Éléments de corrections TD1

Roland.Bacher@univ-grenoble-alpes.fr

January 26, 2024

Quelques erreurs choisies avec beaucoup de soin subsistent dans la correction. Montrez votre perspicacité en les signalant à l'auteur.

Remarque générale : Pour le TD1, j'ai essayé d'utiliser des bonnes conventions pour écrire des maths (ce que l'on ne fait pas toujours au tableau) :

1) Un texte mathématique est d'abord un texte : les règles de grammaire et d'orthographe s'appliquent. (Signalez-moi les erreurs.)

1) Clarté et non-ambiguité, même dans les phrases : Si l'utilisation d'un pronom crée la moindre ambiguité (même si le sens est évident par le contexte), il vaut mieux l'éviter.

2) Parfois c'est bien de rappeler une chose, surtout si sa dernière apparition remonte à dix pages en arrière.

3) Il vaut mieux mettre une étape qui vous paraît évidente 'de trop' plutôt que de faire un pas un peu 'trop' grand (ou pire, laisser un trou). (Ce que cela signifie exactement est évidemment parfois discutable et diffère selon les personnes.)

4) Il est déconseillé d'accoler deux expressions mathématiques séparées par un signe de ponctuation. (Cela peut prêter à confusion.) Généralement, on évite les phrases commençant par des expressions mathématiques.

5) On utilise les conventions et notations en vigueur. (Mauvais exemple : Une fonction réelle ϵ est continue en f si pour tout $\delta > 0$ il existe un $x > 0$ tel que $|\epsilon(f) - \epsilon(\aleph)| < \delta$ si $|f - \aleph| < x$. C'est correcte (si je ne me suis pas trompé) mais bien embrouillant par rapport aux usages habituels.)

0.1 Exo 2

Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite de $(0,1)$ qui converge vers 0. Montrons que $y_n = f(x_n) - lx_n$ est une suite de Cauchy : Les accroissements finies montrent qu'on a

$$\begin{aligned}
|y_n - y_m| &= |f(x_n) - f(x_m) - l(x_n - x_m)| \\
&= |\frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m} - l| \cdot |x_n - x_m| \\
&= |f'(\xi_{n,m}) - l| \cdot |x_n - x_m|
\end{aligned}$$

pour $\xi_{n,m}$ dans (x_n, x_m). (Remarque : On peut remplacer les accroissements finis par le thm fondamental du calcul integral : $f(x) = f(1/2) + \int_{1/2}^{x} f'(t)dt$ donnant $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \cdot (|l| + 1)$ pour $x_1, x_2 < \delta$ avec δ tel que $|f'(z) - l| \leq 1$ si $z < \delta$.)

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Comme $l = \lim_{x \to 0_+} f'(x)$, il existe $\delta \geq 1$ tel que $|l - f'(x)| < \epsilon$ si $x < \delta$. Comme x_n converge vers 0, il existe N tel que $x_n < \delta$ si $n > N$. Pour $n, m > N$, l'inégalité ci-dessus devient

$$|y_n - y_m| \leq \epsilon\delta \leq \epsilon$$

pour x_n, x_m dans $(0, \delta)$.

La suite y_n est donc de Cauchy. Notons v sa limite dans $\mathbb{R}$ et posons $f(0) = v$.

On a donc

$$v = \lim_{x \to 0_+} (f(x) - lx)$$

et on voit que

$$l = \lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - v)}{x}$$

est bien la dérivée en 0_+ de f.

0.2 Exo 3

L'égalité $f(2x) = 2f(x)$ appliquée avec $x = 0$ implique $f(0) = 0$.

En itérant l'égalité $f(2x) = 2f(x)$ on a $f(2^n x) = 2^n f(x)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. En remplaçant x par $2^{-n}X$ on obtient

$$f(X) = 2^n f(2^{-n}X)$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout X dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha = f'(0)$ la dérivée de f en 0. Pour $X \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} f(X) &= \lim_{n \to \infty} 2^n f(2^{-n}X) \\ &= X \lim_{n \to \infty} \frac{f(2^{-n}X) - f(0)}{2^{-n}X} \\ &= \alpha X \end{aligned}$$

par définition de $\alpha = f'(0)$.

Supposons maintenant $f(2x) = (f(x))^2$. Pour $x = 0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$ ce qui implique $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Supposons d'abord $f(0) = 0$. Comme $f(x) = (f(x/2))^2 \geq 0$, la fonction f est minimale en 0 et on a $f'(0) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \to \infty} (f(2^{-n}x))^{2^n} \\ & \lim_{n \to \infty} (o(|2^{-n}x|)^{2^n} \end{aligned}$$

Or $|o(|2^{-n}x|)| < 1/2$ pour n suffisamment grand. On a donc $|f(x)| = |\lim_{n\to\infty}(o(|2^{-n}x|)^{2^n}| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-2^n} = 0$ ce qui montre $f(x) = 0$ pout tout x.

Supposons maintenant $f(x) = 1$. Par continuité, il existe donc $\delta > 0$ tel que $f(x) > 0$ si $|x| < \delta$. La fonction $g(x) = \log(f(x))$ vérifié donc $g(2x) = 2g(x)$ pour $|x| < \delta/2$. Par la première partie (dont la preuve reste valide si on suppose f seulement défini dans un voisinage de 0) on a donc $g(x) = \alpha x$ et on obtient $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $|x| < \delta$. En utilisant l'identité $f(2x) = (f(x))^2$ (vérifiée par $x \longmapsto e^{\alpha x}$), on peut prolonger f en dehors de $(-\delta, \delta)$ et on a donc $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

0.3 Exo 4

a) g fonction continue sur $I \setminus \{a\}$: On peut écrire g sous la forme $g = r \circ \tilde{f}$ avec $r(x,y) = \frac{y-f(a)}{x-a}$ et $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$. La fonction $\tilde{f}$ est continue et dérivable sur I. La fonction r est continue et dérivable sur $(\mathbb{R} \setminus \{a\}) \times \mathbb{R}$. Comme $\tilde{f}^{-1}((\mathbb{R} \setminus \{a\} \times \mathbb{R}) = \{a\}$, la fonction g est continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Montrons la continuité de g en a : On utilise que f est dérivable en a. On a donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \ .$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|g(x) - f'(a)| = |\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)| < \epsilon$ ce qui démontre la continuité de g en a.

Pour h, c'est pareil.

b) On supposera $f'(a) \leq f'(b)$ (le cas restant est similaire). Comme g est continue et comme $g(a) = f'(a)$, l'image $g([a,b]$ de l'interval $[a,b]$ contient l'interval fermé délimité par $f'(a)$ et $g(b) = h(a)$. Similairement, $h([a,b])$ contient l'interval fermé délimité par $u = h(a) = g(b)$ et $f'(b)$. La réunion $g([a,b]) \cup h([a,b])$ contient donc la réunion $[f'(a), u] \cup [u, f'(b)]$ qui contient l'interval $[f'(a), f'(b)]$. Un élément c de cet intervalle $[f'(a), f'(b)]$ appartient donc soit à $g([a,b]) = [f'(a), u]$ soit à $h([a,b]) = [u, f'(b)]$ (et il peut appartenir aux deux). Supposons que nous sommes dans le premier cas (le deuxième cas est analogue). Si $c = f'(a)$, il n'y a rien à faire. Sinon, le théorème de la valeur intermédiaire implique l'existence de z dans $(a,b]$ tel que $g(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = c$. Comme $z > a$ et comme f est dérivable sur $[z,a]$, on peut appliquer les accroissements finies : Il existe donc un élément ξ dans l'interval ouvert (z,a) tel que $f'(\xi) = c$.

0.4 Exo 5

La fonction f_1 n'est pas continue : $\lim_{x\to 0} f_1(x,x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0} f_1(x,0) = 0$.

La fonction f_2 est continue en posant $f_2(0,0) = 0$: En effet, $|\sin t| \leq |t|$ (preuve par accroissements finis) implique pour $(x, y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} |f_2(x,y)| = \frac{|x\sin(xy)|}{x^2+y^2} &\leq \frac{|xy^2|}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{\max(|x|,|y|)^3}{\max(x,y)^2} \\ &= \| (x,y) \|_\infty \end{aligned}$$

où $\| (x,y) \|_\infty = \max(|x|,|y|)$ est la norme l_∞ d'un vecteur. Ceci montre que f_2 est "lipschitzienne" à l'origine en posant $f_2(0,0) = 0$ (dans la formulation avec ϵ, δ, on peut prendre $\delta = \epsilon$ en travaillant avec la norme sup).

La fonction f_3 est continue en posant $f_3(0,0) = 0$. En effet, on peut majorer la valeur absolue de x^5y^3 par $\| (x,y) \|_\infty^8$. Pour majorer la valeur absolue de $\frac{1}{x^6+x^4}$, il suffit de minorer $x^6 + y^4$ (en supposant $(x,y) \neq (0,0)$). Or $y^4 \geq y^6$ pour $|y| \leq 1$. (On supposera dorénavant toujours $|y| < 1$.) Il suffit donc de minorer $x^6 + y^6$ qui est certainement au moins aussi grand que $\| (x,y) \|_\infty^6$ (correspondant au sommand le plus grand, toujours en supposant $(x,y) \neq (0,0)$ et, en plus $|y| \leq 1$).

On obtient ainsi pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $|y| \leq 1$ la majoration

$$|f_3(x,y)| \leq \frac{\| (x,y) \|_\infty^8}{\| (x,y) \|_\infty^6} = \| (x,y) \|_\infty^2 \ .$$

0.5 Exo 6

Pour g_1, la majoration

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{\| (x,y,z) \|_\infty^3}{\| (x,y,z) \|_\infty^2} = \| (x,y,z) \|_\infty$$

permet de prolonger g_1 par $g_1(0,0,0) = 0$.

Pour g_2 : Discontinuité en $(0,0,0)$:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(x+0+0)}{\sqrt{x^2+0^2+0^2}} = 1 \neq \lim_{x\to 0_-} \frac{\sin(x+0+0)}{\sqrt{x^2+0^2+0^2}} = -1 \ .$$

Pour g_3, on peut prolonger par $g_3(0,0,0) = 0$:

Le développement limité $\log(1+t) = t + o(t^2)$ montre la majoration $|\log(1+t)| \leq 2|t|$ pour $|t|$ assez petit. On obtient donc pour $(x,y) \neq (0,0)$ dans un voisinage assez petit de $(0,0)$ les majorations

$$\left|\frac{\log(1+(xy)^2)}{|x|+|y|+z^4}\right| \leq \frac{2\max(|x|,|y|)^4}{\max(|x|,|y|)} = 2\max(|x|,|y|)^3 \leq 2 \| (x,y,z) \|_\infty^3 \ .$$

Pour $x = y = 0$ et $z \neq 0$ on a $g_3(0,0,z) = 0$.

0.6 Exo 7

a) Différentiabilité : f application d'un ouvert dans un espace de Banach E contenant x vers un espace de Banach F est différentiable en x s'il existe une application linéaire continue df de E dans F tel que $\| f(y) - (f(x) + df(y-x)) \|_F = o(\| y - x \|_E)$.

Remarque : La différentiabilité n'est pas définie par rapport à une base. Pour faire des calculs on est cependant généralement forcé de travailler avec une base (ou au moins avec une base d'un sous-espace dense). La différentielle est alors donnée par la matrice Jacobienne.

Dérivée directionelle suivant un vecteur h en x de $f : E \longrightarrow F$: Existence d'un vecteur $\partial_h f(x)$ dans F tel que $\| f(x) + t\partial_h f(x) - f(x+th) \| = o(|t|)$.

(b) Continuité de $f(x,y)$ en $(0,0)$: On a

$$|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{\| (x,y) \|_\infty^3}{\| (x,y) \|_\infty^2} = \| (x,y) \|_\infty$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Existence des dérivées directionnelles en $(0,0)$: Comme $f(0,y) = 0$ on a $\partial_{(0,1)} f(0,0) = 0$. Pour $h = (1,a)$ avec a dans $\mathbb{R}$ on a

$$\partial_{(1,a)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,at) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 a/(t^2(1+a^2)) - 0}{t} = \frac{a}{1+a^2} \ .$$

L'application $h \longmapsto \partial_h f(0,0)$ est linéaire si f est différentiable en $(0,0)$. Or $(1,a) \longmapsto \frac{a}{1+a^2}$ n'est pas la restriction d'une application linéaire. Donc f n'est pas différentiable à l'origine.

Remarque: Comme on a $\partial_{\lambda v} f(x) = \lambda \partial_v f(x)$, les calculs effectués sont suffisants.

(c) La continuité de f en $(0,0)$ résulte de l'égalité $\partial_v f(0,0) = 0$ pour tout v dans $\mathbb{R}^2$.

Comme $f(0,y) = 0$ on a $\partial_{(0,1)} f(0,0) = 0$. Pour $(1,a)$ avec a dans $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(1,a)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4 a}{t^3(t^2+a^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{ta}{a^2+t^2} = 0 \ .$$

On a $df(0,0)\cdot v = \partial_v f(0,0) = 0$ si f est différentiable à l'origine. Posons $x = t^\alpha,\ y = t^\beta$ et choisissons α, β pour que le dénominateur $x^4 + y^2$ soit homogène. On obtient $4\alpha = 2\beta$ et on peut donc prendre $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Considerons maintenant $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $\gamma(t) = (t, t^2)$. Comme γ est différentiable, $f \circ \gamma$ est dérivable en 0, de dérivée nulle si f est différientiable. Or on obtient

$$f(t,t^2) = \frac{1}{2} t$$

de dérivée $1/2 \neq 0$.

0.7 Exo 8

La différentielle s'exprime par la Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 0 & 3y^2 & -3z^2 \end{pmatrix}$$

par rapport aux bases standards de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

0.8 Exo 9

a) Comme $N(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$, la différentielle de N, si elle existe, est l'application identiquement nulle au minimum local et global 0 de N. On obtient alors

$$N(h) = \parallel h \parallel = \parallel 0 \parallel + dN(0)h + o(\parallel h \parallel) = o(\parallel h \parallel)$$

ce qui est absurde.

(En suivant l'indication, on a $N(tv) = |t| \cdot \parallel v \parallel$ qui n'est pas dérivable en $t = 0$ si $v \neq 0$.)

b) On a

$$\begin{aligned} \parallel x + h \parallel_2^2 &= \langle x + h, x + h\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle + \langle h, h\rangle \\ &= \parallel x \parallel_2^2 + 2\langle x, h\rangle + \parallel h \parallel_2^2 \\ &= \parallel x \parallel_2^2 + 2\langle x, h\rangle + o(\parallel h \parallel_2) \end{aligned}$$

qui montre que la differentielle dg au point x est donnée par l'application linéaire $h \longmapsto 2\langle x, h\rangle$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, h\rangle| \leq \parallel x \parallel_2 \cdot \parallel h \parallel_2$$

montre que dg est continue.

c) En composant l'application différentiable g avec l'application $t \longmapsto \sqrt{t}$ on obtient la différentiabilité de f en dehors de 0. La différentielle df en un point x est donc donnée par

$$h \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{\parallel x \parallel_2^2}} 2\langle x, h\rangle = \frac{\langle x, h\rangle}{\parallel x \parallel_2} .$$

La différentielle df est donc le produit scalaire avec le vecteur $\frac{x}{\|x\|_2}$ qui est de norme 1.

Le noyau $\mathrm{Ker}(df(x))$ de $df(x)$ est le sous-espace orthogonale au vecteur non-nul x.

0.9 Exo 10

On a

$$f(a+h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + h_n)^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n h_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n^2 \ .$$

Rappelons l'inégalité triviale $\| x \|_1 \geq \| x \|_\infty$ entre normes l_1 et normes l_∞ d'un élément x de E.

Les majorations

$$|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n h_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n h_n| \leq \| a \|_\infty \cdot \| h \|_1 \leq \| a \|_1 \cdot \| h \|_1$$

montrent que l'application linéaire $h \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n h_n$ est continue. Il reste à montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n^2 = o(\| h \|_1)$ pour prouver qu'elle définit la différentielle df de f. Or on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n^2 \leq \| h \|_\infty \cdot \| h \|_1 \leq \| h \|_1^2 = o(\| h \|_1) \ .$$

0.10 Exo 11

En choisissant la base monomiale $1, x, x^2, \ldots, x_n$, l'application f est polynomiale en les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ de $P = \sum a_i x^i$. C'est donc une application polynomiale de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$. Similairement, l'application g est une application polynomiale de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Les applications polynomiales sont différentiables.