Éléments de corrections TD2

Roland.Bacher@univ-grenoble-alpes.fr

February 7, 2024

Comme rédiger bien est extrêmement chronophage, je vais parfois enfreindre les règles du préambule du TD1. Certaines corrections seront donc un peu plus approximatives.

Merci de me signaler d'éventuelles erreurs.

0.1 Exo 12

a) Fixons h dans E et posons $\alpha_h(t) = f(a+th) - f(a) - L(th)$. La fonction $\alpha_h : [0,1] \longrightarrow F$ est continue et dérivable sur $(0,1)$ et on a

$$\begin{aligned} \| \alpha_h'(t) \| &= \| df(a+th)h - Lh \| \\ &= \| (df(a+th) - L)h \| \\ &\leq \| df(a+th) - L \| \cdot \| h \| \end{aligned}$$

(Attention: Les normes sont parfois des normes pour applications linéaires entre Banachs et parfois des normes de Banachs!) et $\| df(a+th) - L \| \to 0$ pour $\| th \| \to 0$ par hypothèse de convergence de df vers L au point a. Comme $\| th \| \leq \| h \|$ pour t dans $(0,1)$, on a aussi $\| df(a+th) - L \| \to 0$ pour $\| h \| \to 0$.

Par l'inégalité des accroissements finis on a donc

$$\| \alpha_h(1) - \alpha_h(0) \| \leq \max_{t \in [0,1]} (\| \alpha_h'(t) \|) = o(\| h \|).$$

Mais $\alpha_h(0) = 0$ et $\alpha_h(1) = f(a+h) - f(a) - L(h)$ et f est donc différentiable en a.

b) f continue en $(0,0)$: Pour $(x,y) \neq 0$ tel que $x^2 + y^2 < 1$ on a

$$|xy \log(x^2+y^2)| \leq \left| \| (x,y) \|_2^2 \log(\| (x,y) \|_2^2) \right|$$

qui tend vers 0 si $\| (x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \log(x^2+y^2) + xy \frac{2x}{x^2+y^2} \ .$$

À voir que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue et tend vers 0 au voisinage de $(0,0)$. (On suppose toujours $(x,y) \neq (0,0)$.)

On a

$$
\begin{aligned}
|y\log(x^2+y^2)| &\leq \| (x,y) \| \ \ |\log(x^2+y^2)| \\
&= \| (x,y) \| \ \ |\log(\| x^2+y^2 \|^2)| \\
&= 2 \| (x,y) \| \ \ |\log(\| x^2+y^2 \|)|
\end{aligned}
$$

et on procède comme ci-dessus.

D'autre part

$$
|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}| \leq \frac{2 \| (x,y) \|^3}{\| (x,y) \|^2} = 2 \| (x,y) \| \ \ .
$$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ (pour $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, c'est pareil) est donc continue et $\to 0$ si $(x,y) \to (0,0)$.

On peut donc appliquer a) avec $L = 0$.

c) On veut appliquer le point a). La seule condition qui manque est un prolongement par continuité de g en a. On prend une suite $e_1, e_2, \ldots$ de points distincts de a mais convergeant vers a. Il faut montrer que $g(e_i)$ est une suite de Cauchy dans F. (La limite existe alors car F est complète et elle est unique car on peut considérer la réunion de deux suites.)

Soient e_i et e_j deux termes de la suite. Si le segment reliant e_i à e_j ne contient pas a, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à ce segment. S'il contient a, il faut faire un petit détour par un troisième point en dehors de ce segment mais dans une boule de rayon plus petit que $\min(\| e_i - a \|_E, \| e_j - a \|_E)$.

Si $E = \mathbb{R}$, on peut considérer la fonction $g(x) = 1$ pour $x > 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$. Cette fonction n'a pas de prolongement continu. La raison est la non-connexité de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Un espace vectoriel réel complet de dimension ≥ 2 privé d'un point reste cependant connexe ce qui empêche ce genre d'exemple.

Dans l'exo 2 du TD1 on a pris la limite à droite pour éviter ce problème.

0.2 Exo 13

a) On a

$$
\begin{aligned}
(f \circ \alpha)'(0) &= df(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) \\
&= df(x)h
\end{aligned}
$$

qui est égal à $\partial_h f(x)$ par définition.

Version pédante : $f \circ \alpha$ est différentiable en 0 car composition de deux fcts diffs. On va supposer $x = 0_E$ (remplaçer $f(z)$ par $f(z+x)$ et $t \longmapsto \alpha(t)$

par $t \longmapsto \alpha(t) - x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f \circ \alpha(t)|_{t=0} &= \lim_{t\to 0} \frac{f\circ\alpha(t) - f\circ\alpha(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(0_E) + df(\alpha(t)) + o(\| \alpha(t) \|) - f(0_E)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(df(th + o(|t|)_E) + o(\| th + o(|t|)_E \|)_E\right) \\
&= df(0_E)\cdot h \\
&= \partial_h f(0_E)
\end{aligned}$$

b) Non: La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^6}$ si $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ de l'exemple 1.2.10 du cours possède toutes les dérivées directionelles à l'origine.

On a cependant $f(t^3, t) = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$. (La courbe $t \longmapsto (t^3, t)$ est choisie pour rendre le dénominateur homogène.) La fonction f est donc discontinue en $(0,0)$.

0.3 Exo 14

a) Compositions de fcts différentiables, donc différentiables. Les gradients sont :

$$\begin{aligned}
a'(x) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,-x), \\
\nabla b(x,y) &= (\frac{\partial g}{\partial y}(y,x), \frac{\partial g}{\partial x}(y,x)), \\
\nabla c(x,y) &= f'(x + g(x,y))\left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right), \\
\nabla d(x,y) &= f'(x^2 + y^2 + y^2)(2x, 2y, 2z).
\end{aligned}$$

b) Une telle fonction f est soit l'identité soit une fonction constante :
Posons $f_1(x,y) = f(x+y)$ et $f_2(x,y) = f(x + f(y))$. On a évidemment

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \ .$$

Comme $f_1(x,y) = f_2(x,y)$ on a aussi

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = f'(x + f(y)) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = f'(x + f(y)) f'(y) \ .$$

On a donc $f'(x + f(y))(1 - f'(y)) = 0$.
Si $f'(y) = 1$ pour tout y alors $f(x) = x + \alpha$ et on a

$$x + y + \alpha = x + (y + \alpha) + \alpha = x + y + 2\alpha$$

ce qui montre $\alpha = 0$ et $f(x) = x$.

S'il existe y tel que $f'(y) \neq 1$ alors

$$f'(x + f(y))(1 - f'(y)) = 0$$

pour tout x et on a donc $f'(x) = 0$ pour tout x et $f(x) = c$ est une fonction constante (qui vérifie évidemment l'identité requise : $f(x+y) = c = f(x + f(y)) = f(x+c) = c$).

0.4 Exo 15

a) Posons $\mu(M) = M^2$. On a

$$\begin{aligned}\mu(M+A) &= (M+A)^2 \\ &= M^2 + MA + AM + A^2 \\ &= M^2 + d\mu(M)A + A^2\end{aligned}$$

où $d\mu(M)$ est l'application linéaire $A \longmapsto MA + AM$ (pas besoin de vérifier la continuité de dM : nous sommes en dimension finie n^2).

On va travailler avec la norme sup pour montrer que $\| A^2 \|_\infty = o(\| A \|_\infty)$. En effet, on a $\| A^2 \|_\infty \leq n \| A \|_\infty^2$ car chaque coeff de A^2 est une somme de n produits de deux coefficients dans A.

b) On a similairement pour $\mu_k(M) = M^k$:

$$\mu_k(M+A) = (M+A)^k = M^k + d\mu_k(M)A + R_M(A)$$

où $d\mu_k(M)$ est l'application linéaire $A \longmapsto \sum_{j=0}^{k-1} M^j A M^{k-1-j}$ (qui est continue car nous sommes en dimension finie) et où $R_M(A)$ est la somme de tous les autres produits. Plus précisément, $R_M(A)$ est une somme de $2^k - 1 - k$ produits qui font intervenir k facteurs dans $\{M, A\}$ tels que A intervient au moins 2 fois.

Il suffit donc de montrer que la norme sup d'un tel terme S (parmi les $2^k - 1 - k$ contributions à $R_M(A)$) est $o(\| A \|_\infty)$. Or on a

$$\| S \|_\infty \leq n^{k-1} \max(1, \| M \|_\infty)^{k-2} \min(1, \| A \|_\infty^2) = o(\| A \|_\infty) \ .$$

(On prend le max et le min pour pouvoir traiter un sommand quelconque contenant au moins deux facteurs A). On a donc $R_M(A) \leq 2^k \| S \|_\infty = o(\| A \|_\infty)$.

c) On a

$$(M+H)A(M+H) = MAM + MAH + HAM + HAH$$

et $HAH = o(\| H \|)$. La différentielle en M est donc donnée par $H \longmapsto MAH + HAM$.

0.5 Exo 16

(a) pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^3}{x^4+y^2} - \frac{4x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}, \frac{3xy^2}{x^4+y^2} - \frac{2xy^4}{(x^4+y^2)^2} \right).$$

qui est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En $(0,0)$ les dérivées partielles de f par rapport à x et y sont nulles.

Similairement, pour (x,y) avec $y \neq 0$ on a

$$\nabla g(x,y) = (y\cos(x/y), 2y\sin(x/y) - x\cos(x/y))$$

qui est continu sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$.

Comme $g(x,0) = 0$ on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = 0$.

Pour la dérivée partielle par rapport à y on a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \sin(x/y) - 0}{y} = 0\ .$$

(b) Pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$, il suffit de montrer que $\nabla f(x,y)$ tend vers $(0,0)$ pour $(x,y) \to (0,0)$. On peut traiter les différents sommands de $\nabla f(x,y)$ individuellement. On vérifie facilement $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si $xy = 0$. Pour $xy \neq 0$ on a les majorations

$$\begin{aligned}
|\frac{y^3}{x^4+y^2}| &\leq |\frac{y^3}{y^2}| \leq \| (x,y) \|_\infty, \\
|\frac{4x^4y^3}{x^8+2x^4y^2+y^4}| &\leq |\frac{4x^4y^3}{2x^4y^2}| = 2|y| \leq 2 \| (x,y) \|_\infty, \\
|\frac{3xy^2}{x^4+y^2}| &\leq |\frac{3xy^2}{y^2}| = |3x| \leq 3 \| (x,y) \|_\infty, \\
|\frac{2xy^4}{x^8+2x^4y^2+y^4}| &\leq |\frac{2xy^4}{y^4}| = 2|x| \leq 2 \| (x,y) \|_\infty\ .
\end{aligned}$$

D'autre part, ∇g est discontinu en $(x,0)$ pour $x \neq 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \lim_{y \to 0} 2y\sin(x/y) - x\cos(x/y) = -x \lim_{y \to 0} \cos(x/y)$$

n'existe pas.

La fonction g n'est donc pas $\mathcal{C}^1$. Elle est cependant $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}$ (et son gradient est discontinu sur tout point non-nul du complément).

0.6 Exo 17

(a) $g = \tilde{g} \circ u$ pour $u(x, y) = (f(x), f(y), x - y)$ et $\tilde{g}(X, Y, Z) = (X - Y)/Z$ avec u qui est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\tilde{g}$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{Z = 0\}$. Or $u^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \subset \mathbb{R}(1, 1)$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h, x) - g(x, x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x)+f'(x)h+f''(x)h^2/2+o(h^2)-f(x)}{h} - f'(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f''(x)h^2/2 + o(h^2)}{h^2} = f''(x)/2
\end{aligned}$$

et on a donc $\nabla g(x, x) = \frac{1}{2}(f''(x), f''(x))$ (si g est C^1) par symétrie.

(c) C'est clair en dehors de la diagonale.

Sur la diagonale:

$$\begin{aligned}
g(x + h, x + h) &= f'(x + h) \\
&= f'(x) + f''(x)h + o(h) \\
&= f'(x) + \frac{1}{2}(f''(x), f''(x)) \cdot (h, h)^t + o(h) \\
&= f'(x) + \nabla g(x, x)(h, h)^t + o(h).
\end{aligned}$$

Pour $a \neq 1$ on a similairement

$$\begin{aligned}
&g(x + h, x + ah) \\
&= \frac{f(x + h) - f(x + ah)}{h(1 - a)} \\
&= \frac{f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + o(h^2) - f(x) - f'(x)ah - f''(x)a^2h^2/2 + o(h^2)}{h(1 - a)} \\
&= f'(x) + f''(x)h(1 + a)/2 + o(|h|) \\
&= f'(x) + \frac{1}{2}(f''(x), f''(x))(h, ah)^t + o(|h|) \\
&= f'(x) + \nabla g(x)(h, ah)^t + o(|h|).
\end{aligned}$$

Un petit argument de symétrie termine la preuve.

(d) g est de classe C^1 en dehors de la diagonale. Reste à vérifier $\lim_{x,y \to z} \nabla g(x, y) = \nabla g(z, z)$. Or $\nabla g(x, x)$ est continu en x SI (!!!!!) f est C^2. Il suffit donc de faire tendre x, y vers z avec $x \neq y$. On a

$$\nabla g(x, y) = (\frac{f'(x)(x - y) - f(x) + f(y)}{(x - y)^2}, \frac{-f'(y)(x - y) + f(y) - f(x)}{(x - y)^2})$$

Pour la première coordonnée on utilise $f(y) = f(x)+f'(x)(y-x)+f''(x)(y-x)^2/2 + o((x-y)^2)$ pour obtenir

$$\frac{f'(x)(x-y) - f(x) + f(y)}{(x-y)^2}$$
$$= \frac{-f'(x)(y-x) - f(x) + f(x) + f'(x)(y-x) + f''(x)(y-x)^2/2 + o((x-y)^2)}{(x-y)^2}$$
$$= f''(x)/2 + r$$

avec $r \to 0$ si $(|x-y| \to 0$. Cette coordonnée tend donc bien vers $f''(z)/2$ si $x, y \to z$.

Pour la deuxième coordonnée on fait la même chose.

0.7 Exo 18

Posons $F(x) = \tilde{F} \circ \gamma(x)$ où $\tilde{F}(x,y,z) = \int_y^z f(x,t)dt$ et $\gamma(x) = (x, a(x), b(x))$.

F est donc une composition de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= d\tilde{F}(\gamma(x))(\gamma'(x))^t \\ &= \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f'(x,t)dt, -f(x,a(x)), f(x,b(x))\right)(1, a'(x), b'(x))^t \\ &= \int_{a(x)}^{b(x)} f'(x,t)dt - f(x,a(x))a'(x) + f(x,b(x))b'(x). \end{aligned}$$

Justification pour

$$\frac{d}{dx}\int_y^z f(x,t)dt = \int_y^z f'(x,t)dt :$$

On a

$$\frac{d}{dx}\int_y^z f(x,t)dt = \lim_{h\to 0}\int_y^z \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}dt$$
$$\lim_{h\to 0}\int_y^z f'(\xi(x,h),t)dt$$
$$= \int_{a(x)}^{b(x)} f'(x,t)dt$$

pour $\xi(x,y) \in [x, x+h]$ et f' est uniformément continu sur un compact de la forme $[x, x+\alpha] \times [y,z]$.

0.8 Exo 19

Posons

$$d\Psi(f)h = \int_a^b \varphi'(f(x))h(x)dx\ .$$

$d\Psi(f)h$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un compact. C'est donc défini pour tout f, h de E. On a clairement $d\Psi(f) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrons que c'est une application linéaire continue : On a

$$|d\Psi(f)h| \leq |b-a| \max_{x\in[a,b]} (|\varphi'(f(x))|) \parallel h \parallel_\infty \ .$$

(C'est bien un max et non un sup: f continue implique $f([a,b])$ compact sur lequel la fonction continue $x \longmapsto |\varphi'(x)|$ atteint son maximum.)

Il reste à montrer que $d\Psi$ est bien la différentielle de Ψ. On a

$$\begin{aligned}
&|\Psi(f+h) - (\Psi(f) + d\Psi(f)h)| \\
\leq &\int_a^b |\phi(f(x)+h(x)) - \phi(f(x)) - \phi'(f(x))h(x)|dx \\
\leq &|b-a| \sup_{x\in[a,b]} (|\phi(f(x)+h(x)) - \phi(f(x)) - \phi'(f(x))h(x)|) \ .
\end{aligned}$$

Comme on a affaire à des fonctions continues sur un compact, le sup est atteint en $x_0 \in [a,b]$. Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe donc un $\delta > 0$ tel que $|\phi'(f(x_0)) - \phi'(\xi)| \leq \epsilon$ si $|f(x_0) - \xi| < \delta$. On a donc

$$\begin{aligned}
&|\Psi(f+h) - (\Psi(f) + d\Psi(f)h)| \\
\leq &|b-a| \cdot |\phi(f(x_0)+h(x)) - \phi(f(x_0)) - \phi'(f(x_0))h(x_0)| \\
\leq &|b-a| \cdot |\phi'(\xi)h(x_0) - \phi'(f(x_0))h(x_0)| \\
\leq &|b-a|\epsilon \parallel h \parallel_\infty
\end{aligned}$$

(par accroissements finis) pour $\parallel h \parallel_\infty < \delta$. Ceci montre $\Psi(f+h) - (\Psi(f) + d\Psi(f)h) = o(\parallel h \parallel_\infty)$ ce qui termine la preuve.

0.9 Exo 20

f est différentiable car donné par le polynôme $a_0 \sum_{j=1}^n j a_j$ en les coefficients de $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$.

Calcul sans utiliser les coefficients de P: Posons $df(P) : Q \longmapsto P(0)Q'(1) + Q(0)P'(1)$. On a

$$\begin{aligned}
f(P+Q) &= (P(0)+Q(0))(P'(1)+Q'(1)) \\
&= P(0)P'(1) + (P(0)Q'(1) + Q(0)P'(1)) + Q(0)Q'(1) \\
&= f(P) + df(P)Q + R
\end{aligned}$$

où $|R| \leq n|Q|_\infty^2$ pour $|\sum_{i=0}^n a_i X^i|_\infty = \max(|a_i|)$.

On a donc bien $R = o(\parallel Q \parallel_\infty)$ et la forme linéaire $df(P)$ est bien la différentielle de f en P.

Pour g on a $g(x^k) = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, \ldots, n$ (et $g(1) = 0$). Comme g est linéaire , c'est une application différentiable et on a $dg(P)Q = g(Q)$.

L'application h est polynomiale (de degré $2n+1$) en les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ de $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$. Elle est donc différentiable. Pour calculer la différentielle on peut procéder comme suit : On a $h(P) = \tilde{h} \circ \alpha(P)$ où $\alpha : E \longrightarrow E \times \mathbb{R}$ est l'application différentiable $\alpha(P) = (P, \int_0^1 P(t)^2 dt)$ avec différentielle

$$d\alpha(P) : Q \longmapsto (Q, 2\int_0^1 P(t)Q(t)dt)$$

et où $\tilde{h} : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'évaluation $(P, \xi) \longmapsto P(\xi)$ avec différentielle

$$d\tilde{h}(P, \xi) : (Q, a) \longmapsto Q(\xi) + P'(\xi)a.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d(\tilde{h} \circ \alpha)(P)Q &= d\tilde{h}(\alpha(P))(d\alpha(P)Q) \\ &= d\tilde{h}(P, \int_0^1 P(t)^2 dt) \cdot (Q, 2\int_0^1 P(t)Q(t)dt) \\ &= Q(\int_0^1 P(t)^2 dt) + P'(\int_0^1 P(t)^2 dt) 2\int_0^1 P(t)Q(t)dt \ . \end{aligned}$$

0.10 Exo 21

Comme $(x, y) \longmapsto x^2 - xy + y^2 = (x - y/2)^2 + 3/4y^2 = 3/4x^2 + (x/2 - y)^2 \geq \frac{3}{8}(x^2 + y^2)$ est une forme quadratique définie positive, la fonction f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

En $(0, 0)$ on utilise la majoration

$$|(x, y)| \leq \frac{8 \parallel (x, y) \parallel_2^{p+q}}{3 \parallel (x, y) \parallel_2^2}$$

qui montre la continuité si $p + q \geq 3$.

Pour $p = q = 1$ on a $f(x, 0) = 0$ et $f(x, x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et f a donc une discontinuité en $(0, 0)$.

Pour $p = 1$ et $q = 2$ (ou pour le cas similaire $p = 2, q = 1$) on a $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ ce qui implique que $df(0, 0)$ est identiquement nulle si f est différentiable en $(0, 0)$. Comme on a $f(x, x) = x$ ceci n'est pas le cas et f n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$ dans ce cas.

Pour $p + q \geq 4$, la fonction $|f(x, y)|$ est majorée par $\frac{8}{3} \parallel (x, y) \parallel_2^2$ ce qui implique la différentiabilité en $(0, 0)$.

Pour $p + q \geq 4$, les valeurs absolues des dérivées partielles de f près de $(0, 0)$ sont majorées par $C \parallel (x, y) \parallel_2^{p+q+2-1-4} = C \parallel (x, y) \parallel_2^{p+q-3}$ (pour une constante C : on peut prendre $C = \frac{8}{3}(3 + 3) = 16$) ce qui implique leur continuité en $(0, 0)$ et f est alors C^1.

Remarque finale. Le fait que le dénominateur est défini positive est cruciale car cela fait marcher les majorations.

0.11 Exo 22

(a) En utilisant $|\sin t| \leq |t|$ on a

$$|\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \leq \frac{\| (x,y) \|_\infty^2}{\| (x,y) \|_\infty} = \| (x,y) \|_\infty$$

et f est donc continue en $(0,0)$. La continuité de f en dehors de $(0,0)$ est évidente.

(b) Toutes les fonctions sont $\mathcal{C}^1$ et non-nulles si $xy \neq 0$.

(c) Il suffit de considérer les points sur les axes de coordonnées. Comme $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} = 0$ si $xy = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pour tout x, y.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y_0) - f(0,y_0)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sin(xy_0)}{|x|+|y_0|} - 0}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{xy_0 + O((xy_0)^3)}{x(|x|+|y_0|)} \\
&= \frac{y_0}{|y_0|}
\end{aligned}$$

qui vaut $+1$ pour $y_0 > 0$ et -1 pour $y_0 < 0$. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f existent donc partout.

(d) Non : Les dérivées directionnelles selon les axes de coordonnées sont nulles et la dérivée directionelle selon la diagonale n'existe même pas : $f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| + o(|x|)$ n'est pas dérivable en 0.

0.12 Exo 23

On n'aura besoin de la symétrie de u que dans la partie (c).

(a) On a

$$\langle u(x+h) | x+h \rangle = \langle u(x) | x \rangle + du(x)(h) + \langle u(h), h \rangle$$

où

$$du(x)(h) = \langle u(x) | h \rangle + \langle u(h) | x \rangle$$

qui est linéaire continue car composé d'applications linéaires et continues.

On a de plus

$$|\langle u(h) | h \rangle| \leq \| u \| \cdot \| h \|_2^2 = o(\| h \|_2)$$

ce qui termine la preuve de la différentiabilité.

(b) φ est différentiable car composé d'applications différentiables (pour le dénominateur, on peut soit utiliser la partie (a) avec u l'identité, soit utiliser la dernière partie de l'exo 9 du TD1). On a

$$d\varphi(x)(h) = \frac{\langle u(x)|h\rangle + \langle u(h)|x\rangle}{\langle x|x\rangle} - \langle u(x)|x\rangle \frac{2\langle x|h\rangle}{\langle x|x\rangle^2}$$

pour la différentielle.

(c) Si u symétrique :

$$\begin{aligned} d\varphi(x)(h) &= 2\frac{\langle x|x\rangle\langle u(x)|h\rangle - \langle u(x)|x\rangle\langle x|h\rangle}{\langle x|x\rangle^2} \\ &= \frac{2}{\langle x|x\rangle^2}\langle(\langle x|x\rangle u(x) - \langle u(x)|x\rangle x)|h\rangle \end{aligned}$$

On a donc $d\varphi(x) = 0$ si et seulement si

$$\langle x|x\rangle u(x) = \langle u(x)|x\rangle x$$

donc si et seulement si x est vecteur propre de u (de valeur propre $\frac{\langle u(x)|x\rangle}{\langle x|x\rangle}$).

0.13 Exo 24

(a) L'existence de toutes les dérivées directionelles implique $xy \neq 0$ dans le domaine de différentiabilité. Comme toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$, cet ensemble est le plus grand ensemble des points dans lequel f est différentiable.

(b) Soit L une forme linéaire continue sur E de norme $N = \| L \| = \sum_{x\in E,\ \|x\|_1=1} |L(x)|$. Soit e_i la suite avec coefficient 1 pour l'indice i et avec coefficients 0 pour tout indice différent de i. On a évidemment $e_i \in E$ et on peut poser $a_i = L(e_i)$. Comme $\| e_i \| = 1$, on a $|a_i| \leq \| L \|$ ce qui montre que la suite $a_0, a_1, \ldots$ est bornée. La densité dans E du sous-espace engendré par $e_0, e_1, \ldots$ implique qu'on a $L(x) = \sum a_i x_i$.

(ca) On a $F(te_i) = |t|$ qui n'est pas différentiable en $t = 0$. Pour x dans E avec $x_i = 0$ on a alors $F(x + te_i) = F(x) + |t|$ qui n'est pas différentiable en $t = 0$.

(cb) Supposons maintenant x_i non nul pour tout i. On a $F(x + te_i) = F(x) + |x_i + t| - |x_i|$. Pour $|t| < |x_i|$ on a

$$|x_i + t| - |x_i| = \operatorname{sgn}(x_i)t$$

en considérant les quatre cas de signe (pour x_i et t) possibles. On a donc bien $dF(x)$ de la forme annoncée si F est différentiable en x.

(cc) Pour $y = x + h^n$ avec h^n comme suggéré on a $y_i = x_i$ si $i < n$ et $y_i = -x_i$. On a donc $F(x) = F(x + h^n)$. Si F est différentiable en x, on a $|dF(x)h^n| = o(\| h^n \|_1)$ car $\| h^n \|_1$ tend vers 0.

On a également

$$dF(x)\cdot h^n = \sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{sign}(x_i)\cdot(-2x_i) = -\sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{sign}(2x_i)2x_i = -2\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| = -2 \parallel h^n \parallel_1 \ .$$

Si F est différentiable en x, on a donc

$$0 = F(x+h^n) - F(x) = dF(x)h^n + o(\parallel h \parallel_1) = -2 \parallel h^n \parallel_1 + o(\parallel h^n \parallel_1)$$

et on obtient la contradiction $\parallel h^n \parallel_1 = o(\parallel h^n \parallel_1)$.

(cd) F n'est pas différentiable en x par (ca) si x a un coefficient nul et F n'est pas différentiable en x par (cc) si x n'a que des coefficients non-nuls.