Marian Aprodu

Sur quelques problèmes de géométrie complexe

Lui Cosmin

Avant-propos

Aimeriez-vous vivre dans un monde parfait où toute variété est complexe, toute fonction est holomorphe ? Là où on n'a jamais entendu parler de fonctions différentiables, ou continues ? Ne serait-ce pas le rêve de chacun d'entre nous ? Imaginez-vous maintenant ce qu'il doit y avoir à l'antipode. Que des fonctions continues, voir localement intégrables, que de l'analyse pure et dure. Oublieés les structures complexes, un vrai cauchemar, quoi !

Heureusement, notre monde à nous, qu'on aime tant, se trouve à mi-chemin entre les deux. Méfiez-vous, tout géomètre intéressé par la théorie globale des variétés rencontrera un jour ou un autre une variété complexe compacte X, avec un fibré vectoriel complexe *différentiable* $\mathcal{E}$ dessus.

Moi, je suis un optimiste de nature. Dans une telle situation, ayant aussi les bons réflexes du géomètre algébriste, j'aurais terriblement l'envie de simplifier les choses au maximum. Il ne suffit que de mettre une structure de fibré holomorphe sur $\mathcal{E}$ et c'est fini ! D'accord, mais en pratique, cela, sera-t-il possible en général ? La réponse nous ramène les pieds sur terre : NON !

Voici un contre-exemple simple. On sait qu'il existe des surfaces $K3$ au groupe de Picard nul. Par ailleurs, les fibrés en droites différentiables là-dessus sont paramétrés par un groupe abélien libre de rang 22. Bien évidemment, 22 est plus grand que zéro, donc *aucun* fibré différentiable de rang un, à l'exception notable du fibré trivial, n'admettra de structures holomorphes.

Cela nous amène à la question suivante :

Question 1. Quels sont les fibrés vectoriels complexes différentiables au-dessus d'une variété X complexe, compacte, lisse et connexe, qui admettent des structures holomorphes ?

On a vu dans l'exemple précedent que la première classe de Chern joue un rôle dans cette histoire. En effet, un fibré $\mathcal{E}$ pour lequel $c_1(\mathcal{E})$ n'appartient pas au groupe de Néron-Severi $NS(X)$, c'est-à-dire, à l'image de $\mathrm{Pic}(X)$ dans $H^2(X, \mathbf{Z})$, n'aura jamais de structure holomorphe.

Si la variété de base était une courbe, il n'y aurait plus de complications, puisque tout fibré serait muni d'une structure holomorphe.

Donc, le premier cas vraiment non-trivial est celui d'une surface. Ici, on connaît déjà la classification des fibrés différentiables. Chacun d'eux est complètement déterminé, à isomorphisme près, par son rang r et ses classes de Chern c_1 et c_2. La question posée tout à l'heure se réduit alors à savoir quels triplets $(r, c_1, c_2) \in \mathbf{N} \times NS(X) \times \mathbf{Z}$ sont réalisables par un fibré holomorphe.

Ce problème ainsi formulé, qui a déjà préoccupé beaucoup de monde dans les années 80, fait l'objet de la première partie de ce texte de synthèse qui, lui, réunit la plupart de mes travaux postérieurs à ma thèse de doctorat.

La deuxième partie s'occupe de syzygies, plus précisement, de syzygies des courbes. Lorsqu'on parle de cette théorie, dont les origines se perdent dans l'époque de Hilbert, il y a tout un monde à découvrir : de la fonction de Hilbert aux résolution minimales, de la cohomologie de Koszul aux propriétés les plus intimes des variétés etc.

Je vais essayer d'expliquer succinctement deux des conjectures qui ont rencontré le plus d'intérêt de la communauté mathématique, ainsi que la petite contribution que j'y ai apportée. Il va y avoir aussi quelques applications amusantes, avec lesquelles on va voir comment ces techniques algébriques par essence (et qui, je l'avoue, m'ont fait tellement peur pendant que je les apprenais) s'appliquent aux cas concrets de calcul des gonalités des courbes. Enfin, je vais divaguer un peu sur la possibilité qu'il y ait des liens faibles entre ces deux conjectures.

*

*　*

Voici une petite liste des travaux personnels sur lesquels s'appuie ce texte.

I Pour la première partie :

1. Holomorphic vector bundles over primary Kodaira surfaces, Math. Z. **242** (2002) 63-73 (en collaboration avec V. Brînzănescu et M. Toma).
2. On the holomorphic rank-2 vector bundles with trivial discriminant over non-Kähler elliptic bundles, J. Math. Kyoto Univ., à paraître (en collaboration avec V. Brînzănescu).
3. Une note sur les fibrés holomorphes non-filtrables, CRAS, à paraître (en collaboration avec M. Toma).

II Pour la deuxième partie :

1. On the vanishing of higher syzygies of curves, Math. Z. **241** (2002) 1-15.
2. On the vanishing of higher syzygies of curves. II, Math. Z., à paraître.
3. Manuscrit en préparation avec J. Nagel.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à F.-O. Schreyer, G. Trautmann et C. Voisin pour l'honneur qu'ils m'ont fait de rapporter sur mes travaux. Je remercie en égale mesure M. Brion et J.-P. Demailly pour avoir lu minutieusement ce texte et pour avoir fait des remarques, ainsi que tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils témoignent pour mes travaux.

Tout mon parcours scientifique d'après thèse a été beaucoup influencé par V. Brînzănescu et F.-O. Schreyer. Je ne serais jamais capable d'exprimer en simples mots toute la reconnaissance que je leur dois.

Au fil des années, de nombreuses autres personnes m'ont apporté leurs connaissances, la liste serait malheureusement trop longue pour être exhaustive. J'ai une pensée pieuse à la mémoire de mon père, mon tout premier professeur de mathématiques.

Je remercie bien sûr mes collaborateurs : M. A. Aprodu, V. Brînzănescu, L. Manivel, J. Nagel, M. Toma ; avoir l'occasion de travailler avec eux fut une chance immense pour moi.

Merci aux géomètres-complexes de Grenoble pour m'avoir si chaleureusement accueilli dans leur groupe. Leur bonne humeur permanente et contagieuse complète une atmosphère scientifique exceptionnelle ; ils sont pour beaucoup dans l'achèvement de mon HDR. J'en profite pour remercier aussi tout le personnel de l'Institut Fourier, et surtout Myriam et Arlette, pour leur compétence et leur efficacité.

Merci encore à tous mes amis d'Allemagne, de France, de Roumanie et d'ailleurs pour leur soutien et leurs encouragements constants.

Enfin, mille fois merci à toute ma famille pour avoir été toujours près de moi.

Table des matières

1 Sur l'existence de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus des surfaces non-kählériennes

1.1 Introduction

Soit X une surface complexe, compacte, lisse et connexe. Un problème classique de géométrie complexe est de décider si, étant donné un fibré complexe différentiable sur X, il y aura des structures holomorphes dessus ou non. Sous une forme simplifiée, le problème demande de préciser quels sont les triplets $(r, c_1, c_2) \in \mathbf{Z}_{\geq 2} \times NS(X) \times \mathbf{Z}$ pour lesquels il existe un fibré vectoriel holomorphe E de rang r sur X, de classes de Chern $c_1(E) = c_1$ et $c_2(E) = c_2$.

Le cas où X est une surface algébrique est assez bien compris : grâce à [Sch], on le sait que tout triplet comme ci-dessus est réalisable par un fibré holomorphe.

Contrairement à cette situation, si X est une surface non-algébrique, la semi-négativité de la forme d'intersection sur $NS(X)$ entraîne une condition nécessaire (cf. [BL, Théorème 3.1], *voir* aussi [BF, Proposition 1.1] en rang deux) qui fait intervenir le *discriminant* d'un triplet, à savoir :

$$\Delta(r, c_1, c_2) := \frac{1}{r}\left(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\right) \geq 0.$$

Cette condition-ci n'est pas forcément une condition suffisante. Des contre-exemples apparaissent déjà dans [BL] pour les surfaces $K3$ de dimension algébrique nulle ; nous en avons trouvé d'autres, en dimension algébrique égale à un (cf. Section 3).

Ensuite, il est nécessaire de faire une distinction entre différents types de fibrés holomorphes. Premièrement, il y a les fibrés dits *filtrables*, qui admettent des filtrations à quotients succesifs de rang un, sans torsion, tout comme dans le cas algébrique. Le discriminant d'un tel fibré E satisfait une inégalité forte de positivité (*voir* [BL, Théorème 2.3], et aussi [BF, Theorem 3.1]):

$$\Delta(r, c_1, c_2) \geq m(r, c_1),$$

où

$$m(r, c_1) := -\frac{1}{2r} max\left\{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_1}{r} - \mu_i\right)^2,\ \mu_1, ..., \mu_r \in NS(X), \sum_{i=1}^{r}\mu_i = c_1\right\} \geq 0.$$

D'après le théorème 2.3 de [BL], à l'exception d'un cas très particulier, la condition $\Delta(r, c_1, c_2) \geq m(r, c_1)$ assure déjà l'existence de fibrés filtrables. On se ramène donc à l'étude des fibrés *non-filtrables*.

Je me suis intéressé à ce problème dans le cas d'une surface elliptique non-kählérienne. J'expliquerai les résultats principaux que j'ai obtenus (en collaboration avec V. Brînzănescu, avec M. Toma, ou avec les deux) et les conséquences qui en résultent. Les méthodes que j'utilise sont entièrement algébriques, et font appel à la géométrie des revêtements des courbes.

1.2 Rappels sur les surfaces elliptiques non-kählériennes

La classification des surfaces complexes compactes d'après Kodaira a mis en évidence l'importance des surfaces à contenu faible en courbes. Elles se regroupent en deux classes principales, selon l'existence ou la non-existence d'une métrique kählérienne. Puisque l'existence des fibrés holomorphes sur une surface qui est soit kählérienne, soit de la classe VII, au moins en rang deux, est presque résolue, nous nous intéresserons surtout aux surfaces elliptiques non-kählériennes. Signalons qu'elles ne contiennent pas de courbes, autres que les composantes des fibres des fibrations correspondantes.

Un théorème de Brînzănescu (*voir* [Br1, II, Lemma 1], [Br3]) montre que toute surface X *minimale*, elliptique, non-kählérienne possède une structure de *quasi-fibré*, c'est à dire, toutes les fibres lisses de la fibration elliptique sont isomorphes deux-à-deux, et les seuls fibres singulières sont des multiples des courbes elliptiques. En plus, s'il n'y a aucune fibre multiple, la fibration se trivialise localement sur la base, et devient un *fibré elliptique principal*. La géométrie de cette situation permet de décrire en détail le groupe de Néron-Severi de X (cf. [Br1, I, Theorem 3.1, II, Theorem 5, III, Theorem 1], [Br3], [BU]) :

Théorème 1. *Soit X une surface minimale, elliptique, non-kählérienne, et $X \xrightarrow{f} B$ la fibration elliptique associée. Alors, les classes réduites des fibres engendrent le sous-groupe de torsion de $NS(X)$ et*

$$NS(X)/\mathrm{Tors}\, NS(X) \cong \mathrm{Hom}(J_B, F^\vee),$$

où F dénote la fibre générique, $F^\vee \cong \mathrm{Pic}_0(F)$, et J_B est la variété jacobienne de B.

Pour toute classe $c_1(L)$, avec $L \in \mathrm{Pic}(X)$, la restriction de L aux fibres lisses F_b de f définit une flèche naturelle $b \mapsto L_{|F_b} \in \mathrm{Pic}_0(F_b)$. Elle se prolonge à une flèche $\widehat{c_1(L)} : B \to F^\vee$. L'isomorphisme du théorème est alors induit par le morphisme $NS(X) \to \mathrm{Hol}(B, F^\vee)$ qui associe à la classe de Chern $c_1(L)$, la flèche ci-dessus.

Remarquons que le problème d'existence des fibrés holomorphes sur X admet une solution triviale si $B \cong \mathbf{P}^1$. En effet, le groupe de Néron-Severi ne contient que des éléments de torsion, ce qui entraîne $m(r, c_1) = 0$ pour tout $r \geq 2$ et $c_1 \in NS(X)$. On en deduit l'existence des fibrés holomorphes, et même filtrables.

Le résultat énoncé ci-dessus nous permet de traduire tout calcul de classes de Chern sur X en un calcul de morphismes de variétés abéliennes. C'est ainsi que la géométrie algébrique surgit dans ce cadre fortement non-algébrique.

1.3 Fibrés sur les surfaces de Kodaira primaires

Par définition, une *surface de Kodaira primaire* X est une surface non-kählérienne munie d'une structure de fibré elliptique principal au-dessus d'une courbe elliptique B. En jouant sur la géométrie spéciale d'une telle surface, nous avons montré un résultat complet d'existence des fibrés holomorphes, *voir* [ABT] :

Théorème 2. *Soient X une surface de Kodaira primaire, $r \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$, $c_1 \in NS(X)$ et $c_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $\Delta(r, c_1, c_2) \geq 0$. Alors, il existe un fibré holomorphe E de rang r sur X, avec $c_1(E) = c_1$ et $c_2(E) = c_2$.*

Le cas $r\Delta(r, c_1, c_2) \in \mathbf{Z}$ avait été déjà décidé, [To2, Proposition 1], grâce aux images directes des fibrés en droites par des revêtements *non-ramifiés* de X et par un argument de déformation. En général, $r\Delta(r, c_1, c_2)$ n'est pas forcément un entier, mais $r^2\Delta(r, c_1, c_2)$ le sera inévitablement. Nous avons résolu les cas restants $\Delta(r, c_1, c_2) \in \frac{1}{r^2}\mathbf{Z} \setminus \frac{1}{r}\mathbf{Z}$. Pour y arriver, nous faisons appel à des revêtements de la courbe elliptique B par des courbes de genre deux.

De façon générale, si $C \xrightarrow{\mu} B$ est un revêtement de degré r d'une courbe elliptique par une courbe de genre deux, qui ne se factorise pas par une isogénie de B, la courbe $K := \mathrm{Ker}(J_C \to B)$, est, elle aussi, une courbe elliptique. Le plongement de C dans J_C induit un revêtement complémentaire $C \xrightarrow{\lambda} K$, et encore une isogénie $\mu^* \times \lambda^* : B \times K \to J_C$, de degré r^2. Le noyau H de $\mu^* \times \lambda^*$ est le graphe d'un isomorphisme entre les éléments de r-torsion, $B[r] \xrightarrow{\psi} K[r]$, anti-isométrique par rapport à l'accouplement de Weil.

Prenons maintenant un fibré en droites L sur le produit fibré $X \times_B C$. La première classe de Chern et le discriminant de l'image directe $E = \nu_* L$, où $X \times_B C \xrightarrow{\nu} X$ est la projection, jouissent tous les deux d'interprétations intéressantes dans ce contexte. Au niveau de morphismes entre des variétés abéliennes, induits par les classes de Chern en passant par le théorème 1, on a $\widehat{c_1(E)} = \widehat{c_1(L)} \circ \mu^*$ (*voir* [ABT, Lemma 1.4]). De même pour le discriminant : $r^2\Delta(\mathcal{E}) = \deg(\widehat{c_1(L)} \circ \lambda^*)$ ([ABT, Lemma 2.1]).

Le processus décrit ci-dessus peut être renversé. Nous partons de deux courbes elliptiques B et K, et d'un isomorphisme défini sur les points de r-torsion, $B[r] \xrightarrow{\psi} K[r]$, anti-isométrique par rapport à l'accouplement de Weil. La variété abélienne $J_\psi := (B \times K)/\mathrm{Graph}(\psi)$ est alors équipée d'une polarisation principale Θ_ψ. Si l'isomorphisme ψ est irréductible (*voir* [Ka2, Definition 1.2]), le système linéaire $|\Theta_\psi|$ contient une courbe lisse de genre deux à variété jacobienne isomorphe à J_ψ. Sinon, nous trouvons un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées de J_ψ dans un produit de courbes elliptiques : cela fait partie d'une *configuration carreau*, [Ka2, Definition 2.1].

La preuve du théorème s'appuie alors sur l'interprétation donnée à la première classe de Chern, et au discriminant d'une image directe en termes de morphismes de courbes elliptiques, qu'on a invoquée tout à l'heure. En éliminant le cas connu $r\Delta \in \mathbf{Z}$ nous nous retrouvons tout de suite, quitte à faire baisser le rang du fibré, dans une situation comme ci-dessus. La courbe B restera toujours la courbe de base, K sera un revêtement étale (cyclique même) de la duale d'une fibre, convenablement choisi, et l'isomorphisme anti-symétrique ψ sera induit par la première classe de Chern et par le revêtement défini de K.

Si l'isomorphisme ψ est *irréductible*, nous en déduirons un revêtement $C \to B$ de degré r par une courbe de genre deux et, encore, un fibré en droites L sur le produit fibré $Y = X \times_B C$. La première classe de Chern modulo torsion de l'image directe de L, et son discriminant seront égaux à ceux de départ.

Le critère de réductibilité (cf. [Ka2, Theorem 2.6]) et les configurations carreaux de Kani [Ka2, Theorem 2.3] nous aident à traiter le cas d'un ψ *réductible*. Dans ce cas, nous obtenons *deux* revêtement étales différentes $E_1 \to B$, $E_2 \to B$, avec deux fibrés en droites L_1 et L_2 sur les produits fibrés $X \times_B E_1$ et $X \times_B E_2$ respectivement. Le fibré holomorphe recherché est obtenu en prenant la somme directe des images directes de L_1 et L_2.

1.4 Fibrés de rang deux sur les surfaces elliptiques non-kählériennes

Comme on l'a vu dans la section précédente, considérer les images directes de fibrés en droites par des revêtements de la surface de base peut suppléer à la méthode de Serre pour produire des fibrés non-filtrables. Le résultat qui suit montre qu'il s'agit d'un phénomène général (cf. [AT] ; *voir* [F2] pour la définition d'une modification élémentaire) :

Théorème 3. *Soient X une surface complexe, compacte, minimale, non-kählérienne, qui admet une fibration elliptique $X \xrightarrow{f} B$ sur une courbe lisse, et E un fibré vectoriel holomorphe non-filtrable de rang deux sur X. Alors, il existe un revêtement $C \xrightarrow{\mu} B$ à deux feuillets, par une courbe lisse, et un fibré en droites L sur la normalisée Y du produit fibré $X \times_B C$ tels que l'image directe $\nu_* L$ est une modification élémentaire de E, où $Y \xrightarrow{\nu} X$ est la projection.*

Le revêtement C est complètement déterminé par le comportement de E sur la fibre générique de f. Le fibré L, quitte à le tordre par une image inverse d'un fibré en droites sur la courbe de base C est, lui aussi, précisé par les restrictions de E aux fibres génériques (*voir* la démonstration du théorème de [AT]).

Signalons que l'hypothèse de minimalité n'est pas impérativement nécessaire. En effet, d'après le résultat de [Vu], tout fibré vectoriel holomorphe de rang deux sur l'éclatée d'une surface non-algébrique X est une suite de modifications élémentaires d'une image inverse d'un fibré sur X, éventuellement tordue par un fibré en droites.

Le théorème 3 répond au besoin de développer une technique unitaire de construction de fibrés non-filtrables. Rappelons que l'obstruction principale pour le problème d'existence des fibrés holomorphes consiste dans le manque de méthodes de construction (*voir* [Br3, pag. 105]). En rang deux, dès lors qu'on a franchi cet obstacle, la difficulté du problème va pencher vers la recherche d'interprétations géométriques des classes de Chern des images directes, tout comme on l'a fait pour les surfaces de Kodaira. On va voir dans un cas particulier comment notre résultat aboutit à une solution du problème d'existence ; cela pourrait servir d'exemple pour d'autres cas à venir.

On s'occupe maintenant du cas $\Delta(2, c_1, c_2) = 0$. Dorénavant, on ne considère que des fibrations elliptiques $X \xrightarrow{f} B$ sans fibre multiple. Sachant que c_1^2 est un entier pair, [ABT, Lemma 1.3], on exclut le cas trivial $c_1 \in 2NS(X)$ qui entraînerait $m(2, c_1) = 0$. Dans cette situation, l'énoncé du théorème 3 est améliorable : on peut faire abstraction des modifications élémentaires puisque tout fibré de rang deux de classes de Chern c_1, c_2 sera une image directe d'un fibré en droites, [AT, Remarque 4]. Antérieurement, on avait déjà montré que l'existence des fibrés holomorphes à discriminant nul sur X qui sont des images directes de fibrés en droites par des revêtements doubles est déterminée par le comportement de la première classe de Chern sur les points de 2-torsion, *voir* [AB, Theorem 4.1]. Ceci et l'observation ci-dessus donnent par conséquent un critère d'existence pour les fibrés non-filtrables:

Théorème 4. *Soient X une surface non-kählérienne munie d'une structure de fibré elliptique principal de fibre F, et $c_1 \in NS(X)$ tel que $m(2, c_1) > 0$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un fibré holomorphe de rang deux sur X, à première classe de Chern égale à c_1 et discriminant nul,

(ii) la restriction $J_B[2] \xrightarrow{\widehat{c}_1[2]} F^\vee[2]$ de $\widehat{c}_1$ au sous-groupe d'éléments de 2-torsion est non-surjective.

La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème 2. Le discriminant d'une image directe représente ici le *degré normalisé* d'un morphisme d'une variété abélienne principalement polarisée dans la duale d'une fibre ; *voir* [AB, Section 3], où cette notion a été d'ailleurs introduite pour la première fois.

Remarquons que si B était elliptique, c'est à dire, X était une surface de Kodaira primaire, $\widehat{c}_1[2]$ ne pourrait jamais être surjective ([ABT, Lemma 1.3, Remark 3.1]). En revanche, si le genre de B est plus grand, on peut aisément imaginer des situations où la surjectivité de $\widehat{c}_1[2]$ soit vérifiée :

Exemple 1. Soient B une courbe de genre deux, qui admet un morphisme de degré deux sur $F^\vee$, et X un fibré elliptique principal non-kählérien sur B, de fibre F. Soit $\widehat{c}_1$ induit par ce revêtement. Alors, $\widehat{c}_1[2]$ est surjective et $m(c_1) = 1/2$. Par conséquent, il n'existe pas de fibré holomorphe de rang deux sur X de première classe de Chern modulo torsion égale à $\widehat{c}_1$, et de discriminant nul.

Beaucoup d'autres cas, complémentaires à celui des surfaces elliptiques non-kählériennes traité ici, ont été considérés dans des travaux plus ou moins récents. Par exemple, si X est soit une surface $K3$ soit une surface de dimension de Kodaira $-\infty$, Teleman et Toma ont trouvé (*voir* [TT]) des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de fibrés non-filtrables de rang deux sur X (*voir* aussi [LeP], [Te], [BL]). Il est vraisemblable que des méthodes similaires à celles qui y sont utilisées pourront aussi bien trancher le cas des surfaces kählériennes de dimension de Kodaira égale à un (*voir* [TT]).

Le cas des tores a été également beaucoup étudié (*voir* [EL], [BF], [To1], [To3]) et le rang deux est complètement résolu. En somme, on n'exagère pas trop quand on dit qu'en rang deux, après tant d'efforts, on n'est pas très loin d'une solution complète au problème d'existence des fibrés holomorphes.

1.5 Commentaires sur la géométrie des espaces de modules

Soient $X \xrightarrow{f} B$ une surface de Kodaira primaire, $L \in \mathrm{Pic}(X)$ et $c_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $m(2, c_1(L)) > 0$ et $0 \leq \Delta(2, c_1(L), c_2) < m(2, c_1(L))$. Alors, tout fibré holomorphe de rang deux, de déterminant L et deuxième classe de Chern c_2 est simple. De plus, l'espace de modules $S_X(L, c_2)$ de fibrés à déterminant L et deuxième classe de Chern c_2 est une variété lisse, holomorphiquement symplectique, de la dimension attendue $8\Delta(2, c_1(L), c_2)$ (*voir* [To2], [To4] ; il faut faire aussi référence au théorème 2, afin de s'assurer que $S_X(L, c_2) \neq \emptyset$). On connaît donc beaucoup d'informations utiles sur la géométrie de $S_X(L, c_2)$.

Néanmoins, il nous reste toujours des choses à régler. Par exemple, cet espace *est-il connexe* ? Enfin, *est-il compact* ?

On est tenté de dire *OUI*, au moins en dimensions petites (zéro ou deux). Un théorème de structure pour les fibrés de rang deux au-dessus des surfaces *algébriques* elliptiques a été utilisé par Friedman, [F1], [F2], pour étudier la structure intime de l'espace de modules. Notre théorème 3 n'est que son analogue non-algébrique : on peut ainsi espérer qu'il puisse mener à des réponses concrètes à ces questions.

En discriminant zéro, la compacité est immédiate. D'autre côté, le problème de connexité peut être reformulé comme suit. Dans notre situation, on sait que tout fibré E est une image directe d'un fibré en droites. De plus, le revêtement double Y de X induit par E, qui est une autre surface de Kodaira primaire, ne dépend que de la première classe de Chern de E, réduite modulo torsion. La connexité de l'espace de modules $S_X(L, c_1^2(L)/4)$ se réduit alors à savoir si, étant donnée une isogénie $C \to B$, l'espace des fibrés en droites sur $X \times_B C$, dont les images directes sur X sont à déterminant isomorphe à L, est connexe.

Supposons maintenant qu'en dimension deux, qui correspond au discriminant $1/4$, l'espace de modules est compact. Sinon, sans perdre la condition de lissité, on le remplace par l'espace de modules de faisceaux simples, qui le sera automatiquement ([To5]). Toute composante connexe de l'espace de modules est une surface *compacte*, holomorphiquement symplectique, donc soit un tore, soit une surface $K3$, soit une nouvelle surface de Kodaira. Comme, par une philosophie générale, beaucoup de propriétés d'une variété de base sont transmises aux espaces de modules de fibrés holomorphes, on s'attendrait à ce que toutes ces composantes soient dans ce cas des surfaces de Kodaira. Le cas échéant, il y a une question naturelle qu'on se pose : *y aurait-il une dualité de type Mukai entre la surface de départ et l'une de ces composantes* ?

J'ai exposé ici un petit nombre de problèmes qui concernent la géométrie des espaces de modules de fibrés au-dessus des surfaces de Kodaira. D'autres problèmes, de même nature, peuvent être formulés dans le cadre plus général d'une surface elliptique non-kählérienne quelconque.

Références bibliographiques pour la première partie

[ABT] M. Aprodu, V. Brînzănescu, M. Toma, Holomorphic vector bundles over primary Kodaira surfaces, Math. Z. **242** (2002) 63-73.

[AB] M. Aprodu, V. Brînzănescu, On the holomorphic rank-2 vector bundles with trivial discriminant over non-Kähler elliptic bundles, J. Math. Kyoto. Univ., à paraître.

[AT] M. Aprodu, M. Toma, Une note sur les fibrés holomorphes non-filtrables, CRAS, à paraître.

[BL] C. Bănică, J. Le Potier, Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non-algébriques, J. Reine Angew. Math. **378** (1987) 1-31.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, Compact complex surfaces, Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[Br1] V. Brînzănescu, Néron-Severi group for non-algebraic elliptic surfaces I: elliptic bundle case, Manuscripta Math. **79** (1993) 187-195; II: non-Kählerian case, Manuscripta Math. **84** (1994) 415-420; III, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **43** (1998) 89-95.

[Br2] V. Brînzănescu, The Picard group of a primary Kodaira surface, Math. Ann., **296**, (1993) 725-738.

[Br3] V. Brînzănescu, Holomorphic vector bundle over compact complex surfaces, Lect. Notes in Math. **1624**, Springer 1996.

[BF] V. Brînzănescu, P. Flondor, Holomorphic 2-vector bundles on non-algebraic 2-tori, J. reine angew. Math. **363** (1985) 47-58.

[BU] V. Brînzănescu, K. Ueno, Néron-Severi group for torus quasi bundles over curves. Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, Dekker, New York, 1996, 11-32.

[EF] G. Elencwajg, O. Forster, Vector bundles on manifolds without divisors and a theorem of deformation, Ann. Inst. Fourier **32** no. 4 (1982) 25-51.

[FK] G. Frey, E. Kani, Curves of genus 2 covering elliptic curves and an arithmetical application, Arithmetic Algebraic Geometry, Progress in Math **89** (1991) 153-176.

[F1] R. Friedman, Rank two vector bundles over regular elliptic surfaces, Invent. Math. **96** (1989) 283-332.

[F2] R. Friedman, Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles, Universitext, Springer-Verlag 1998.

[Hf] T. Höfer, Remarks on torus principal bundles, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) **33** (1993) 227-259.

[Hu] D. Husemöller, Elliptic curves, Graduate Texts in Math. **111**, Springer-Verlag 1987.

[Ka1] E. Kani, Elliptic curves on abelian surfaces, Manuscripta Math. **84** (1994) 199-223.

[Ka2] E. Kani, The number of curves of genus two with elliptic differentials, J. reine angew. Math. **485** (1997) 93-121.

[Kod] K. Kodaira, On the structure of compact complex analytic surfaces I, Amer. J. Math. **86** (1964) 751-798.

[LeP] J. Le Potier, Fibrés vectoriels sur les surfaces $K3$, Séminaire Lelong-Dolbeault-Skoda, LNM **1028**, Springer-Verlag, 1983.

[LT] M. Lübke, A. Teleman, The Kobayashi-Hitchin correspondence. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 995.

[M1] D. Mumford, Abelian varieties, Oxford University Press, 1974.

[M2] D. Mumford, Prym Varieties I, Contribution to Analysis, Acad. Press, New York (1974) 325-350.

[Sch] R. L. E. Schwarzenberger, Vector bundles on algebraic surfaces, Proc. London Math. Soc. **3** (1961) 601-622.

[Te] A. Teleman, Moduli Spaces of Stable Bundles on non-Kählerian Elliptic Fibre Bundles over Curves, Expo. Math., **16** (1998) 193-248.

[TT] A. Teleman, M. Toma, Holomorphic vector bundles on non-algebraic surfaces, accepté à C.R. Acad. Sci. Paris.

[To1] M. Toma, Une classe de fibrés vectoriels holomorphes sur les 2-tores complexes, C.R. Acad. Sci. Paris, **311** (1990) 257-258.

[To2] M. Toma, Stable bundles on non-algebraic surfaces giving rise to compact moduli spaces, C.R. Acad. Sci. Paris, **323** (1996) 501-505.

[To3] M. Toma, Stable bundles with small c_2 over 2-dimensional complex tori, Math. Z. **232** no. 3 (1999) 511-525.

[To4] M. Toma, Compact moduli spaces of stable sheaves over non-algebraic surfaces. Doc. Math. 6 (2001) 11-29.

[To5] M. Toma, Stable bundle with small second Chern classes on surfaces, Heft 209 (1999), Preprint Univ. Osnabrück.

[We] A. Weil, Zum Beweis des Torellischen Satzes, Göttinger Nachr., **2** (1957) 33-53.

[Vu] V. Vuletescu, Relating vector bundles on a nonalgebraic surface with those on its blow-up, An. Stiint. Univ. “Ovidius” Constanta, Ser. Mat. **5** (1997) 111-114.

2 Sur l'annulation de la cohomologie de Koszul des courbes projectives

2.1 Introduction

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie, $S = SV$ l'algèbre symétrique de V, et $X \subset \mathbf{P}V^*$ une variété non dégénérée, et $S(X)$ son anneau de coordonnées homogènes. On associe à ces données la *fonction de Hilbert* qui est définie par $h_X(d) = \dim_{\mathbf{C}} S(X)_d$ pour tout entier positif d. Ce qui fait d'elle un objet d'étude très intéressant est son comportement polynômial pour des valeurs assez grands de d. Cette propriété découle de l'existence d'une *résolution minimale* de $S(X)$ sur S, qui consiste en un complexe exact :

$$0 \to E_s \to ... \to E_2 \to E_1 \to S \to S(X) \to 0$$

où $E_p = \bigoplus_{i>p} S(-i)^{a_{pi}}$. On arrive ainsi à la définition des *espaces de syzygies* de X, qui sont les composantes graduées des modules E_p. Les nombres entiers a_{pi} portent aussi un nom : ils s'appellent les *nombres de Betti gradués* de X.

Cela dit, pour d suffisamment grand, on calcule la fonction de Hilbert de X par la formule :

$$h_X(d) = \sum (-1)^p a_{pi} C^N_{N+d-i},$$

et on voit que l'expression du côté droit est polynômiale en d.

La théorie des syzygies a pour but principal d'expliquer l'interaction entre les propriétés intrinsèques de X et ses espaces de syzygies. Notamment, on cherche à décrire l'effet de l'annulation des syzygies, voir l'influence des certaines distributions des nombres entiers parmi les nombres de Betti gradués, sur la géométrie de X.

Restée presque immobile au fil des années, la théorie a pris un nouvel élan avec les travaux de Green [Gr1], [Gr2] et Green-Lazarsfeld [GL1], [GL2]. Par contraste avec le point de vue classique, ils s'intéressent aux clôtures integrales des anneaux de coordonnées homogènes, et aux modules qui en dérivent, plutôt qu'aux anneaux eux-mêmes. Ceci leur permet de montrer, en faisant abondamment appel à la cohomologie de Koszul, tout un ensemble de résultats nouveaux, complètement hors de portée jusque là. En voici un exemple.

Théorème 5 (Green-Lazarsfeld, voir [GL1]). *On suppose que la variété X est lisse, irréductible et linéairement normale, et on choisit une décomposition $\mathcal{O}_X(1) = L_1 \otimes L_2$. On pose $h^0 L_i = r_i + 1$. Alors, $a_{r_1+r_2-1, r_1+r_2} \neq 0$.*

L'annulation des nombres de Betti gradués représente donc une obstruction à l'existence des certaines systèmes linéaires complets de dimensions données. Il est assez naturel de penser que l'existence de syzygies non-nulles devrait entraîner à son tour l'existence des systèmes linéaires : ce point de vue s'est avéré être une source fructueuse de conjectures.

Comme on le disait tout à l'heure, la cohomologie de Koszul sert d'ingrédient principal chez Green et Green-Lazarsfeld pour calculer les espaces de syzygies des variétés projectives. De façon générale, si X est une variété complexe, projective, irréductible et réduite, L un fibré en droites au-dessus de X, $V = H^0(L)$, et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, la *cohomologie de Koszul* du triple $(X, \mathcal{F}, L)$, notée par $K_{p,q}(X, \mathcal{F}, L)$, pour tout p, et tout q, est la cohomologie du complexe :

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes H^0((q-1)L \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \bigwedge^{p} V \otimes H^0(qL \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \bigwedge^{p-1} V \otimes H^0((q+1)L \otimes \mathcal{F}).$$

En adoptant les conventions de Green, [Gr1], si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X$, on va l'omettre et on va écrire $K_{p,q}(X, L)$ pour la cohomologie de Koszul.

Pour un fibré L très ample, les espaces de syzygies de l'image de X dans $\mathbf{P}V^*$, sont calculés à l'aide d'un complexe similaire, [Gr1, Theorem 1.b.4] :

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes S(X)_{q-1} \longrightarrow \bigwedge^{p} V \otimes S(X)_q \longrightarrow \bigwedge^{p-1} V \otimes S(X)_{q+1}.$$

Cette fois-ci, la cohomologie de ce complexe est notée par $K_{p,q}(S(X), V)$ et, avec les mêmes notations utilisées au début, on a $a_{p,p+q} = \dim_{\mathbf{C}} K_{p,q}(S(X), V)$.

Il existe une relation directe entre les deux types d'espaces de cohomologie de Koszul, qui se réalise à travers des flèches naturelles :

$$K_{p,q}(S(X), V) \longrightarrow K_{p,q}(X, L).$$

Pour $q = 1$, les flèches ci-dessus sont même des isomorphismes, ce qui donne une description des nombres de Betti gradués de X dans $\mathbf{P}V^*$ comme étant $a_{p,p+1} = \dim_{\mathbf{C}} K_{p,1}(X, L)$, pour tout p. En général, au-delà de $q = 2$, elles ne le seront plus, sauf si L est normalement engendré. Signalons que, pour $q = 2$, ces flèches restent toutefois injectives et donc, l'annulation des espaces $K_{p,2}(X, L)$ implique l'annulation des nombres de Betti gradués $a_{p,p+2}$.

Analyser en détail des espaces de type $K_{p,q}(X, \mathcal{F}, L)$, comme il l'était fait par Green, [Gr1], [Gr2], nous offre beaucoup plus de liberté que travailler directement sur les nombres de Betti gradués. Ici, nous disposons de suites longues de cohomologie, [Gr1], des résultats de type Lefschetz, [Gr1], [AN], ainsi que d'un certain nombre de résultats d'annulation, [Gr1], [Gr2], [EL].

Les cas des courbes jouit d'une attention spéciale, puisque c'est dans ce cadre-là qu'on a pu énoncer les conjectures les plus précises de la théorie (ici, sauf mention du contraire, on dira toujours "courbe" pour courbe complexe, compacte, lisse, irréductible). Parmi elles, on en compte deux tout en or, formulées par Green, et Green-Lazarsfeld. En quelques mots, elles prédisent que des invariants fondamentaux des courbes peuvent s'exprimer dans le langage des syzygies. Pour les énoncés précis, on aura besoin de la définition suivante, *voir* [GL2] :

Définition 1. *Soient C une courbe lisse et $L \in Pic(C)$. On dit que L satisfait à la condition (M_k) si et seulement si $K_{p,1}(C, L) = 0$, pour tout $p \geq h^0(L) - k - 1$.*

Si L est non-spécial, l'annulation des espaces $K_{p,q}(C, L)$ pour tout p et tout $q \geq p + 3$ est immédiate. Cela découle d'un résultat encore plus général montré par Green ([Gr1, Theorem 4.a.1] ; c'est un raisonnement à l'aide duquel on calcule aussi la régularité des plongées de la courbe C.

Compte tenu du résultat de non-annulation de Green et Lazarsfeld, on voit que, dans le cas où C est munie d'un pinceau de degré k, aucun fibré de degré assez grand ne peut satisfaire à la condition (M_k). Cette remarque s'applique aussi bien à un pinceau qui calcule la gonalité de C, c'est à dire de degré minimal. La conjecture qui nous est proposée par Green et Lazarsfeld, qu'on appelera ensuite la *conjecture de la gonalité*, prédit que la réciproque est aussi vraie :

Conjecture 1. Si gon$(C) > k$, alors tout fibré en droites sur C, de degré assez grand satisfait à la condition (M_k).

La conjecture a été déjà verifiée pour $k = 1, 2$ ([Gr1, Theorem 3.c.1]) et $k = 3$ ([Ehb]). Alors, les courbes hyperelliptiques, ainsi que les trigonales sont caractérisées par leurs syzgygies. On va voir que la conjecture est vraie pour une courbe générique dont le genre est suffissament grand par rapport à la gonalité.

Une autre conjecture, peut-être encore plus importante, est la *conjecture de Green*. Elle s'occupe du cas d'une courbe non-hyperelliptique, plongée par son fibré canonique. On part toujours du résultat de non-annulation de Green et Lazarsfeld, afin de remarquer que si Cliff$(C) < k$, alors le fibré canonique K_C ne peut pas satisfaire à la condition (M_k), *voir* [GL1] ; *voir* [Ma1] pour la définition de l'indice de Clifford Cliff(C). L'énoncé de la conjecture est une réciproque de ce fait :

Conjecture 2. Si Cliff$(C) \geq k$, alors K_C satisfait à la condition (M_k).

La plupart des travaux parus dernièrement sur les syzygies ont pour sujet la conjecture de Green, *voir*, par exemple, [Gr1], [GL1], [HR], [Sc1], [Sc2], [Sc3], [V1], [V2], [T] etc. L'effort que l'on fait pour la trancher n'est pas du tout surprenant, compte tenu de sa marge d'applicabilité très étendue. Dans l'une des sections qui suivent, on va voir comme elle est utilisée dans un problème concret de calcul de gonalité.

Il y a une relation très subtile entre l'indice de Clifford et la gonalité d'une courbe C. Les deux invariants sont liés entre eux par deux inégalités, *voir* [CM, Theorem 2.3] :

$$\text{gon}(C) - 3 \leq \text{Cliff}(C) \leq \text{gon}(C) - 2.$$

L'égalité gon$(C) - 3 =$ Cliff(C) n'est vérifiée que dans des cas très spéciaux, comme celui des courbes planes (pour une disscusion détaillée sur le sujet, *voir* [ELMS]). Génériquement, on a donc Cliff$(C) =$ gon$(C) - 2$. Cela nous fait penser que, génériquement, il pourrait y avoir aussi une relation entre les deux conjectures. On va enquêter sur cette possibilité dans la toute dernière section, sans prétention d'aller trouver une réponse tout à fait satisfaisante.

2.2 Rappels sur les projections des syzygies

Parue pour la première fois dans [Ehb], dont l'auteur était très certainement influencé par Schreyer, la notion de projection de syzygies est un outil qui nous aide à préserver une relation entre espaces de syzygies, voir espaces de cohomologie de Koszul, lors des projections linéaires des variétés. Le cadre de travail est le suivant. On part d'une variété X lisse, irréductible, L un fibré en droites sur X, globalement engendré, et $x \in X$ un point. On note par $\widetilde{X} \xrightarrow{\sigma} X$ l'éclatement de X en x, E le lieu exceptionnel, $V = H^0(L)$, $W_x = H^0(\sigma^*L - E) \subset V$, et enfin $L_x = V/W_x$.

Les morphismes de contraction définis sur les puissances extérieures de V induisent un morphisme entre les deux complexes de Koszul :

$$\bigwedge^{p+2} V \longrightarrow \bigwedge^{p+1} V \otimes V \longrightarrow \bigwedge^{p} V \otimes H^0(2L)$$

et, respectivement,

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes V \to \bigwedge^{p} V \otimes V \otimes V \to \bigwedge^{p-1} V \otimes H^0(2L) \otimes V,$$

pour tout p. Ensuite, on en déduit un morphisme *injectif*, pour tout p :

$$K_{p+1,1}(X, L) \longrightarrow K_{p,1}(X, L) \otimes V,$$

dont la composée avec le morphisme naturel

$$K_{p,1}(X, L) \otimes V \to K_{p,1}(X, L) \otimes L_x$$

est notée par

$$K_{p+1,1}(X, L) \xrightarrow{\pi_x} K_{p,1}(X, L) \otimes L_x.$$

Par ailleurs, l'inclusion de W_x dans V nous en donne une autre, de $K_{p,1}(\widetilde{X}, \sigma^*L - E)$ dans $K_{p,1}(X, L)$. On démontre assez aisément, [Ehb], [Ap1], que l'image de π_x est en fait contenue dans $K_{p,1}(\widetilde{X}, \sigma^*L - E) \otimes L_x$. La flèche

$$K_{p+1,1}(X, L) \xrightarrow{\pi_x} K_{p,1}(\widetilde{X}, \sigma^*L - E) \otimes L_x$$

obtenue ainsi est appelée le *morphisme de projection*. L'une de ses propriétés immédiates est la suivante :

Proposition 1. *Supposons* $K_{p+1,1}(X, L) \neq 0$. *Alors, quel que soit l'élément non-nul* $a \in K_{p+1,1}(X, L)$*, on a* $\pi_x(a) \neq 0$ *pour* $x \in X$ *général.*

En particulier, si $K_{p+1,1}(X, L) \neq 0$, alors $K_{p,1}(\widetilde{X}, \sigma^*L - E) \neq 0$ pour $x \in X$ général. Puisque l'annulation de la cohomologie de Koszul des fibrés $\sigma^*L - E$ est une condition ouverte sur x (*voir* la preuve de [Ap2, Theorem 2]), on en déduit :

Corollaire 1. *Si* $K_{p+1,1}(X, L) \neq 0$*, alors* $K_{p,1}(\widetilde{X}, \sigma^*L - E) \neq 0$ *pour tout* $x \in X$.

Pour les courbes, ce résultat s'énonce d'une manière plus simple :

Corollaire 2. *Soient C une courbe, $L_0 \in \mathrm{Pic}(C)$ un fibré en droites, et $x \in X$ un point, tels que $L_0 + x$ est globalement engendré. Soit encore $p \geq 1$ un entier tel que $K_{p,1}(C, L_0) = 0$. Alors $K_{p+1,1}(C, L_0 + x) = 0$.*

Comme il a été remarqué par C. Voisin, le morphisme de projection s'exprime facilement dans le langage de [V2]. Avec cette traduction en main, les preuves des résultats ci-dessus sont immédiates.

Enfin, signalons que le morphisme de projection peut être aussi bien défini dans un contexte algébrique plus abstrait, *voir* [Ap1]. Il suffit de partir d'un module gradué sur l'algèbre symétrique d'un espace vectoriel afin d'avoir un complexe de Koszul bien-défini. Les résultats énoncés dans cette section trouvent des correspondants fidèles dans ce cadre élargi.

2.3 Nouvel indice pour la conjecture de la gonalité de Green-Lazarsfeld

Une conséquence des faits de la section précédente est le suivant, *voir* [Ap1] :

Théorème 6. *Soient C une courbe, $k \geq 1$ un entier et L_0 un fibré en droites sur C, non-spécial et globalement engendré qui satisfait à la condition (M_k). Alors, pour tout diviseur effectif D sur C, le fibré $L_0 + C$ satisfait à la condition (M_k).*

En particulier, on voit que le plus petit nombre k pour lequel un fibré en droites L sur C ne satisfait pas à la condition (M_k), ne dépend plus de L, dès que le degré de L devient assez grand. Par conséquent, cet entier est un invariant de la courbe. L'essentiel dans l'énoncé de la conjecture est alors de montrer qu'il ne s'agit pas d'un invariant nouveau, mais qu'il est toujours égal à la gonalité de C.

Le théorème 6 nous offre également un moyen concret de tester la conjecture pour une courbe donnée :

Corollaire 3. *Soient C une courbe munie d'un pinceau g^1_k, et $L_0 \in \mathrm{Pic}(C)$ un fibré non-spécial, globalement engendré, qui satisfait à la condition (M_{k-1}). Alors, $\mathrm{gon}(C) = k$ et la conjecture de la gonalité est vérifiée pour C.*

Une fois vérifiée pour une certaine courbe, la conjecture sera vraie pour une courbe générique ayant le même genre, et la même gonalité ; cette remarque résulte de la semi-continuité des nombres de Betti gradués, et de l'irréductibilité de l'espace de modules $\mathcal{M}_{g,k}$ des courbes des genre et gonalité fixés, *voir* [F]. D'ici l'intérêt pour tester la conjecture sur des cas particuliers, convenablement choisis. On le fait tout d'abord pour les courbes planes, *voir* [Ap1] :

Proposition 2. *Soit $C \subset \mathbf{P}^2$ une courbe plane de degré $k+1$. Alors, le fibré $\mathcal{O}_C(k)$ satisfait à la condition (M_{k-1}).*

On recouvre ainsi le résultat classique qui nous assure que toute projection linéaire d'un point sur une courbe plane est un pinceau minimal sur cette courbe (*voir*, par exemple, [ACGH, I, Appendix A, 1.18]).

La proposition 2 se généralise au cas des courbes qui se plongent dans une surface de Hirzebruch. On introduit d'abord quelques notations, que l'on utilisera ensuite. Si Σ_e est la surface de Hirzebruch d'invariant numérique $e \geq 0$, on dénote par $H \in H^2(\Sigma_e, \mathbf{Z})$ la classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{\Sigma_e}(1)$, et par $F \in H^2(\Sigma_e, \mathbf{Z})$ la classe d'une fibre de la règle. On démontre ([Ap1]) :

Théorème 7. *Soit $C \equiv kH + mF$ une courbe sur la surface de Hirzebruch Σ_e, telle que $k \geq 2$ et $m \geq \max\{ke, k+e\}$. Alors, le fibré $\mathcal{O}_C((k-1)H + (m-1)F)$ satisfait à la condition (M_{k-1}). En particulier, le pinceau g^1_k induit par la restriction sur C de la règle de Σ_e est minimal, et la conjecture de la gonalité est vérifiée pour C.*

Signalons que si la condition $m \geq \max\{ke, k+e\}$ n'était pas satisfaite, c'est à dire $e = 1$ et $m = k$, alors le pinceau g^1_k ne serait jamais minimal. Donc, en vue du théorème précédent, la condition $m \geq \max\{ke, k+e\}$ équivaut à dire que la règle de la surface Σ_e induit, sur chacune des courbes du système linéaire $|\mathcal{O}_{\Sigma_e}(kH+mF)|$, un pinceau minimal (*voir* aussi [Ma3]).

Inspirés par Schreyer, [Sc2], regardons maintenant les courbes plongées dans des éclatements de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Soient donc $k \geq 3$, $m \geq k$ et $0 \leq \gamma \leq k-2$ trois nombres entiers, $x_1, ..., x_\gamma$ des points génériques sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $C' \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}(k, m)|$ une courbe irréductible, singulière, n'ayant pour singularités que des noeuds à $x_1, ..., x_\gamma$. Une telle courbe existe, *voir* [Sc2]. Dénotons par $\Sigma \xrightarrow{\sigma} \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ l'éclatement en $\{x_1, ..., x_\gamma\}$, E le diviseur exceptionnel, $L = \sigma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}(k-1, m-1) - E$ et $C \subset \Sigma$ la transformée stricte de C'. Avec toutes ces notations, on a :

Proposition 3. *Le fibré $L_{|C}$ satisfait à la condition (M_{k-1}).*

Outre l'égalité $\text{gon}(C) = k$, on en déduit un résultat sur la conjecture de la gonalité pour les courbes génériques :

Théorème 8. *Pour tout entier $k \geq 3$, la conjecture de la gonalité est vérifiée pour une courbe k-gonale générique de genre $g > (k-1)(k-2)$.*

C'est le meilleur résultat que l'on puisse obtenir avec les méthodes exposées ici. Afin de le raffiner, il faudrait en trouver d'autres, encore plus efficaces.

2.4 Calculer la gonalité d'une courbe de Segre générique à travers l'annulation des syzygies

Une *courbe de Segre* est par définition une courbe plane irréductible, pas forcément lisse, qui n'a pour singularités que des noeuds, plus, éventuellement, un autre point de multiplicité plus élevée en lequel la singularité est simple. L'attention que l'on porte à la géométrie de ces courbes est justifiée par un résultat ancien dû à B. Segre (*voir* [Se] et aussi [AC, Theorem 0.4]) qui décrit les revêtements génériques de la droite projective. Voici l'énoncé original :

"Date genericamente $\omega = 2\nu + 2p - 2$ rette di un fascio ($\nu > 2$), affinchè esista (almeno) une curva piana irriducibile di genere p ed ordine $\nu + n$ (n intero ≥ 0), passante n volte pel centro di fascio, e di cui le ω rette date siano le tangenti (in piunti semplici) che appartengono a questo fascio, è necessario e sufficiente che sia

$$n \geq \frac{p - \nu + 2}{2}."$$

L'hypothèse de généricité lui permet de supposer que, en dehors du centre du faisceau des droites considéré, la courbe dans l'énoncé du théorème n'a que des noeuds pour points singuliers (*voir* [Se, pag. 545]). En particulier, on en déduit que toute courbe générique C de genre et gonalité fixés se projette sur une courbe de Segre C', de manière que le pinceau minimal sur C correspond à la projection du point le plus singulier sur C'.

Naturellement, on se pose la question suivante : sous quelles conditions la normalisation C d'une courbe de Segre C' a-t-elle pour pinceau minimal le morphisme induit par la projection du point le plus singulier de C' ?

Dans le cas où tous les points singuliers sont des noeuds, on connaît déjà plusieurs réponses à cette question. Par exemple, si le nombre de points singuliers ne dépasse pas deg$(C') - 2$, la situation est bien comprise, *voir* [ACGH, I, Appendix A, 1.20]. Pour une courbe nodale *générique*, à nombre plus élevé de noeuds, les résultat principal de [Co] nous fournit également une réponse positive.

Si C' contient effectivement un point de multiplicité supérieure à deux, y répondre devient bien moins évident. Néanmois, tout en supposant que le nombre de noeuds est raisonnablement petit, grâce à l'annulation de la cohomologie de Koszul, on peut montrer un résultat pour une courbe générique. Ici, la généricité est celle de Z. Ran : ayant fixé le degré, le genre, et le nombre de noeuds, les courbes qu'on étudie sont paramétrées par une variété quasi-projective, irréductible, dite *de Severi*, *voir* [Ran, Irreducibility Theorem, p. 122].

Théorème 9. *Soient $x_0 \in \mathbf{P}^2$ un point, $\{x_1, ..., x_\gamma\}$ un ensemble de points génériques du plan projectif et C' une courbe de Segre de degré $m \geq 6$, ayant une singularité d'ordre $m - k \leq m - 4$ à x_0, des noeuds à $x_1, ..., x_\gamma$ et lisse en dehors de tous ces points. Supposons que $\gamma \leq m - 3$ et notons par C la normalisation de C'. Alors, un pinceau minimal de C est induit par la projection de x_0.*

L'existence d'une courbe C' est assurée par [AC, Theorem 4.7]. En vue du même résultat on peut remarquer qu'une courbe C' tout comme dans l'énoncé du théorème 9 correspond à un point générique de la variété de Severi.

Le théorème 9 admet une interprétation amusante en termes d'espaces de modules des courbes. En utilisant les notations de [AC], on considère $\mathcal{M}^1_{g,k} \subset \mathcal{M}_g$ le lieu des courbes munies d'un pinceau (possiblement avec des points de base) de degré k. C'est une variété irréductible qui contient l'espace de modules $\mathcal{M}_{g,k}$ de courbes k-gonales. Soit V la variété de Severi des courbes de Segre de degré m, à γ noeuds, ayant une singularité d'ordre $(m - k)$ à un points fixé x_0. La projection de x_0 des courbes de V définit une application rationnelle :

$$\psi : V - - - - \to \mathcal{M}^1_{g,k},$$

où $g = (k-1)(m-1-k/2) - \gamma$. Notre résultat nous dit que, si $\gamma \leq m-3$, alors l'image de ψ rencontre $\mathcal{M}_{g,k}$.

La stratégie de démonstration est comme suit. En éclatant le point x_0, on se place sur la surface de Hirzebruch Σ_1. La transformée stricte de C' est alors une courbe nodale C'' sur Σ_1 dont on connait le type numérique. En éclatant encore les noeuds de C'', on obtient une courbe lisse C, contenue dans une surface rationnelle. Le théorème 9 ne sera alors qu'un cas particulier d'un résultat plus général, voir ci-dessous. Cela proviendra de l'annulation de la cohomologie de Koszul et d'une remarque qui, elle, découle à son tour du théorème de non-annulation de Green-Lazarsfeld [GL1].

Remarque 1. Soit C une courbe munie d'un pinceau g^1_k, telle que son fibré canonique K_C satisfait à la condition (M_{k-2}). Alors, Cliff$(C) =$ gon$(C)-2$, gon$(C) = k$, et la conjecture de Green et vérifiée pour C.

On applique cette observation, d'ailleurs triviale, aux normalisations des courbes nodales sur une surface de Hirzebruch ([Ap2]) :

Théorème 10. *Soient $e \geq 0$, $k \geq 4$, m et γ des nombres entiers tels que $m \geq$ max$\{ke, k+2e\}$ et $\gamma \leq m-e-2-(k-2)(e-1)$, $\{x_1, ..., x_\gamma\}$ un ensemble de points génériques sur la surface de Hirzebruch Σ_e et $C'' \in |\mathcal{O}_{\Sigma_e}(kH+mF)|$ une courbe irréductible ayant des noeuds en $x_1, ..., x_\gamma$ et lisse en dehors de ces points. Alors, le fibré canonique de la normalisation C de C'' satisfait à la condition (M_{k-2}). En particulier,* Cliff$(C) =$ gon$(C)-2$ *et* gon$(C) = k$.

L'idée de démonstration du théorème 10 est la suivante. Comme on le disait avant, on éclate tout d'abord la surface Σ_e en $\{x_1, ..., x_\gamma\}$ et on note cette nouvelle surface, et le morphisme qui vient avec, par $\Sigma \stackrel{\sigma}{\to} \Sigma_e$. La courbe C sera alors plongée dans Σ. Maintenant, on utilise la formule d'adjonction afin de calculer le fibré canonique de C comme provenant d'un fibré L sur Σ, où $L = K_\Sigma + C$. Ensuite, on applique la suite longue exacte pour la cohomologie de Koszul, [Gr1, Corollary 1.d.4], et un résultat d'annulation de Green, [Gr1, Theorem 3.a.1], pour trouver un isomorphisme entre des espaces de cohomologie de Koszul $K_{p,1}(\Sigma, L)$ et $K_{p,1}(C, K_C)$, respectivement. On se ramène ainsi à démontrer un résultat d'annulation pour la cohomologie de Koszul sur Σ (pour les détails, *voir* [Ap2]) :

Théorème 11. *Soient $e \geq 0$, $\alpha \geq 2$, β et γ des nombres entiers qui satisfont aux inégalités : $\beta \geq$ max$\{\alpha e, \alpha+e\}$ et $\gamma \leq \beta-(e-1)\alpha$. Soit $\Sigma \stackrel{\sigma}{\to} \Sigma_e$ la surface éclatée de Σ_e en un ensemble de points génériques $\{x_1, ..., x_\gamma\}$ de Σ_e et notons par E le diviseur exceptionnel et $L = \sigma^*\mathcal{O}_{\Sigma_e}(\alpha H+\beta F) - E$. Alors, $K_{p,1}(\Sigma, L) = 0$ pour tout $p \geq h^0(L) - \alpha - 1$.*

L'avantage d'avoir employé l'annulation de la cohomologie de Koszul dans la démonstration du théorème 9 est d'arriver en même temps à un résultat sur la conjecture de Green :

Théorème 12. *Quels que soient g et k deux nombres entiers positifs, tels que $g \geq k(k-1)/2$, la conjecture de Green est vraie pour une courbe générique k-gonale de genre g.*

Même si ce résultat améliore celui de [Sc2], il n'est ni optimal, ni le meilleur obtenu jusqu'à présent. Heureusement, il y en a d'autres, beaucoup plus fins que lui, [T], [V2]. Il l'a été remarqué par C. Voisin qu'une combinaison de ces deux articles cités ici résoud la conjecture pour toute courbe générique, quels que soit le genre et pour toute gonalité, sauf pour la gonalité maximale en genre impaire. Il n'y a donc qu'un seul cas (peut-être le plus difficile) qui nous reste à étudier. La conjecture de Green pour les courbes génériques est en position de se transformer en un théorème, et cela c'est pour demain !

2.5 Quelques liens entre la conjecture de la gonalité et la conjecture de Green

Le morphisme de projection nous offre un moyen de comparer l'annulation de la cohomologie de Koszul de fibrés sur une courbe C qui diffèrent par un diviseur effectif. Maintenant, prenons pour fibré de départ le fibré canonique K_C et supposons qu'il satisfait à la condition (M_k). Dans ce cas, tout fibré de degré assez grand sur C satisfera à la même condition ([Ap1, Theorem 3]). Posons $c = \mathrm{Cliff}(C)$ et supposons que $\mathrm{gon}(C) = c + 2$. Si jamais la conjecture de Green était vérifiée pour C, alors K_C satisferait à la condition (M_c), ce qui entraînerait (M_c) pour tout fibré L de degré assez grand sur C. Cela n'est pas très loin de l'énoncé de la conjecture de la gonalité, qui y prévoit la condition (M_{c+1}). Cela veut dire qu'il doit y avoir un zéro de plus parmi les espaces $K_{p,1}(C, L)$ qui surgisse à un certain moment lorsqu'on ajoute suffisament de points au fibré canonique. Naturellement, cela nous fait penser qu'il existe une relation directe entre les deux conjectures ; hélas, pour le moment, nous manquons de moyens pour obtenir directement ce zéro supplémentaire dont on avait parlé.

Puisque nous avons échoué dans l'essai de déduire la conjecture de la gonalité de la conjecture de Green, voyons si nous pourrions supposer la conjecture de la gonalité pour une courbe C et en déduire l'autre. Parcourir le chemin en sens inverse dans le raisonnement ci-dessus n'est pas envisageable, puisqu'on ne sait pas à quel niveau l'annulation de la cohomologie de Koszul est préservée lorsqu'on soustrait des diviseurs effectifs, au lieu de les ajouter. En revanche, on aura toujours une chance de gagner si on se contente de comparer l'annulation de la cohomologie de Koszul du fibré canonique K_C et l'annulation des espaces $K_{p,1}(Y, L_Y)$, pour L_Y un fibré de degré assez grand, au-dessus d'une autre courbe Y, complètement différente de C. Cela a été déjà fait d'une manière indirecte, dans la démonstration des théorèmes 9-11, *voir* [Ap2]. On y avait comparé les espaces $K_{p,1}(\Sigma, L)$ qui, eux, étaient isomorphes aux $K_{p,1}(C, K_C)$, avec la cohomologie de Koszul d'une autre courbe, contenue dans la même surface Σ. Ce fait se généralise comme suit ([AN]).

Théorème 13. *Soient X une variété projective, lisse, irréductible, avec $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$, D et E deux diviseurs effectifs sur X. Notons $d = h^0\mathcal{O}_D(D)$, $e = h^0\mathcal{O}_E(E)$, $\Delta = D + E$ et $L = \mathcal{O}_X(\Delta)$. Supposons que D est lisse est irréductible et Δ est connexe et réduit. Si $K_{p-e,1}(D, L_D) = 0$ pour un entier $p > e$ et l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $e = 0$, *ou bien*
(ii) $p \geq d + e$,

alors $K_{p,1}(X, L) = 0$.

On applique le résultat ci-dessus aux courbes sur une surface $K3$. Soit donc X une surface $K3$ et D une courbe k-gonale de genre g sur X telles qu'un pinceau minimal sur D est induit par la restriction d'un pinceau elliptique $\mathcal{O}_X(F)$ sur X. Cette hypothèse n'est pas très restrictive : il y a des exemples en tout genre et toute gonalité ([Kn], et aussi [Ma2, Theorem 2.1]). Considérons F_1 et F_2 deux courbes lisses distinctes du pinceau elliptique et posons $E = F_1 + F_2$. On a $\deg(L_D) = 2g - 2 + 2k$ et $h^0(D, L_D) = g + 2k - 1$, par Riemann-Roch. Avec les notations précédentes, $d = g$ et $e = 2$. Donc, si $K_{p-2,1}(D, L_D) = 0$ pour un entier $p \geq g + 2$, alors $K_{p,1}(X, L) = 0$. En particulier, tout en supposant que L_D satisfait l'annulation prédite par la conjecture de la gonalité, c'est-à-dire $K_{p',1}(D, L_D) = 0$ pour tout $p' \geq h^0(D, L_D) - k = g + k - 1$, on aura aussi $K_{p,1}(X, L) = 0$ pour tout $p \geq g + k + 1$. Ensuite, pour toute courbe lisse, connexe, $C \in |L|$ (dont le genre est $g_C = g + 2k$ par adjonction) on a $K_{p,1}(C, K_C) = 0$, quel que soit $p \geq g + k + 1 = g_C - k + 1$. C'est exactement l'annulation prédite par la conjecture de Green pour C.

Le même résultat peut s'appliquer à d'autres courbes, afin d'obtenir encore plus de cas où la conjecture de la gonalité entraîne la conjecture de Green, dans le sens expliqué ici.

Références bibliographiques pour la deuxième partie

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, Geometry of algebraic curves, Volume I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 267. Springer-Verlag. XVI, (1985).

[AC] E. Arbarello, M. Cornalba, Footnotes to a paper of Beniamino Segre, Math. Ann. **256** (1981) 341-362.

[Ap1] M. Aprodu, On the vanishing of higher syzygies of curves, Math. Z. **241** (2002) 1-15.

[Ap2] M. Aprodu, On the vanishing of higher syzygies of curves. II, Math. Z., à paraître.

[AN] M. Aprodu, J. Nagel, version préliminaire.

[Co] M. Coppens, The gonality of general smooth curves with a prescribed plane nodal model. Math. Ann. **289** no. 1 (1991) 89-93.

[CM] M. Coppens, G. Martens, Secant spaces and Clifford's theorem, Compositio Math. **78** (1991) 193-212.

[Ehb] S. Ehbauer, Syzygies of points in projective space and applications, Orecchia, Ferruccio (ed.) et al., Zero-dimensional schemes. Proceedings of the international conference held in Ravello, Italy, June 8-13, 1992. Berlin: de Gruyter. (1994) 145-170.

[EL] L. Ein, R. Lazarsfeld, Syzygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension, Invent. Math. **111** (1993) 51-67.

[ELMS] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens, F.-O. Schreyer, The Clifford dimension of a projective curve, Compositio Math. **72** (1989) 173-204.

[F] W. Fulton, Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, Ann. of Math. **90** (1969) 541-575.

[Gr1] M. Green, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. Diff. Geom. **19** (1984) 125-171.

[Gr2] M. Green, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. II, J. Diff. Geom. **20** (1984) 279-289.

[Gr3] M. Green, Koszul cohomology and geometry, M. Cornalba (ed.) et al., Proceedings of the first college on Riemann surfaces held in Trieste, Italy, November 9-December 18, 1987. Teaneck, NJ: World Scientific Publishing Co. (1989) 177-200.

[GL1] M. Green, R. Lazarsfeld, The nonvanishing of certain Koszul cohomology groups, J. Diff. Geom. **19** (1984) 168-170 (Appendix to [Gr1]).

[GL2] M. Green and R. Lazarsfeld, On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve, Invent. Math. **83** (1986) 73-90.

[HR] A. Hirschowitz, S. Ramanan, New evidence for Green's conjecture on syzygies of canonical curves, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998) 145-152.

[Kn] A. L. Knutsen, Gonality and Clifford index of curves on $K3$ surfaces, Preprint math.AG/0110218.

[La1] R. Lazarsfeld, A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series, M. Cornalba (ed.) et al., Proceedings of the first college on Riemann surfaces held in Trieste, Italy, November 9-December 18, 1987. Teaneck, NJ: World Scientific Publishing Co. (1989) 500-559.

[La2] R. Lazarsfeld, Linear series on algebraic varieties, Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. I (1991) 715-723.

[Lo] F. Loose, On the graded Betti numbers of plane algebraic curves, Manuscripta Math. **64** (1989) 503-514.

[Ma1] G. Martens, Über den Clifford-Index algebraischer Kurven, J. Reine Angew. Math. **336** (1982) 83-90.

[Ma2] G. Martens, On curves on $K3$ surfaces, Algebraic curves and projective geometry, Trento, 1988, Lecture Notes in Math., **1389**, Springer: Berlin-New York (1989) 174-182.

[Ma3] G. Martens, The gonality of curves on a Hirzebruch surface, Arch. Math. **67** (1996) 349-352.

[Ran] Z. Ran, Families of plane curves and their limits: Enriques' conjecture and beyond. Ann. of Math. (2) 130 (1989) no. 1, 121-157.

[Sc1] F.-O. Schreyer, Syzygies of canonical curves and special linear series, Math. Ann. **275** (1986) 105-137.

[Sc2] F.-O. Schreyer, Green's conjecture for general p-gonal curves of large genus, Algebraic curves and projective geometry, Trento, 1988, Lecture Notes in Math., **1389**, Springer, Berlin-New York (1989) 254-260.

[Sc3] F.-O. Schreyer, A standard basis approach to syzygies of canonical curves, J. Reine Angew. Math. **421** (1991) 83-123.

[Se] B. Segre, Sui moduli delle curve poligonali e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann, Math. Ann. **100** (1928) 537-551.

[T] M. Teixidor i Bigas, Green's conjecture for the generic r-gonal curve of genus $g \geq 3r-7$, Duke Math. J. **111** (2002) 195-222.

[V1] C. Voisin, Courbes tétragonales et cohomologie de Koszul, J. Reine Angew. Math. **387** (1988) 111-121.

[V2] C. Voisin, Green's generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a $K3$ surface, Preprint 2001.