

Sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$, de $O(3, \mathbb{R})$. Applications.

Tout ce qui est suggéré ici est bien entendu à titre indicatif et forcément incomplet.

Développements possibles de cette leçon

1. Il n'existe qu'un nombre fini de "types" possibles de sous-groupes finis de $SO(3)$. Montrer comment un groupe de type $(12, 2, 3, 3)$ (groupe de cardinal 12, avec 3 orbites pour l'action sur les traces des axes de rotations sur la sphère, de stabilisateurs de cardinaux 2, 3 et 3) correspond précisément à un groupe de tétraèdre.

[?, *Armstrong, Group and symmetry*]

2. La structure de groupe abstrait des groupes d'isométries positives du cube et du tétraèdre.

[*R. Goblot, thèmes de géométrie p.144, I. Nourdin p. 210, C. Tisseron p. 374, imprécis sur la définition des polyèdres réguliers, Fresnel, Berger volume 3, Arnaudiès-Bertin*]

3. Compter les objets de \mathbb{R}^3 à isométries près : formule de Burnside (nombre d'orbites pour l'action d'un groupe) et application au calcul du nombre de colliers de perles colorées (ou de cubes bicolores).

[*Combes pour le collier de perles, Armstrong fait le cube bicolore mais ce n'est pas très compréhensible, à refaire soi-même, Neumann-Stoy-Thompson font le cube tricolore clairement.*]

Contenu possible de cette leçon

La leçon semble s'articuler autour de trois parties évidentes :

A. sous-groupes finies de $O(2, \mathbb{R})$.

1. Rappel des éléments de $O(2, \mathbb{R})$ et de la structure de $O(2, \mathbb{R})$ ($SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 = \mathbb{U}$ sous-groupe d'indice deux, $O(2, \mathbb{R})$ est isomorphe au produit semi-direct $O(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

2. Sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$: groupes cycliques de rotation et groupes diédraux.

B. sous-groupes finies de $O(3, \mathbb{R})$.

3. Rappel des éléments de $O(3, \mathbb{R})$ et de la structure de $O(3, \mathbb{R})$ ($SO(3, \mathbb{R})$ sous-groupe d'indice deux, $O(3, \mathbb{R})$ est isomorphe au produit direct $SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le quotient $O(3, \mathbb{R})/SO(3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se relevant par $-id$ élément central).

4. Sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$: On fait agir un tel groupe sur l'ensemble des traces des axes de ses rotations sur la sphère unité. Un dénombrement permet la classification des sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$ en cinq classes possibles selon le "type" (cardinal du groupe et cardinaux des orbites pour l'action). Deux classes ont un nombre infini de types, et il y a trois types exceptionnels. Chaque type est représenté, à isomorphisme près comme groupe abstrait, en fait à conjugaison près dans $GL(3, \mathbb{R})$, par un seul sous-groupe de $SO(3)$ (Théorème 15.4 de Neumann, Stoy, Thompson, *Groups and geometry*) : groupes cycliques de rotations (autour d'un même axe), groupes de rotations (dont des retournements) isomorphes aux groupes diédraux, groupe d'isométries positives du cube (isomorphe à S_4), groupe d'isométries positives du tétraèdre (isomorphe à A_4) ou groupe d'isométries positives de l'icosaèdre (isomorphe à A_5).

5. Sous-groupes finis de $O(3, \mathbb{R})$. Si toutes les isométries d'un tel groupe G ne sont pas directes, G possède un sous-groupe distingué $G^+ = \ker(\det)$ d'indice deux, formé de rotations. Le quotient (isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ne se relève pas toujours dans G (exemple : le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par une "symétrie rotatoire" d'angle $\pi/2$). Si G contient $-id$, alors G est isomorphe au produit direct $G^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La liste des sous-groupes finis de $O(3, \mathbb{R})$ à

isomorphisme près est donnée page 185 du Neumann, Stoy, Thompson, *Groups and geometry*, et en exercice dans le [Armstrong, *Group and Symmetries*].

C. Applications

6. (voir exercice) Si G est un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{R})$ (pour $n = 2$ ou 3), alors G préserve un produit scalaire sur \mathbb{R}^n (le produit scalaire égal à la moyenne des translatés du produit scalaire standard par les éléments de G). Donc tout sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe fini de $O(n, \mathbb{R})$.

7. (voir exercice) Si X est une partie finie de \mathbb{R}^3 , le groupe $\text{Iso}(X)$ (resp. $GL(X)$) des isométries (resp. des applications linéaires) qui préservent X (c'est-à-dire les applications g telles que $g(X) = X$) est fini si X n'est pas contenu dans un plan. Autrement dit, en termes "physiques", le "groupe de symétrie" d'un solide non planaire est un groupe fini. Donc en étudiant les sous-groupes finis de $O(n, \mathbb{R})$, on étudie les groupes de symétries des parties finies de \mathbb{R}^n (par exemple en particulier des polyèdres convexes de \mathbb{R}^n).

8. Connaissant le groupe de symétrie d'une partie de \mathbb{R}^n , on peut dénombrer des "objets" de \mathbb{R}^n à symétrie près : collier de perles colorées, cubes dont on colorie les faces etc...

9. Les polyèdres réguliers sont nécessaires à la classification des sous-groupes finis de $SO(3)$: ils permettent de montrer que tous les "types" de groupe possibles sont représentés par un groupe. On a un effet inverse, la classification des sous-groupes finis de $SO(3)$ permet de retrouver la classification des polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 : il n'y a, à similitudes affine près, que 5 polyèdres réguliers dans \mathbb{R}^3 , le tétraèdre, le cube et son dual l'octaèdre, l'icosaèdre et son dual le dodécaèdre ([Arnaudiès, *les cinq polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3*]). Noter qu'il y a dans la bibliographie deux définitions possibles des polyèdres réguliers, celle du [Berger] utilise la condition de transitivité sur les drapeaux, et celle des [Goblot, *thème de géométrie, Arnaudiès*] qui utilise des propriétés géométriques de longueur et d'angles dièdres. Noter que la classification des polyèdres se fait en général (dans les livres) par des méthodes métriques (voir par exemple [Berger, *Géométrie, tome 3*]). Cette méthode est en fait assez naturelle et simple (considérer tous les polygones réguliers et imaginer les seules façons dont on peut les assembler autour d'un point de \mathbb{R}^3 pour former un sommet d'un polyèdre régulier), ce qui limite l'apport de la théorie des groupes.

10. Un remarque plus qu'une application : on est amené à classer des sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ dans la classification des groupes de pavages ([Berger, *Géométrie, tome 1*]).

Exercices

Exercice 1 (rapide)

Le groupe $SO(2, \mathbb{R})$ est abélien. Est-ce le cas de $SO(3, \mathbb{R})$? À quelle condition deux rotations de $SO(3, \mathbb{R})$ commutent-elles ?

Exercice 2 (rapide)

Parmi les sous-groupes finis de $SO(3, \mathbb{R})$, y a-t-il des sous-groupes distingués ?

Exercice 3 (rapide)

Peut-on avoir un sous-groupe fini G de $O(3, \mathbb{R})$ tel que $G \simeq A_4$ et $G \not\subset SO(3, \mathbb{R})$?

Exercice 4 (Lemme de Mashke en représentation linéaire des groupes finis)

On note b_0 le produit scalaire standard de \mathbb{R}^n , et pour $g \in GL(n, \mathbb{R})$, on note $g.b_0$ le produit scalaire défini par $g.b_0(x, y) = b_0(g(x), g(y))$ (cela correspond à l'action naturelle de $GL(n, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des formes bilinéaires de \mathbb{R}^n).

Soit G un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{R})$.

1. Montrer que G préserve la forme bilinéaire $\frac{1}{\text{card}(G)} \sum_{g \in G} g \cdot b_0$, moyenne de l'orbite de b_0 sous l'action de G , qui est un produit scalaire.
2. En déduire que G est conjugué dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ à un sous-groupe de $\text{O}(n, \mathbb{R})$.

Exercice 5 (*rapide*)

Soit X une partie finie de \mathbb{R}^n .

On note $\text{Iso}(X)$ (resp. $\text{GL}(X)$) le groupe des isométries (resp. des applications linéaires) qui préservent X (c'est-à-dire les applications g telles que $g(X) = X$).

À quelle condition sur X le groupe $\text{Iso}(X)$ (resp. $\text{GL}(X)$) est-il fini ?

Exercice 6 (*rapide*)

Donner une partie compacte X de \mathbb{R}^3 dont le groupe d'isométrie $\text{Iso}(X)$ (voir exercice précédent) est :

- a. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ b. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ c. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e. D_n
 f. $A_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Exercice 7

Compter le nombre de cubes de \mathbb{R}^3 dont les faces sont colorées en blanc ou en noir, à symétrie près, c'est-à-dire modulo l'action du groupe des isométries directes du cube.

Exercice 8

On rappelle qu'un polyèdre compact convexe de \mathbb{R}^3 (enveloppe convexe d'un nombre fini de points) est dit *régulier* si son groupe d'isométries est transitif sur l'ensemble des drapeaux (sommet, arête, face) (triplets pour lesquels le sommet appartient à l'arête, et l'arête est incluse dans la face).

1. Existe-t-il des polyèdres convexes non réguliers de \mathbb{R}^3 dont le groupe d'isométrie est transitif sur l'ensemble des sommets (resp. des arêtes, des faces) ?
2. Existe-t-il des polyèdres convexes non réguliers de \mathbb{R}^3 dont le groupe d'isométrie est transitif sur l'ensemble des drapeaux (sommet, arête) (resp. (sommet, face), (arête, face)) ?

Exercice 9

Soit G le sous-groupe de $\text{SO}(3)$ de cardinal 60.

Montrer que *génériquement*, le cardinal de l'orbite d'un point de \mathbb{R}^3 sous l'action de G est de cardinal 60.

Le mot "génériquement" peut avoir deux significations :

Une propriété P est dite (*topologiquement*) *générique* sur un ensemble topologique E si l'ensemble des éléments de E qui vérifient P est un ouvert dense de E .

Une propriété P est (*mesurablement*) *générique* sur un ensemble mesuré E si l'ensemble des éléments de E qui ne vérifient pas P est de mesure nulle.

Ici ces deux notions de généricité sont remplies (en prenant la topologie usuelle et la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3).

Références

M.A. Armstrong, *Groups and symmetry*.

J.M. Arnaudès, *Les cinq polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 et leurs groupes avec, en première partie, une étude des déplacements de \mathbb{R}^3 . 1969*

J.-M. Arnaudiès - J. Bertin, *Groupes, algèbres et géométrie*.

Marcel Berger, *Géométrie, tomes 1,3*

Jean Delcourt, *Théorie des groupes*.

R. Goblots, *Agrégation de mathématiques : thèmes de géométrie*.

P. Neumann, G. Stoy, E. Thompson, *Groups and geometry*