvert et un fermé non-vide de $\mathbb{R}^2$. L'image est donc $\mathbb{R}^2$ et g est surjective. Comme g est injective par le point (b), l'application g est une bijection. Comme c'est localement un difféomorphisme, c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

0.10 Exo 34

(a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse. L'inégalité de l'hypothèse avec $k > 0$ implique que f est injectif. Pour montrer que $df(x)$ est inversible en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(df(x)) = \{0\}$ car nous sommes en dimension finie.

Comme f est différentiable on a

$$f(x + th) = f(x) + tdf(x)h + o(|t|).$$

L'inégalité de l'hypothèse montre donc

$$\| tdf(x)h + o(|t|) \| \geq k \| th \|$$

pour tout t (et avec $k > 0$ fixé) ce qui est impossible si $df(x)h = 0$ pour $h \neq 0$. La différentielle df de f est donc partout inversible et comme f est C^1 et injectif, c'est un difféo sur son image $f(\mathbb{R}^n)$. L'image $f(\mathbb{R}^n)$ est donc ouverte dans $\mathbb{R}^n$.

(b) L'inégalité de l'hypothèse montre que la préimage d'une suite de Cauchy y_i dans $f(\mathbb{R}^n)$ est une suite de Cauchy $x_i = f^{-1}(y_i)$ convergeant vers une limite x_∞. On a donc $f(x_\infty) = \lim_{i\to\infty} y_i$ par continuité de f ce qui montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

(c) On a $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ car $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé non-vide de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est donc surjective.

La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}^n$ et comme elle est localement un difféomorphisme, elle définit un difféomorphisme global.

0.11 Exo 35

Notons $f = (f_1, f_2, f_3)$ la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par le côté gauche des trois égalités. Sa Jacobienne est

$$J(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 & 3t^2 \\ 2x & 2y & 2z & 2t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la sous-matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ formée des trois premières colonnes de

$$J(0,-1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vaut 12.

On a $f(0,-1,1,0) = (0,-2,0)$. Comme la restriction de $J(0,-1,1,0)$ à un sous-espace affine de la forme $\mathbb{R}^3 \times \{t_0\}$ est surjective pour t_0 suffisamment proche de 0, il existe bien une courbe régulière de la forme $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t), t)$ dans un voisinage assez petit du point $(0,-1,1,0)$ de $f^{-1}(\{(0,2,0)\})$. Pour les dérivées $x'(0), y'(0), z'(0)$ on a $J(0,-1,1,0)(x'(0), y'(0), z'(0), 1)^t = (0,0,0)^t$. En résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3y'(0) + 3z'(0) & = 0, \\ -2y'(0) + 2z'(0) & = 0, \\ x'(0) + y'(0) + z'(0) + 1 & = 0 \end{array} \right.$$

on trouve $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (-1, 0, 0)$.

0.12 Exo 36

(a) f est une application polynomiale (quadratique) de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$. L'application f est donc C^1. Sa différentielle est donnée par $df(A)H = AH + HA$ (car $(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ avec $H^2 = o(\| H \|)$). (On peut aussi voir l'exo 15 du deuxième chapître).

(b) Comme $df(Id)H = 2H$ la fonction f est un difféomorphisme local dans un voisinage de l'identité et g est le difféomorphisme local réciproque (ou inverse).

(c) L'identité $J^2 = I$ est évidente.

En J on a

$$df(J)H = JH + HJ$$

et on obtient concrètement

$$J \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} -2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

L'application df est donc une application linéaire avec un noyau de dimension 2 et une image de dimension 2. La fonction f n'est donc pas un difféomorphisme local au point J. Ce qui donne

$$dg(J) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible. Une telle fonction h ne peut donc pas être un difféomorphisme C^1.

petit souci si $dh(I)$ n'est pas inversible !!!

Remarque : Même un homéo local h qui est seulement C^0 n'existe pas: Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \neq 0$ petit et supposons l'existence de $h(A) = \begin{pmatrix} -1-x & y \\ u & 1+v \end{pmatrix}$ avec x, y, u, v petits tels que

$$h(A)^2 = \begin{pmatrix} (1+x)^2 + uv & (v-x)y \\ (v-x)u & (1+v)^2 + uv \end{pmatrix} = A.$$

Alors $x = v$ ce qui implique $\epsilon = 0$.

0.13 Exo 37

On peut exprimer y différentiablement en fonction de x (donc $y = y(x)$ fonction C^1 en x et C est localement donné par $x \longmapsto (x, y(x))$ pour x proche de x_0 avec $y(x_0) = y_0$) sur C au voisinage d'un point (x_0, y_0) de

C tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. (Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ pour (x_0, y_0) dans C, on a similairement localement $x = x(y)$ fonction C^1 en y.)

Pour la dérivée de la fonction implicite on a

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(f)(x, y(x)) \cdot (1, y'(x))^t \\ &= (3x^2 - 3y, -3y^2 - 3x)(1, y'(x)) \\ &= 3((x^2 - y) - (y^2 + x)y'(x)). \end{aligned}$$

On a donc $y'(x) = \frac{x^2 - y(x)}{x + y(x)^2}$ (avec $x + y(x)^2 \neq 0$ par hypothèse).

Équation de la tangente à C en un point (x, y) de C est donnée par

$$(x, y) + \mathbb{R}(\nabla f(x, y))^\perp = (x, y) + \mathbb{R}(x + y^2, x^2 - y)$$

ou encore par l'équation implicite

$$\frac{1}{3}\nabla(f)(x, y)(X - x, Y - y)^t = (x^2 - y)(X - x) - (x + y^2)(Y - y) = 0$$

(pour (x, y) un point de C). La tangente est également donnée par $(x, y(x)) + \mathbb{R}(1, y'(x))$, en terme de la fonction implicite $y(x)$ satisfaisant $f(x, y(x)) = 0$.

Le cas $x = x(y)$ est similaire.

0.14 Exo 38

Si (x, y, z, t) est solution des deux équations avec $x = 1$, $z = 0$ et $t = 1$ alors $y = -1$. On s'intéresse donc à un voisinage du point $(1, -1, 0, 1)$.

La Jacobienne de $f(x, y, z, t) = (x + y - zt, xy - z + t)$ est donnée par

$$J_f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -t & -z \\ y & x & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$J_f(1, -1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant de la sous-matrice carré formée des deux premières colonnes de $J_f(1, -1, 0, 1)$ vaut 2 on a bien deux fonctions implicites ϕ_1, ϕ_2 en z et t au voisinage de $z = 0, t = 1$ avec $\phi_1(0, 1) = 1, \phi_2(0, 1) = -1$ telles que $f(\phi_1(z, t), \phi_2(z, t), z, t) = 0$ au voisinage de $(z, t) = (0, 1)$.

Pour calculer les différentielles, on utilise

$$J_f(1, -1, 0, 1)(\nabla\phi_1(0, 1)(a, b)^t, \nabla\phi_2(0, 1)(a, b)^t, a, b)^t = (0, 0)^t.$$

On obtient

$$0 = \frac{\partial\phi_1}{\partial z}a + \frac{\partial\phi_1}{\partial t}b + \frac{\partial\phi_2}{\partial z}a + \frac{\partial\phi_2}{\partial t}b - a$$

et

$$0 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z}a - \frac{\partial \phi_1}{\partial t}b + \frac{\partial \phi_2}{\partial z}a + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}b - a + b$$

pour tout a, b ce qui donne

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z}(1,1) = 0, \ \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(1,1) = 1/2$$

et

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z}(1,1) = 1, \ \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(1,1) = -1/2.$$