

# Systemes intégrables semi-classiques: du local au global

Vũ Ngọc San

20 novembre 2003



## Résumé

Ce mémoire a pour but de présenter un panorama des recherches que j'ai effectuées depuis la soutenance de ma thèse en 1998. J'en ai également profité pour réordonner mes résultats et émailler le texte de réflexions parfois nouvelles afin de tenter de combiner l'introduction au sujet avec la synthèse de mes recherches. Il sera question de systèmes hamiltoniens complètement intégrables, de leur étude locale, de leurs singularités, de leurs aspects globaux et de certains liens qu'il entretiennent avec les variétés toriques, tout ceci du point de vue de la mécanique classique ainsi que de celui de leur quantification semi-classique.

## Introduction

**Le pendule de Huygens** — Les origines de la géométrie et donc de la mécanique (en particulier céleste) se confondent avec celles des mathématiques elles-mêmes. Néanmoins on attribue généralement l'étude du premier système dynamique au mathématicien hollandais Christiaan Huygens. Sous le règne de Louis XIV, Huygens obtient la charge importante de diriger l'Académie Royale des Sciences. C'est ainsi qu'il propose au roi son célèbre traité sur le mouvement du pendule pesant et son application à la construction d'horloges à balancier [38]. Huygens est fier que ses pendules, les plus exactes jamais construites alors, équipent les appartements du roi, servent les bateaux pour leurs mesures de longitudes<sup>(1)</sup>, et procèdent d'une analyse mathématique subtile. C'est un exemple à méditer d'une symbiose

---

(1). avec un succès limité, il est vrai. En contrepartie, la précision des pendules a permis de découvrir que le champ gravitationnel terrestre n'est pas constant à la surface du globe!

entre ce qu'on appellerait aujourd'hui les mathématiques pures et appliquées :

*Dans cette science [la géométrie] que j'ai toujours beaucoup admirée et aimée, je me suis proposé surtout, toutes les fois que je m'y adonnai, la considération de problèmes dont la solution serait utile soit pour la commodité de la vie soit pour la connaissance de la nature. Mais c'est lorsque je tombais sur des sujets où l'utilité était unie à une difficulté de les tirer au clair qui exigeait des raisonnements subtils que j'avais l'impression de m'y appliquer le plus avantageusement. [op. cit.]*

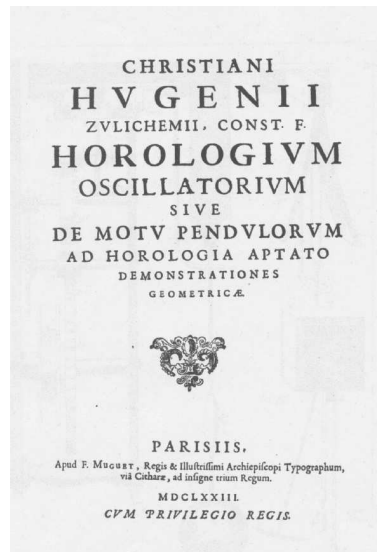


FIG. 1 – Christiaan Huygens et son livre sur les horloges à balancier

Le pendule de Huygens le plus simple, appelé aussi “pendule sphérique”, pourra servir d'exemple pour la majorité des mathématiques que je présenterai ici. C'est le premier exemple de ce qu'on appelle aujourd'hui un *système complètement intégrable*, et c'est un exemple non trivial. Huygens savait que pour un pendule simple seules les *petites oscillations* possèdent une fréquence constante, ce qui en fait en quelque sorte le précurseur de l'analyse *locale* des systèmes dynamiques. L'analyse *globale* de ce système est bien plus tardive, puisque c'est en 1980 que Cushman et Duistermaat exhibent le pendule sphérique comme premier exemple dont la *monodromie* est non triviale [25]. Une dizaine d'années plus tard, cette monodromie est comprise en terme de la *singularité dite foyer-foyer* que possède ce système lorsque le pendule est en position d'équilibre instable, à son altitude maximale [49, 94, 96]. La géométrie de cette singularité est exploitée dans ma thèse [78] pour décrire son influence sur les systèmes *semi-classiques* :

les systèmes décrits par la mécanique quantique et dont la limite classique possède de telles singularités. Cette description met en œuvre des invariants spectraux qui se révèlent après coup généraliser des invariants symplectiques semi-globaux de ces fibrations lagrangiennes singulières [86]. À leur tour, ces invariants se révèlent utiles pour déterminer la persistance de tores invariants (KAM) en cas de perturbation du système...[27] Enfin dans l'étude du pendule sphérique se pose également la question globale du recollement des informations (géométrique, spectrales) recueillies en différents points singuliers. Il reste néanmoins que le pendule est bel et bien un modèle de simplicité dans la mesure où il ne présente pas de singularité de type hyperbolique, qui font la richesse d'autres exemples non moins célèbres comme les toupies (Lagrange, Kovalevskaya).



J. Lagrange



S. Kovalevskaya



Avant d'entrer dans le vif du sujet, je me propose de situer dans leur cadre historique les notions qui vont nous intéresser et qui concernent l'étude des systèmes complètement intégrables en mécanique classique et quantique.

### Mécanique classique

En mécanique classique, un système hamiltonien complètement intégrable est un système possédant un ensemble complet d'intégrales premières en involution. Autrement dit, on se donne une variété symplectique  $M$  de dimension  $2n$  et  $n$  fonctions lisses  $f_1, \dots, f_n$  dont les différentielles sont presque partout indépendantes et vérifiant  $\{f_i, f_j\} = 0$  pour tous  $i$  et  $j$ . Le crochet utilisé est le crochet de Poisson induit par la structure symplectique. La plupart du temps, on ne s'intéressera pas particulièrement au

Hamiltonien  $H$  qui définit le système. L'hypothèse minimale est qu'il commute avec les  $f_i$ . Certains auteurs demandent parfois qu'il soit une fonction des  $f_i$  – ce qui est toujours le cas près d'un point régulier. D'autres supposent même que  $H$  est l'une des fonctions  $f_i$ , par exemple  $f_1$ .

De notre point de vue, l'objet essentiel est donc l'application moment  $F := (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Tores de Liouville?** — Le premier résultat fondamental dans l'étude des systèmes complètement intégrables est qu'au voisinage d'une composante connexe régulière d'une fibre de  $F$ ,  $F$  est une fibration symplectiquement linéarisable. Si la fibre est compacte, le modèle linéaire est le voisinage de la section nulle de  $T^*\mathbb{T}^n$  muni de la fibration en tores horizontaux.

Cela implique en particulier que les trajectoires de n'importe quel Hamiltonien du système sont des droites s'enroulant sur un tore horizontal et parcourues à vitesse constante (mais dépendant du tore considéré).

Ces tores lagrangiens sur lesquels s'effectue la dynamique sont nommés *tores de Liouville*, alors que le théorème en question ou théorème des variables *action-angle* est attribué à Liouville et Arnold. Comme nous allons le voir, cette nomenclature ne reflète pas exactement l'histoire du sujet.



J. Liouville

Liouville a certainement œuvré pour le développement des systèmes complètement intégrables. Par l'introduction dans les années 1850 de la 1-forme différentielle  $\alpha = \sum_i p_i dq_i$  dite avec justesse "1-forme de Liouville" il est le précurseur de la vision moderne de la mécanique en terme de géométrie symplectique. Sa contribution principale dans ce domaine est d'avoir montré comment intégrer localement un "système complètement intégrable" au moyen d'une primitive locale de  $\alpha$  restreinte aux sous-variétés invariantes [45].

Pour autant, l'appellation "tore de Liouville" me paraît douteuse. À ma connaissance, rien dans les publications de Liouville ne permet d'affirmer qu'il savait qu'en général le mouvement avait lieu sur un tore (même s'il est probable qu'il s'en soit rendu compte sur un certain nombre d'exemples où les tores lagrangiens sont donnés par des équations polynomiales explicites). Au contraire, les articles [45, 46, 44] ne font état que d'études à caractère purement *local*.

La première étude sérieuse de la dynamique des systèmes intégrables sur toute la fibre lagrangienne  $F^{-1}(c)$  est due il me semble à Mineur [53, 54], qui dans des articles des années 1935–1937 récemment redécouverts (voir [78, 98]) énonce et prouve pour la première fois le théorème des variables action-angle. Davantage de détails sur la preuve de Mineur se trouvent dans l'article [84].

Ce théorème a ensuite été redécouvert par Arnold en plusieurs étapes

(en 1963 [2] il montre que les fibres sont des tores sur lesquelles la dynamique est quasi-périodique; dans [1] il complète l'énoncé en incluant la description du voisinage du tore, mais rajoute pour cela une hypothèse superflue).

Plus récemment, de nombreuses personnes ont fourni diverses preuves complètes, dont celle du célèbre article de Duistermaat [25].

Duistermaat construit dans cet article les obstructions à *globaliser* le théorème de Liouville-Arnold-Mineur, lorsque l'ouvert des valeurs régulières de  $F$  n'est pas topologiquement trivial. Il obtient deux invariants : la monodromie et la classe de Chern. La première est l'obstruction à ce que le fibré en tore donné par  $F$  soit un fibré principal; si la monodromie est triviale, la classe de Chern est la classe d'équivalence du fibré principal.

Le problème de la globalisation des variables action-angle avait déjà été abordé quelques années auparavant par Nekhoroshev [57], qui en avait donné une réponse moins complète. Par la suite, d'autres généralisations ont été proposées, dont celle de Dazord et Delzant qui étudient le cas de feuilletages isotropes symplectiquement complets (dans le sens où l'orthogonal symplectique est aussi un feuilletage) [20]. Un point intéressant est qu'ils voient la base comme une variété de Poisson.

**Singularités** — L'approche de Duistermaat est très naturelle. D'un point de vue pratique, son principal inconvénient est qu'elle ne considère que la partie régulière de la fibration  $F$ . On sait bien par l'exemple de la théorie de Morse que de tels invariants sont souvent calculables au moyen justement des *singularités* du système.

Même si les premières *formes normales locales* pour les singularités des systèmes intégrables datent maintenant de près de 40 ans ([61]), leur utilisation globale est très récente (et d'une certaine façon, assez tardive par rapport aux progrès de la géométrie algébrique).

Dans cette optique, le premier résultat – que j'ai déjà mentionné plus haut – est qu'on peut "génériquement" calculer la monodromie par l'étude des singularités de type foyer-foyer. En se basant sur les formes normales locales  $C^\infty$  des singularités des systèmes intégrables dues à Eliasson [28], on peut classer symplectiquement ces systèmes près d'une telle fibre singulière; c'est ce que j'appelle la classification *semi-globale* [86]. Le passage du semi-global au global possède plusieurs facettes. Dans la suite logique de l'article de Duistermaat, l'approche "classe caractéristique" qui permet une classification topologique au moyen d'une chirurgie adaptée a été menée à bien par Nguyễn Tiên Zung [95, 97]. Une autre approche consiste à s'intéresser seulement aux systèmes proches des actions hamiltoniennes toriques dont on connaît bien la classification et a été récemment explorée dans les articles [68, 43] et [85]. J'en parlerai bien entendu davantage par la suite.

## Mécanique quantique

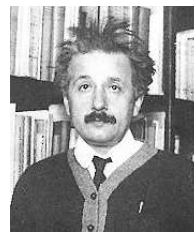
La formulation mathématique actuelle de la mécanique quantique non-relativiste se résume à l'étude d'opérateurs (en général auto-adjoints) sur des espaces de Hilbert : à leur spectre et leur dynamique.

Mais dans son fondement physique, la mécanique quantique est indissociable de la mécanique classique (voir par exemple l'ouvrage [41]). Il est donc naturel et hautement souhaitable de disposer d'une théorie mathématique quantique qui intègre la mécanique classique comme cas limite. Dans une telle théorie dite *semi-classique*, un système complètement intégrable est la donnée de  $n$  opérateurs  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n$  qui commutent deux à deux :  $[\hat{f}_i, \hat{f}_j] = 0$ , et dont la *limite classique* fournit des Hamiltoniens  $f_i$  qui définissent un système complètement intégrable au sens classique.

**Bohr, Sommerfeld, Einstein et les autres** — Parmi les quelques notions dont j'aurai besoin dans ce texte pointent les noms de physiciens célèbres, fondateurs de la mécanique quantique. *Planck*, le premier, a compris que certains phénomènes physiques nécessitaient l'abandon douloureux de la théorie classique. En 1900 il annonce sa formule de radiation faisant intervenir des *quanta* d'énergie. Pourtant Planck prétend ne pas comprendre la théorie quantique et laisse le soin à ses collègues de mettre sur pied l'arsenal adéquat. Quelques années après, en étudiant l'effet photoélectrique, *Einstein* réalise qu'il a besoin d'introduire des quanta d'énergie semblables à ceux de Planck, qui s'écrivent  $\hbar\nu$ , où  $\nu$  est un *entier* et  $\hbar$  est (à un facteur  $2\pi$  près) une constante appelée désormais la constante de Planck. En 1913 *Bohr* confirme la formule de Planck en calculant la position des raies spectrales de l'atome d'hydrogène, mettant ainsi la communauté scientifique d'accord sur la nécessité d'une nouvelle théorie. Le mathématicien *Sommerfeld* généralise les résultats de Bohr au cas d'orbites elliptiques.



M. Planck



A. Einstein

Cette règle de quantification dite de Bohr-Sommerfeld est le premier résultat *semi-classique* car il se base sur un outil classique (des trajectoires périodiques) pour décrire un résultat quantique (la quantification des transitions d'énergie). Il est remarquable que cette "règle" précède l'invention de la mécanique quantique moderne en 1925-1926, années où *Schrödinger* écrit la théorie de l'atome d'hydrogène au moyen d'un opérateur différentiel, où *Dirac* explique rigoureusement la loi de Planck, et où *Heisenberg*

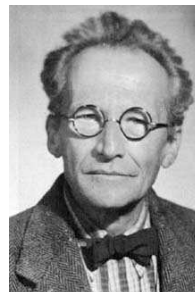
propose son principe d'incertitude. Immédiatement après, les fondements mathématiques de la mécanique quantique en termes d'algèbres d'opérateurs sont proposés par *Von Neumann* et rassemblés dans le livre [76] en 1932. Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg et Schrödinger ont chacun reçu le prix Nobel de physique.



N. Bohr



A. Sommerfeld



E. Schrödinger

En 1917, Einstein propose de généraliser les règles de Bohr-Sommerfeld au cas multidimensionnel des systèmes intégrables. Cette approche a été d'abord complètement ignorée par la physique quantique, et ce probablement pour les deux raisons suivantes : en premier lieu même si on sait depuis Liouville comment localement transformer un système complètement intégrable en un système aux variables séparées, il est très délicat d'incorporer des transformations canoniques générales comme celles de Liouville dans la théorie de Schrödinger; en outre, le résultat de Liouville est local et ne permet pas de calculer les intégrales d'action de Bohr-Sommerfeld.

Premier mathématicien à s'intéresser de près à ces actions, Mineur en 1935 a immédiatement reconnu leur application possible à une règle de quantification de type Bohr-Sommerfeld [52]. Malheureusement, il n'en propose aucune justification mathématique autre que l'idée très générale que cette quantification, assurant une certaine robustesse aux objets considérés, doit s'appliquer à des invariants adiabatiques comme les intégrales d'action.

Du point de vue de la mécanique quantique il faut attendre Keller<sup>(2)</sup> en 1958 pour redécouvrir l'article d'Einstein et tenter de le relier à l'équation de Schrödinger [40].

**Analyse semi-classique** — Même si la mécanique quantique a été construite pour pallier les insuffisances de la mécanique classique, sa formulation même repose sur cette dernière; la quantification des niveaux d'énergie de l'atome de Bohr est indissociable de l'analyse des trajectoires circulaires des électrons comme particules "classiques". Certes on peut, *après coup*, dé-

(2). Je passe ici sur plusieurs développements historiques comme les approches de Brillouin et Kramers en 1926. Dans la littérature physique, ce que j'appelle toujours la règle de Bohr-Sommerfeld et en général appelée la *quantification EBK* pour Einstein, Brillouin et Keller.

velopper (avec succès) une mécanique quantique abstraite basée sur l'approche "théorie des opérateurs" de Von Neumann. Mais comment a-t-on déterminé la forme du potentiel dans l'équation de Schrödinger? Il me semble que dans la vaste majorité des cas le potentiel est déterminé *par analogie* avec la mécanique classique. Développer une théorie mathématique rigoureuse de la limite semi-classique est à mon sens non seulement un *outil technique* intéressant, qui permet parfois d'en savoir davantage et de mieux calculer, mais également une *nécessité philosophique* dans le sens où elle justifie les fondements de mécanique quantique. Dans le même ordre d'idées, il m'est arrivé d'entendre des physiciens affirmer que le semi-classique sert surtout à *comprendre le quantique*.

Je parlerai dans ce document de la "recette" semi-classique proposée par Bohr et Sommerfeld et qui permet vraiment de décrire le spectre des systèmes complètement intégrables (et pas seulement séparables, contrairement à une croyance assez répandue). Mais le lecteur ne doit pas penser que le semi-classique se restreint au cas intégrable. Les techniques semi-classiques pour des systèmes non complètement intégrables incluent par exemple la fameuse "formule des traces" de Gutzwiller [34].

La justification mathématique de ces recettes est en général délicate, même dans le cas intégrable. Les outils "élémentaires" d'analyse asymptotique qui permettent d'écrire l'équation de Schrödinger dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  donnent lieu à des équations souvent très compliquées car il est difficile d'y retrouver les aspects géométriques de la mécanique classique. Le premier à s'être intéressé à mettre en place une théorie de "quantification asymptotique" de la mécanique classique est à ma connaissance Maslov [47]. Cette époque voit également l'invention des opérateurs pseudo-différentiels qui servent immédiatement pour démontrer le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. L'idée de les utiliser pour formaliser de façon satisfaisante l'approche de Maslov fait son chemin, en partie grâce à Duistermaat qui applique les puissantes méthodes de Hörmander, et qui est le premier à avoir examiné les conditions de Bohr-Sommerfeld dans ce contexte [24]. En même temps des mathématiciens comme Leray et Arnold comprennent le rôle géométrique de l'indice de Maslov que ce dernier avait introduit comme correction de la règle de Bohr et Sommerfeld.

La théorie des opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs intégraux de Fourier « à petit paramètre  $\hbar$  » est ensuite développée systématiquement et avec grand succès par Helffer, Robert, Sjöstrand et d'autres... C'est celle que j'utiliserai dans ce texte. À la suite de Duistermaat, le premier à avoir justifié rigoureusement l'utilisation des conditions de Bohr-Sommerfeld pour décrire le spectre d'un système complètement intégrable régulier est Colin de Verdière [11], qui les a énoncées dans la théorie pseudo-différentielle initiale dite *homogène* qui est moins intuitive du point de vue semi-classique. Le cas à petit paramètre a été traité par Charbonnel [8].

Pour finir cette introduction et pour évoquer un sentiment que j'ai eu

l'occasion d'éprouver à plusieurs reprises, je dirais que l'inconvénient principal de l'analyse pseudo-différentielle réside dans l'intrinsèque difficulté à définir les objets, ce qui est en grande partie cause d'une incompréhension presque totale de la part des physiciens. Tant qu'un effort ne sera pas fait de la part des mathématiciens pour vulgariser leur science, les physiciens continueront d'affirmer (non sans raison) que les seuls opérateurs de Schrödinger que l'on puisse rigoureusement traiter avec la règle de Bohr-Sommerfeld sont les systèmes *séparables*<sup>(3)</sup> (ainsi l'atteste par exemple Gutzwiller en 1990 [34]).



---

(3). La définition d'un système *séparable* est délicate dans la mesure où, pour les pionniers de la mécanique quantique, la distinction entre séparable et intégrable n'est pas claire. Est séparable un système dynamique qui s'intègre facilement en choisissant des "bonnes" coordonnées dans l'espace des positions. La solution approchée correspondante de l'équation de Schrödinger est alors un produit de fonctions, chacune à une seule variable.

## Sur ce document

Ce document se propose d'expliquer la théorie des systèmes intégrables classiques et quantiques dans une progression naturelle allant des résultats les plus locaux aux plus globaux. Il serait en partie erroné de penser qu'il suit un ordre historique. Les précurseurs de l'étude des systèmes dynamiques n'ont considéré que des exemple globaux, puisqu'ils sont antérieurs à l'invention du calcul infinitésimal (et donc de l'analyse locale)! La remarque vaut avec encore plus de force pour la mécanique quantique, puisque la notion de transformation canonique locale quantique est très récente et toujours considérée comme délicate : elle repose essentiellement sur l'analyse microlocale initiée par Hörmander dans les années 1960.

Ce n'est bien entendu pas le but de ce mémoire que de présenter en détail la variante semi-classique de l'analyse microlocale. Ceci étant dit, le lecteur appréciera peut-être qu'on en rappelle malgré tout les principales propriétés. C'est le but de l'avant-propos ci-dessous.

Il est clair que ce mémoire met l'accent sur les résultats que j'ai obtenus depuis ma thèse. Néanmoins je ferai les rappels nécessaires de résultats parfois antérieurs, personnels ou non, surtout lorsqu'ils s'inscrivent dans une approche du sujet que je considère nouvelle par rapport à la littérature existante<sup>(4)</sup>.

Quelques preuves seront fournies ici et là; mais que le lecteur se rassure : seules les plus courtes d'entre elles ont leur place ici.

Je ne mentionnerai qu'un nombre très limité d'exemples. Le lecteur intéressé est invité à consulter les références pour les y dénicher. Il est bon néanmoins d'avoir à l'esprit qu'il existe deux grandes classes d'exemples : d'une part, ceux qui sont obtenus comme *approximations intégrables* de systèmes plus compliqués, typiquement à l'aide d'une forme normale de type Birkhoff. D'autre part on sait montrer qu'un certain nombre d'exemples classiques possèdent une « quantification exacte » où les intégrales du mouvement deviennent des opérateurs commutant exactement avec le Hamiltonien (voir par exemple [70, 50]).

Les systèmes intégrables connaissent depuis quelques années un regain d'intérêt qui n'est pas uniquement dû à la question fondamentale des singularités ni aux applications semi-classiques. J'y vois deux raisons supplémentaires : d'une part, la naissance de nouvelles techniques pour décider de la non-intégrabilité d'un système hamiltonien, basées sur la théorie de Galois différentielle et les théorèmes de Morales-Ramis (voir le cours d'Audin [5] pour une introduction); d'autre part l'intérêt de comprendre

---

(4). Pour être précis, sont directement tirés des résultats issus de ma thèse la proposition 1.5, le théorème 1.8, la proposition 1.11, le théorème 1.18 (mais pas les différentes notions d'équivalence et le complexe  $C^*(\mathfrak{f})$ ), les théorèmes 2.4 et 2.6.

les fibrations lagrangiennes singulières s'est fait récemment sentir pour la construction de « symétries miroir » dans la direction de la conjecture de Strominger, Yau et Zaslow [32]. Je ne parlerai pas de ces applications ici.

## Quantification semi-classique

Dans l'ensemble de ce document, les hypothèses classiques seront les suivantes :  $(M, \omega)$  est une variété symplectique  $C^\infty$  de dimension  $2n$ . La forme symplectique induit une dualité entre 1-formes et champs de vecteurs. Étant donnée une fonction  $f \in C^\infty(M)$ , on note  $\mathcal{X}_f$  le champ hamiltonien correspondant :  $\omega(\mathcal{X}_f, \cdot) = -df$ . Le crochet de Poisson associé à cette structure symplectique est  $\{f, g\} = \mathcal{X}_f g = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g)$ .

Un point  $m \in M$  étant fixé, la notation  $(M, m)$  caractérise la catégorie des germes en  $m$ . Par exemple  $C^\infty(M, m)$  désigne l'algèbre des germes de fonctions  $C^\infty$  en  $m$ .

Un système complètement intégrable sera en général donné par l'application moment  $F = (f_1, \dots, f_n)$ , où les  $f_i$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$  à valeurs réelles, qui sont en involution :  $\{f_i, f_j\} = 0$ .

La quantification semi-classique de ces données n'est pas possible pour n'importe quelle variété  $M$ . On se restreindra toujours au cas où  $M = T^*X$  est un fibré cotangent sur une variété  $X$  de dimension  $n$ . En outre, la donnée de la forme symplectique est en général insuffisante pour l'analyse semi-classique; il faut se fixer une primitive de  $\omega$ , c'est-à-dire une 1-forme  $\alpha$  telle que  $d\alpha = \omega$ . Lorsque  $M = T^*X$ ,  $\alpha$  sera toujours la 1-forme canonique dite de Liouville. On pourrait également accepter les variétés symplectiques compactes préquantifiables, que l'on quantifie par la théorie des opérateurs de Toeplitz. L'analogue du  $\alpha$  serait alors la 1-forme de connexion du fibré en droite préquantifiant. Il est tentant de conjecturer que tous les résultats que je présenterai pour  $M = T^*X$  ont leur analogue étroit en termes d'opérateurs de Toeplitz sur variétés compactes. La différence se fera sentir sur le calcul des termes de type "sous-principaux". Charles [9] a déjà effectué un certain nombre de travaux dans cette direction, et nous comptons d'ailleurs unir nos efforts pour systématiser le passage entre les deux quantifications.

La quantification de  $T^*X$  utilisée ici est celle des opérateurs  $\hbar$ -pseudo-différentiels, dont on rappelle brièvement la définition et les principales propriétés ci-dessous. Un système complètement intégrable sera donné par  $n$  opérateurs pseudo-différentiels  $P_j = P_j(\hbar)$  qui commutent deux à deux :  $[P_i, P_j] = 0$ , et dont les symboles principaux sont presque partout indépendants. Sauf indication explicite du contraire, tous les opérateurs pseudo-différentiels considérés seront d'ordre zéro.

## Opérateurs $\hbar$ -pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels font maintenant partie du paysage usuel des équations aux dérivées partielles ou de l'analyse sur les variétés. Nonobstant cette apparente familiarité, il existe en réalité une multitude de classes d'opérateurs pseudo-différentiels... ce qui rend nécessaires quelques précisions avant de commencer. Notons en passant qu'il est parfois utile de savoir jongler avec les différentes définitions (voir par exemple l'article [51]).

Une fonction sur  $\mathbb{R}^{2n}$  dépendant de façon quelconque d'un paramètre réel  $\hbar$  sera un *symbole* d'ordre zéro si lui-même et toutes ses dérivées sont bornées sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , uniformément par rapport à  $\hbar$ . L'espace des symboles d'ordre zéro est noté  $S^0(\mathbb{R}^{2n})$ ; on pose  $S^k(\mathbb{R}^{2n}) = \hbar^k S^0(\mathbb{R}^{2n})$ . Un symbole est dit *classique* lorsqu'il admet un développement asymptotique de la forme  $\hbar^N a_0 + \hbar^{N+1} a_1 + \hbar^{N+2} a_2 + \dots$ , où  $a_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Une fonction  $a(x, \xi; \hbar)$  est dite un symbole *local* près d'un point  $m$  s'il existe une fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  telle que  $\chi a \in S^k(\mathbb{R}^{2n})$ . On notera  $\mathbb{C}_\hbar = S^\bullet(\{0\})$  l'anneau des symboles constants.

Un opérateur linéaire  $N$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dépendant de  $\hbar$  sera dit *négligeable* s'il admet un noyau  $K(x, y; \hbar)$  dans  $S^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ; en particulier il est continu et sa norme  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est d'ordre  $\hbar^k$  pour tout  $k$ . On notera  $N \in O(\hbar^\infty)$ . Un opérateur  $L$  sur  $\mathbb{R}^n$  sera dit  $\hbar$ -pseudo-différentiel s'il s'écrit  $L = A + N$  où  $N$  est négligeable et  $A$  est de la forme

$$(Au)(x) = (\text{Op}_\hbar^w(a)u)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi; \hbar\right) u(y) |dy d\xi| \quad (1)$$

pour un  $a \in S^k(\mathbb{R}^{2n})$  (quantification de Weyl).

Soit  $X$  une variété différentielle munie d'une densité  $|dx|$ ; un opérateur sur  $L^2(X)$  est dit  $\hbar$ -pseudo-différentiel s'il existe une carte locale en tout point dans laquelle il est un  $\hbar$ -pseudo-différentiel pour un symbole local  $a$ . Les notions d'opérateurs négligeables et de symbole classique sont invariantes par changement de carte; dans le cas d'un symbole classique le *symbole principal*  $a_0$  est bien défini comme fonction sur  $M = T^*X$ . Si l'on fait agir les pseudo-différentiels sur l'espace de Hilbert "intrinsèque"  $\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$  des demi-densités, le *symbole sous-principal* est également bien défini comme étant le terme  $a_1$  dans (1). L'espace des opérateurs pseudo-différentiels est une algèbre graduée. Le produit d'opérateurs d'ordre zéro est encore d'ordre zéro et son symbole principal est le produit des symboles principaux. Le crochet de commutation d'opérateurs d'ordre zéro est d'ordre 1 et son symbole principal est  $\frac{1}{i}$  fois le *crochet de Poisson* des symboles principaux.

L'opérateur de Schrödinger  $P(\hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ , à la base de (presque) toutes les questions qui motivent l'analyse semi-classique linéaire, n'entre

pas dans notre classe de symboles. En fait, il est bien connu que lorsque le potentiel  $V$  est confinant (ou même localement confinant) on peut pour un grand nombre de problèmes se ramener, au moyen d'une théorie pseudo-différentielle plus générale, à l'étude d'une troncature adéquate de  $P(\hbar)$  qui, elle, entrera dans notre classe (voir par exemple [35]). Il faut donc voir les résultats présentés dans ce mémoire comme intervenant à ce moment-là de l'analyse.

Pour davantage de détails sur les opérateurs pseudo-différentiels, je laisse au lecteur le soin de choisir sa référence préférée parmi par exemple [59, 22, 12].

### Microlocalisation et front d'onde

Toute théorie pseudo-différentielle va de pair avec une notion de *microlocalisation*, c'est-à-dire de localisation dans l'« espace des phases »  $M = T^*X$ . Il n'est pas aisé de comparer les différentes microlocalisations associées aux différentes classes de symboles; mais dans notre cas, où les objets classiques vivent dans des portions compactes de  $M$ , ces subtilités disparaissent.

La classe d'objets physiques (*fonctions d'onde*) que l'on pourra mesurer est définie par les observables à support compact: une distribution sur  $X$  à valeurs complexes (ou une demi-densité distribution)  $u_\hbar$  sera admissible si pour tout opérateur pseudo-différentiel  $P(\hbar)$  dont le noyau est à support compact,

$$\exists N \in \mathbb{Z}, \quad \|P(\hbar)u_\hbar\| = O(\hbar^N).$$

Les opérateurs pseudo-différentiels que nous avons définis étant des opérateurs continus dans  $L^2(X)$ , uniformément par rapport à  $\hbar$  (théorème de Calderon-Vaillancourt), les fonctions dans  $L^2(X)$  indépendantes de  $\hbar$  sont admissibles.

Un opérateur pseudo-différentiel  $P(\hbar)$  est dit *elliptique* en  $m \in M$  lorsque son symbole principal  $p$  ne s'annule pas en  $m$ . Sans entrer dans les détails, une fonction d'onde  $u_\hbar$  sera dite *négligeable* ou  $O(\hbar^\infty)$  en un point  $m \in M$  s'il existe un opérateur pseudo-différentiel  $P(\hbar)$  elliptique en  $m$  tel que

$$\|P(\hbar)u_\hbar\| = O(\hbar^\infty).$$

Le complémentaire des points où  $u_\hbar$  est négligeable est appelé le *microsupport* ou *front d'onde* de  $u_\hbar$ , et noté  $WF(u_\hbar)$ .

On en déduit que si  $P(\hbar)$  un pseudo-différentiel de symbole principal  $p$  et  $u_\hbar$  une fonction d'onde vérifiant  $P(\hbar)u_\hbar = O(\hbar^\infty)$ , alors

$$WF(u_\hbar) \subset p^{-1}(0). \quad (2)$$

La notion de microlocalisation est importante car elle permet de voir les fonctions d'onde comme les sections d'un pré-faisceau<sup>(5)</sup> au dessus de  $M$ , celui des distributions admissibles modulo celles qui sont négligeables. Le support d'une section est par définition son microsupport. C'est un (pré-)faisceau en  $\mathcal{D}$ -modules, où  $\mathcal{D}$  est l'anneau des opérateurs pseudo-différentiels modulo négligeables. On l'appellera le (pré-)faisceau des *microfonctions*.

## Opérateurs $\hbar$ -Intégraux de Fourier

Sans entrer dans les définitions techniques, je voudrais juste mentionner un point important qui n'est pas souvent explicite dans la littérature.

Soit  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne locale de  $M = T^*X$ . La restriction de  $\alpha$  à  $\Lambda$  est fermée; soit  $S$  une primitive locale:  $dS = \alpha$  vues comme 1-formes sur  $\Lambda$ . Un symbole elliptique oscillant sur  $\Lambda$  est une demi-densité sur  $\Lambda$  de la forme

$$\sigma(\lambda; \hbar) = e^{\frac{i}{\hbar}(c(\hbar) + S(\lambda)) + i\Phi(\lambda, \hbar)} \rho(\lambda),$$

où  $c(\hbar) \in S^0(\{0\})$  et  $\Phi \in S^0(\Lambda)$  sont des symboles classiques de terme principal réel, et  $\rho$  est une demi-densité strictement positive.

On voit en particulier que si  $\Lambda$  est une sous-variété lagrangienne quelconque de  $M$  munie d'une demi-densité  $\rho$ , il existe un symbole elliptique oscillant sur  $\Lambda$  si et seulement si la *classe de cohomologie* de de Rham  $[\alpha] \in H^1(\Lambda, \mathbb{R})$  est nulle.

Lorsque  $\Lambda$  est projetable sur  $X$ , un symbole oscillant donne lieu à une fonction oscillante sur  $X$ . Dans le cas général on lui associe une *intégrale oscillante* par la méthode de Maslov-Hörmander-Duistermaat.

Étant donnée une relation canonique  $\chi$  entre deux variétés symplectiques  $M = T^*X$  et  $M' = T^*X'$ , un *opérateur intégral de Fourier* est un opérateur linéaire de  $\Omega^{\frac{1}{2}}(X')$  dans  $\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$  admettant un noyau qui est une intégrale oscillante associée au graphe de  $\chi$  (qui est une sous-variété lagrangienne de  $M \times M'$  pour la forme symplectique « $\omega - \omega'$ »). Un tel opérateur existe si et seulement si la restriction de la 1-forme canonique « $\alpha - \alpha'$ » au graphe de  $\chi$  est cohomologiquement triviale. Si  $\chi$  est un symplectomorphisme de  $M$ , cela veut dire qu'en plus de préserver  $\omega$  il doit également préserver les intégrales de  $\alpha$  le long de tout chemin fermé — et cette condition ne dépend que de la classe d'homologie du chemin. Un tel symplectomorphisme sera appelé par la suite *exact*.

---

(5). Pour que le faisceau associé soit vraiment constitué de fonctions admissibles il faut rajouter une notion de « négligeabilité » globale. On peut le faire en compactifiant les fibres du cotangent [12]. Dans ce document, on ne fera pas la différence car on ne traitera ainsi que des parties compactes de  $M$ .

La raison pour laquelle cette remarque n'apparaît pas dans les travaux de Hörmander est que celui-ci considère la théorie dite *homogène*, sans petit paramètre  $\hbar$ . Or dans cette théorie, tous les symplectomorphismes sont exacts...

Mentionnons enfin que les opérateurs intégraux de Fourier se comportent bien vis-à-vis de la notion de front d'onde. En particulier on peut définir des opérateurs intégraux de Fourier associé à des symplectomorphismes restreints à des ouverts de  $M$  et  $M'$ , et c'est la topologie de ces ouverts qui interviendra.

### **Théorème d'Egorov**

Le résultat fondamental qu'on utilisera à volonté est que les opérateurs intégraux de Fourier sont des bons candidats à quantifier les relations canoniques. Le « théorème d'Egorov » affirme en effet que si  $U(\hbar)$  est un opérateur intégral de Fourier (microlocal) associé au symplectomorphisme  $\chi$  et  $P(\hbar)$  est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal  $p$ , alors  $U(\hbar)^{-1}P(\hbar)U(\hbar)$  est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal  $p \circ \chi^{-1}$ . Malgré la célébrité de ce théorème, dont on peut trouver la preuve par exemple dans [59, 12], il est difficile de trouver des renseignements concernant la transformation du symbole sous-principal. Le symbole sous-principal n'est en général pas équivariant, mais on peut vérifier la construction suivante : en chaque point  $m \in M$  soit  $\mathcal{C}_m$  la courbe intégrale du flot de  $p$  passant par  $m$ . On définit sur  $\mathcal{C}_m$  la 1-forme (fermée)  $\kappa_{\mathcal{C}_m}$  dite « sous-principale » par  $\kappa_{\mathcal{C}_m}(\mathcal{X}_p) = -p_1$ , où  $\mathcal{X}_p$  est le champ de vecteurs hamiltonien associé à  $p$  et  $p_1$  est le symbole sous-principal de  $P(\hbar)$ . (Ramenée en arrière par la paramétrisation du flot, c'est la 1-forme sur  $\mathbb{R}$  «  $-p_1 dt$  ».) Alors la conjugaison par un opérateur intégral de Fourier préserve la classe de cohomologie  $[\kappa_{\mathcal{C}_m}] \in H^1(\mathcal{C}_m, \mathbb{R})$ . Évidemment, cela n'apporte une information intéressante que lorsque  $\mathcal{C}_m$  est fermée : les intégrales du sous-principal le long des trajectoires périodiques de  $p$  sont invariantes par conjugaison. Dans le cas limite où  $m$  est un point fixe du flot, c'est bien la valeur du sous-principal en ce point qui est invariante.

Enfin comme Weinstein l'avait remarqué [88], étant donné un symplectomorphisme exact<sup>(6)</sup>  $\chi$ , il existe un opérateur intégral de Fourier associé qui laisse invariant le sous-principal de tous les  $P(\hbar)$  (c'est-à-dire ne fait que le transporter par  $\chi$ ). En réalité on peut trouver un  $U(\hbar)$  qui transforme la forme sous-principale en un autre représentant de sa classe de cohomologie en rajoutant à  $\kappa_{\mathcal{C}_m}$  la 1-forme  $df|_{\mathcal{C}_m}$  où  $f$  est une fonction fixée quelconque sur  $M$ . Savoir si tous les représentants de la classe de cohomologie sont atteints dépend a priori de la forme globale des trajectoires du flot. En particulier si  $p$  a un flot périodique on peut toujours conjuguer  $P(\hbar)$  par

---

(6). Weinstein ne le montre que pour un symplectomorphisme homogène (et donc exact) mais le résultat est encore valable dans le sens plus faible que j'ai introduit.

un opérateur intégral de Fourier pour rendre son symbole sous-principal constant sur chaque orbite.

Mentionnons déjà que cette 1-forme sous-principale joue un rôle important dans les systèmes complètement intégrables, puisqu'elle se généralise en une 1-forme fermée sur les feuilles du feuilletage lagrangien, et apparaît dans les conditions de quantification du spectre.

### Des axiomes ?

Les outils semi-classiques tels les opérateurs  $\hbar$ -pseudo-différentiels, les opérateurs intégraux de Fourier et le calcul symbolique qui va avec forment un ensemble très naturel dans un cadre abstrait de quantification à petit paramètre. Il est raisonnable de penser qu'un nombre limité d'axiomes permettrait de donner la base adéquate aux constructions qu'on expose ici. Ceci renforcerait d'ailleurs la conjecture que ces constructions s'adaptent *mutatis mutandis* au cas des variétés symplectiques compactes, tant les propriétés des opérateurs de Toeplitz sont similaires à celles des opérateurs pseudo-différentiels. Je laisse cette question axiomatique en suspens... pour le moment.



# Systèmes intégrables semi-classiques: du local au global

## 1 Local

Dans toute la théorie de systèmes dynamiques, la possibilité d'une analyse locale des solutions est évidemment cruciale, il n'y a pas lieu d'insister sur ce point. D'ailleurs je ne connais guère de branche des mathématiques qui ne profitent pas de procédés de localisation. Dans le domaine qui nous intéresse, l'analyse locale se fait en général au moyen de *formes normales* qui s'appliqueront aussi bien au système classique qu'à son homologue quantique. Avant d'énoncer ces différentes formes normales, il me semble intéressant de dire quelques mots de nature plus ou moins heuristique (et plus ou moins standard) sur la "philosophie" des formes normales.

### 1.1 Formes normales : un point de vue heuristique

Cette section expose des résultats de nature souvent heuristique. Néanmoins, certaines constructions sont parfaitement rigoureuses et seront réutilisées par la suite. Pour éviter toute confusion, les énoncés rigoureux seront tous repris explicitement dans une des sections suivantes.

**Que veut-on ?** — L'idée très générale d'une forme normale est la suivante : on a un groupe de transformations  $G$  agissant sur un ensemble  $X$ , et on se pose deux questions. D'abord, quelles sont les orbites de  $G$ ? En particulier quelles sont les "plus grosses" orbites, celles dans lesquelles risque de tomber un élément "générique" de  $X$ ? Enfin, et c'est souvent le plus important en pratique, quels sont les représentants les plus "simples" dans chaque orbite? Le théorème qu'on énonce alors est : « étant donné un élément  $x \in X$  ayant telles propriétés, alors il est dans telle orbite; il est donc l'image par un élément de  $G$  d'un élément  $x_0$  "simple" ».

Il faut remarquer que sous la terminologie de formes normales on englobe en réalité les problèmes de type *linéarisation* où les transformations sont du type "changement de coordonnées" avec les problèmes de *classification* où c'est l'orbite comme objet abstrait qui est mise en valeur.

Cette philosophie est mise en œuvre dans la théorie des singularités des fonctions différentiables. Par exemple,  $X$  est l'ensemble des germes de fonctions d'une variété  $(M, m)$  dans une autre  $(N, n)$ , et  $G = \text{Diff}(M, m) \times \text{Diff}(N, n)$  : on s'autorise des changements de variables à la source et au but.

Le théorème de Darboux est le premier exemple de forme normale locale en géométrie symplectique. L'ensemble  $X$  est alors celui des germes de formes symplectiques sur  $(M, m)$  et  $G$  est le groupe des germes de transfor-

mations canoniques. Là, il n’y a qu’une seule orbite... (ce qui ne sera plus le cas au niveau semi-global – voir la section suivante.)

**Algèbres de Lie** — Le cas de la géométrie hamiltonienne (classique ou quantique) est particulièrement plaisant puisqu’il entre – au moins formellement – dans la situation où  $G$  est un groupe de Lie agissant par l’action adjointe sur son algèbre de Lie  $X = \mathfrak{G}$ . (Plus généralement,  $G$  est un sous-groupe de  $\tilde{G}$  et agit sur l’algèbre de Lie de  $\tilde{G}$ .) Dans le cas classique, on pourra prendre pour  $G$  le groupe des symplectomorphismes locaux et  $X$  est alors l’algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens, qui s’identifie localement à l’algèbre de Poisson des fonctions lisses (modulo les constantes). Dans le cas quantique,  $G$  est le groupe des opérateurs unitaires agissant par conjugaison sur les opérateurs auto-adjoints. Pour faire du semi-classique il suffit de remarquer que l’ensemble de opérateurs intégraux de Fourier est bien le “groupe de Lie” des opérateurs pseudo-différentiels. Bien entendu tout ceci reste formel dans la mesure où groupes et algèbres considérés sont de dimensions infinies. Néanmoins on sait depuis longtemps faire fonctionner la machine lorsque l’algèbre  $X$  est vue comme limite projective de sous-algèbres de dimension finie (telle l’algèbre  $C^\infty(M, m)$  au moyen de la graduation donnée par les troncatures de la série de Taylor). Le groupe  $G$  n’est alors jamais utilisé directement mais seulement ses approximations de dimensions finies. C’est le cas notamment de ce qu’on appelle la *forme normale de Birkhoff*. Une approche des formes normales dans cet esprit est donnée par exemple dans la thèse de Broer [7] ou dans le dernier chapitre de ma thèse [78]. Elle se révèle extrêmement fructueuse aussi bien en mécanique classique qu’en mécanique semi-classique, comme en témoignent par exemple les travaux de Sjöstrand [64] ou de Zelditch [92, 93].

**La “variété” des tous les systèmes intégrables** — Venons-en maintenant plus précisément au problème des systèmes intégrables. Par une construction toujours formelle (mais qui peut se réaliser par approximations de dimensions finies – voir par exemple une variante dans [67] – ainsi que dans un cadre purement algébrique – on trouve une construction proche dans [63, 31]) il est joli de voir comment les équations à résoudre peuvent s’interpréter en termes de cohomologie d’algèbres de Lie.

Qu’est-ce qu’un système complètement intégrable ? Plusieurs notions sont possibles, selon qu’on s’intéresse à un Hamiltonien particulier, à un ensemble d’intégrales en involution, à la fibration singulière associée, au feuilletage lagrangien correspondant, ou même à une feuille particulière de ce feuilletage. Pour chacun de ces cas la question de la classification se pose différemment et les réponses sont bien entendu diverses. Modulo ces variantes, notre vision est assez proche des références [13, 67, 63, 31].

On note  $G$  le groupe des (germes de) difféomorphismes symplectiques de  $(M, m)$ , et son algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  est vue comme l'algèbre de Poisson des (germes de) fonctions lisses sur  $M$  modulo les constantes. Comme on veut contrôler les constantes (on veut savoir si deux fonctions commutent, pas si le crochet est constant) on va travailler sur l'algèbre de Poisson un peu plus grosse des germes de fonctions lisses sur  $M$ :  $X = C^\infty(M, m)$  (on peut remplacer  $C^\infty$  par analytique).

On s'intéressera dans ce texte particulièrement au *feuilletage lagrangien* défini par un système complètement intégrable. Un système complètement intégrable est donné par une *sous-algèbre abélienne* de  $X$  de dimension  $n$ , c'est-à-dire un espace vectoriel  $\mathbf{f}$  engendré par  $n$  fonctions en involution  $f_1, \dots, f_n$  dont les différentielles sont *presque partout indépendantes*. Le feuilletage (singulier) associé est l'ensemble des fibres  $\{f_i = \text{const}_i\}$ ; il est bien sûr indépendant du choix de la base de  $\mathbf{f}$ . À quelles conditions dirons-nous que deux telles algèbres définissent le même feuilletage local? Comme on le verra bientôt (proposition 1.7), la réponse est facile lorsque le feuilletage est *régulier*: deux telles sous-algèbres  $\mathbf{f} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$  et  $\mathbf{g} = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$  ont le même feuilletage si et seulement s'il existe un difféomorphisme local  $\chi$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$(g_1, \dots, g_n) = \chi(f_1, \dots, f_n).$$

Il serait tentant de reprendre la même définition pour les feuilletages singuliers, et c'est ce qui est fait en général dans le cadre algébrique [75, 31]. Malheureusement, cela empêcherait d'avoir la linéarisation symplectique locale  $C^\infty$  des singularités comprenant, entre autres, des blocs hyperboliques (voir le théorème d'Eliasson 1.15). On dira donc seulement que  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  ont le même feuilletage local près d'un point  $m$  (et on notera  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ ) si et seulement si les éléments de  $\mathbf{f}$  sont constants le long des feuilles de  $\mathbf{g}$ , ce qui dans le cas lagrangien s'écrit de façon symétrique

$$\{f_i, g_j\} = 0 \text{ près de } m, \quad \forall i, j.$$

Lorsque  $m$  est régulier pour  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$ , cette condition est équivalente à la précédente (c'est encore une conséquence de Darboux-Carathéodory). Si on note  $C_{\mathbf{f}} = \{h \in C^\infty(M, m), \{h, \mathbf{f}\} = 0\}$  le *commutant (local) de  $\mathbf{f}$* , cette condition s'écrit  $\mathbf{g} \subset C_{\mathbf{f}}$  ou de façon équivalente  $\mathbf{f} \subset C_{\mathbf{g}}$ . Par l'identité de Jacobi,  $C_{\mathbf{f}}$  est une sous-algèbre de Lie de  $X$ . Le point essentiel lorsque les différentielles des  $f_i$  (ou des  $g_i$ ) sont presque partout indépendantes (on dit parfois que le feuilletage associé est presque régulier) est alors que  $C_{\mathbf{f}}$  est *abélienne* (proposition 1.5). Cela implique en particulier

$$(\mathbf{f} \sim \mathbf{g}) \iff (C_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{g}}). \quad (3)$$

On peut arguer que cette définition est trop faible, car elle oublie un certain nombre d'information sur la structure locale des générateurs de  $\mathbf{f}$  ou  $\mathbf{g}$ .

Par exemple le feuilletage (a priori régulier) des droites horizontales de  $\mathbb{R}^2 = \{x, \xi\}$  peut être défini (entre autres) par les fonctions  $\xi$  ou  $\xi^3$ . Selon la définition 3, on a  $\xi \sim \xi^3$ . Si l'on n'admet pas cela, on peut introduire une notion plus forte insistant sur la notion de générateurs: on dira que  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont *fortement équivalents* lorsqu'ils engendrent le même  $C_{\mathbf{f}}$  (ou  $C_{\mathbf{g}}$ )-module; plus précisément, l'équivalence forte en un point  $m$  est donnée par l'égalité suivante, pour des fonctions définies au voisinage de  $m$ :

$$(\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}) \iff (C_{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}(m)) = C_{\mathbf{g}} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}(m))). \quad (4)$$

(Au membre de droite, le point  $(\cdot)$  indique la multiplication standard des fonctions. On a fait l'abus de notation d'identifier les algèbres  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  avec une de leurs bases. Le résultat est bien sûr indépendant d'un tel choix de base.) On voit facilement que l'équivalence forte  $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$  implique l'équivalence faible  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ . Comme on le verra plus tard, deux algèbres  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont fortement équivalentes si et seulement si elles ont le même type de singularités, en un sens précisé au lemme (1.13). En fait, c'est l'équivalence associée à l'action du groupe  $GL(n, C_{\mathbf{f}})$  des germes de matrices inversibles à coefficients dans  $C_{\mathbf{f}}$ :

$$(\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}) \iff \exists N \in GL(n, C_{\mathbf{f}}), \quad \mathbf{f} - \mathbf{f}(m) = N \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}(m)). \quad (5)$$

Lorsque  $m$  est régulier pour  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  les deux équivalences coïncident. On verra que c'est encore le cas si  $m$  est un point singulier *non-dégénéré* au sens d'Eliasson (voir section 1.3).

Exposons maintenant la construction formelle annoncée. Si  $L_0 \simeq \mathbb{R}^n$  est l'algèbre de Lie commutative de dimension  $n$  type, l'ensemble  $\mathcal{CI}_r^1$  de toutes les sous-algèbres de  $X$  définissant un système complètement intégrable est un "ouvert dense" de l'espace des homomorphismes de Lie de  $L_0$  dans  $X$ . L'espace de modules de tous les feuilletages complètement intégrables est alors par définition

$$\mathcal{FI} = \mathcal{CI}_r^1 / \sim.$$

L'équivalence utilisée ici (et dans la suite de cette discussion) est, au choix, l'équivalence faible ou l'équivalence forte. Les différences seront mentionnées en lieu utile.

Soit  $\mathcal{C}^1 = (\mathbb{R}^n)^* \otimes X = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, X)$  l'espace des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $X$ . Il est pratique de voir un élément  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$  comme une 1-forme constante sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $X$ . La considérant maintenant comme une 1-forme de connexion sur un éventuel (?) fibré principal, il est naturel d'introduire sa courbure: si  $\mathbf{f} = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ , alors

$$\kappa(\mathbf{f}) = \sum_{i < j} \{f_i, f_j\} dx_i \wedge dx_j.$$

Notons encore  $\mathcal{C}_r^1 \subset \mathcal{C}^1$  l'“ouvert dense” des  $\mathbf{f}$  telles que les différentielles des  $f_i$  sont presque partout indépendantes et soit  $\tilde{\kappa}$  la restriction de  $\kappa$  à  $\mathcal{C}_r^1$ ; alors  $\mathcal{CI}_r^1 = \tilde{\kappa}^{-1}(0)$ . Donc

$$\mathcal{FI} = \tilde{\kappa}^{-1}(0) / \sim .$$

Il est clair que  $\mathcal{FI}$  est un espace singulier. Par exemple lorsqu'on restreint tout aux fonctions quadratiques (et donc aux champs hamiltoniens linéaires),  $\mathcal{FI}$  est une variété algébrique composée de strates lisses de différentes dimensions.

Regardons maintenant ce que l'on peut dire en général au voisinage d'un système donné. Soit donc  $[\mathbf{f}] \in \mathcal{FI}$  un feuilletage complètement intégrable. Soit  $\mathbf{f}$  un représentant :  $\mathbf{f}$  est un homomorphisme de Lie de  $L_0$  dans  $X$ . On peut ainsi faire agir  $L_0$  sur  $X$  par représentation adjointe :  $L_0 \times X \ni (\ell, g) \rightarrow \{\mathbf{f}(\ell), g\} \in X$ , ce qui fait de  $X$  un  $L_0$ -module. Il est naturel de penser à introduire le complexe de Chevalley-Eilenberg associé (au moins jusqu'en degré 2) :  $C^q(L_0, X) = \text{Hom}(L_0^{\wedge q}, X)$  est l'espace des application  $q$ -linéaires alternées de  $L_0$  dans  $X$ , ces derniers étant vus comme simples espaces vectoriels (et on convient que  $C^0(L_0, X) = X$ ). On note  $d_{\mathbf{f}}$  la différentielle associée.

Notons  $\mathcal{O}_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{f}}$  si l'on s'intéresse à l'équivalence faible et au contraire  $\mathcal{O}_{\mathbf{f}} = \mathbb{R}^n \oplus C_{\mathbf{f}}(\mathbf{f} - \mathbf{f}(m))$  dans le cas de l'équivalence forte ( $\mathbb{R}^n$  désigne ici les applications constantes :  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ). L'espace  $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$  est toujours une sous-algèbre de Lie-Poisson commutative de  $X$ . Puisque  $L_0$  agit trivialement sur  $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ , l'algèbre de Lie quotient  $X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$  se voit munie d'une structure de  $L_0$ -module. On définit le nouveau complexe de Chevalley-Eilenberg associé :  $C^q(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) = \text{Hom}(L_0^{\wedge q}, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$  est l'espace des application  $q$ -linéaires alternées de  $L_0$  dans  $X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}$ , muni de la différentielle notée  $\bar{d}_{\mathbf{f}}$ . Ceci étant posé, le “complexe” qui semble le plus adapté est une mixture de  $C^\bullet(L_0, X)$  et  $C^\bullet(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$  (complexe est un terme un peu pédant puisqu'on ne s'intéressera qu'aux termes de degré 1... Mais malgré tout il semble qu'on puisse donner un sens aux autres degrés : voir [63]). Le complexe en question, noté  $C^\bullet(\mathbf{f})$ , est le suivant :

$$0 \longrightarrow X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}} \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} C^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} C^2(L_0, X) \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} C^3(L_0, X) \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} \dots$$

où  $\partial_{\mathbf{f}}$  est défini par le diagramme suivant, où tous les petits triangles sont commutatifs ( $C^k(L_0, \mathcal{O}_{\mathbf{f}})$  est toujours dans le noyau de  $d_{\mathbf{f}}$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} & C^1(L_0, X) & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} & C^2(L_0, X) & \xrightarrow{d_{\mathbf{f}}} & \dots \\ & & \pi \downarrow & \nearrow \partial_{\mathbf{f}} & \pi \downarrow & \nearrow \partial_{\mathbf{f}} & \pi \downarrow & \nearrow \partial_{\mathbf{f}} & \\ 0 & \longrightarrow & X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}} & \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} & C^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) & \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} & C^2(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) & \xrightarrow{\bar{d}_{\mathbf{f}}} & \dots \end{array}$$

(Les complexes s'arrêtent bien sûr en degré  $n$ :  $C^{\geq n+1}(L_0, \cdot) = 0$ ). Les co-cycles et cobords sont notés de façon standard: par exemple  $Z^k(L_0, X)$ ,  $B^k(L_0, X/\mathcal{O}_f)$  et  $B^k(\mathbf{f})$ . Les espaces de cohomologie sont notés  $H^k(\cdot)$ . On a alors la description formelle de l'espace tangent à  $\mathcal{FI}$  en  $[\mathbf{f}]$ :

$$T_{[\mathbf{f}]} \mathcal{FI} = Z^1(\mathbf{f}) = Z^1(L_0, X)/Z^1(L_0, \mathcal{O}_f). \quad (6)$$

En effet le  $\partial_f$  d'une 1-cochaîne  $\alpha \in C^1(L_0, X/\mathcal{O}_f)$  s'écrit

$$\partial_f \alpha(g, h) = \{\mathbf{f}(g), \alpha(h)\} - \{\mathbf{f}(h), \alpha(g)\},$$

alors que l'application linéaire tangente à  $\kappa$  est

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{f}} \kappa : \mathcal{C}^1 &\rightarrow \wedge^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes X \\ g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n &\mapsto \sum_{i < j} (\{g_i, f_j\} + \{f_i, g_j\}) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Donc quitte à munir  $L_0$  d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  qui l'identifie à  $\mathbb{R}^n$  et à poser  $f_i = \mathbf{f}(e_i)$  (et  $\alpha(e_i) = g_i$ ), on voit que

$$Z^1(\mathbf{f}) = \ker T_{\mathbf{f}} \kappa / \mathcal{O}_f,$$

qui est bien l'"espace tangent" formel de  $\mathcal{FI}$ .

Supposons un moment qu'on se restreigne aux feuilletages réguliers; on peut grâce au théorème de Darboux-Carathéodory 1.2 introduire des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  symplectiquement conjuguées aux  $(f_1, \dots, f_n)$  et identifier un élément de  $C^k(L_0, X)$  à une  $k$ -forme différentielle sur  $M$ ; par exemple pour les 1-formes:  $(g_1, \dots, g_n) \mapsto g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n$ . La différentielle  $d_f$  est alors la différentielle extérieure standard par rapport aux variables  $x$  (c'est-à-dire restreinte aux feuilles du feuilletage). Le choix d'une petite surface  $\Sigma$  transverse au feuilletage en  $m$  permet donc d'identifier  $Z^1(L_0, X)$  aux applications lisses  $\Sigma \ni \sigma \rightarrow Z^1_{\text{dRh}}(\Lambda_\sigma, \mathbb{R})$ , où  $\Lambda_\sigma$  est la feuille locale contenant  $\sigma$ . On retrouve ainsi la description de Weinstein de l'espace des sous-variétés lagrangiennes [90].

Comme on va le voir,  $B^1(\mathbf{f})$  et  $H^1(\mathbf{f})$  ont également une interprétation géométrique.

**Retour aux formes normales** — Considérons maintenant l'action du groupe  $G$  des difféomorphismes symplectiques (locaux).  $G$  agissant naturellement sur  $X$  en respectant la structure de Poisson, il agit également sur  $\mathcal{CI}_r^1$ . En outre l'action de  $G$  étant compatible avec la relation d'équivalence (faible ou forte)  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ , elle se restreint naturellement au quotient  $\mathcal{FI}$ . Soit  $[\mathbf{f}] \in \mathcal{FI}$  et notons  $G([\mathbf{f}])$  son orbite (locale) sous l'action de  $G$ . L'espace tangent  $T_{[\mathbf{f}]} G([\mathbf{f}])$  est formellement l'orbite de  $[\mathbf{f}]$  sous l'action adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  ou  $X$ :

$$T_{[\mathbf{f}]} G([\mathbf{f}]) = \{L_0 \ni \ell \rightarrow \{h, \mathbf{f}(\ell)\} \pmod{\mathcal{O}_f} \mid h \in X\}.$$

Autrement dit,

$$T_{[\mathbf{f}]}G([\mathbf{f}]) = B^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}}) = B^1(\mathbf{f}).$$

L'espace de cohomologie  $H^1(\mathbf{f})$  est donc vu comme l'espace *normal* à l'orbite de  $[\mathbf{f}]$  sous  $G$ .

Or une forme normale pour  $\mathbf{f}$  est un système  $\mathbf{f}_0$  tel qu'il existe une transformation  $g \in G$  telle que

$$g^*\mathbf{f} \sim \mathbf{f}_0. \quad (7)$$

Donc par une coïncidence lexicale inappropriée  $H^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}})$  qui est l'espace normal contient les directions *ne pointant pas* vers des formes normales pour  $\mathbf{f}$ . En langage algébrique c'est l'espace des déformations infinitésimales (non triviales) de  $[\mathbf{f}]$ ; en termes de singulariste, cela représente la versalité de  $[\mathbf{f}]$ .

**Méthode de Moser et équation cohomologique** — Supposons qu'on veuille prouver une forme normale du type (7). Suivant l'idée de la fameuse *méthode de Moser* [56], appliquée à notre contexte, on peut être tenté de construire *a priori* un chemin différentiable  $\mathbf{f}_t$  reliant  $\mathbf{f}_0$  à  $\mathbf{f}$  et à chercher un chemin associé  $g_t$  dans le groupe  $G$  vérifiant  $g_0 = Id$  et

$$\forall t \in [0,1], \quad g_t.\mathbf{f}_t \sim \mathbf{f}_0.$$

Ainsi, la transformation  $g_1$  répondra à la question. Une condition nécessaire pour espérer appliquer cette méthode est évidemment que  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}$  soient dans la même classe d'"homotopie" (et même d'isotopie). L'étape préliminaire est donc de trouver une classification grossière permettant de distinguer les classes d'isotopies. Ceci étant réglé, on différentie par rapport à  $t$  pour obtenir une équation dans l'espace tangent à  $\mathcal{FI}$  en  $[\mathbf{f}_0]$ :

$$\frac{d}{dt}(g_t.\mathbf{f}_t) \in Z^1(L_0, \mathcal{O}_{\mathbf{f}_0}),$$

qui s'écrit encore

$$\{\mathbf{f}_0, S_t\} + \frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t) \circ g_t \in \mathcal{O}_{\mathbf{f}_0},$$

où  $S_t$  est le Hamiltonien associé au flot de  $g_t^{-1}$ . En termes cohomologiques, il s'agit de résoudre

$$d_{\mathbf{f}_0} S_t = -\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t) \circ g_t \in Z^1(L_0, X/\mathcal{O}_{\mathbf{f}_0}).$$

Il est en général difficile de résoudre directement cette équation, même si dans un certain nombre de cas des astuces existent. Les formules telles qu'elles sont écrites ici ne servent en général que dans un cadre formel. En effet, on est très souvent amené à considérer dans un premier temps

l'équation à  $t = 0$  (par exemple si l'on cherche une solution formelle en  $t$  — ou en  $\hbar$ , dans le cas semi-classique), qui devient

$$d_{\mathbf{f}_0} S_0 = -\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t)|_{t=0}.$$

Autrement dit, on cherche à montrer que le cocycle  $-\frac{d}{dt}(\mathbf{f}_t)|_{t=0}$  est un cobord. Cette équation s'appelle *l'équation cohomologique*. On trouve parfois aussi le terme d'équation homologique. En optique géométrique, elle correspond à une équation de transport.

En réalité je ne connais pas d'exemple de méthode de Moser *directe* pour normaliser un système complètement intégrable lorsqu'on quitte la catégorie formelle. Le problème est peut-être qu'il est difficile de trouver a priori un chemin simple  $\mathbf{f}_t$  (l'interpolation linéaire ne marche pas :  $\mathcal{FI}$  n'est pas un ouvert d'un espace vectoriel). On procède souvent en deux temps; d'abord, on obtient une forme normale sous l'action du groupe plus gros de tous les difféomorphismes, et ceci par des constructions géométriques souvent à base d'algèbre linéaire. Enfin, on applique la méthode de Moser pour "symplectifier" la forme normale obtenue, ce qui consiste à envoyer la forme symplectique déformée sur la forme symplectique initiale par un difféomorphisme qui respecte le feuilletage. On a gagné en particulier le fait que l'espace des formes symplectiques est, lui, un ouvert d'un espace vectoriel. Une telle méthode est utilisée par exemple dans [6, 29].



## 1.2 Points réguliers

Soit  $M$  une variété symplectique de dimension  $2n$ , et  $(f_1, \dots, f_n)$  un système complètement intégrable sur  $M$ :  $f_i \in C^\infty(M)$  et  $\{f_i, f_j\} = 0$ . Soit  $F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application moment.

**Définition 1.1** Un point  $m \in M$  est dit **régulier** pour  $F$  si  $dF(m)$  est de rang maximal ( $n$ ). Autrement dit,  $df_1 \wedge \dots \wedge df_n(m) \neq 0$ .

Par le théorème de submersion locale, les fibres  $F^{-1}(c)$  pour  $c$  proche de  $F(m)$  sont localement des sous-variétés de dimension  $n$  près d'un point régulier  $m$ . La structure locale des points réguliers des systèmes complètement intégrable est très simple. Elle est en fait entièrement décrite par le théorème classique suivant :

**Théorème 1.2 (Darboux-Carathéodory)** Si  $m$  est régulier,  $F$  est symplectiquement conjuguée près de  $m$  à la fibration linéaire  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sur l'espace symplectique linéaire  $\mathbb{R}^{2n}$  muni des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  et de la forme symplectique canonique  $\sum_i d\xi_i \wedge dx_i$ .

Autrement dit, il existe des fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sur  $M$  telles que

$$(\phi_1, \dots, \phi_n, f_1, \dots, f_n)$$

soit un système de coordonnées canoniques au voisinage de  $m$ .

**Démonstration.** Au voisinage de  $m$ , le feuilletage associé au système est lagrangien et régulier; on peut donc trouver une section locale  $\Sigma$  lagrangienne et transverse au point  $m$  (pour cela il suffit du théorème de Darboux classique et d'un peu d'algèbre linéaire). Les fonctions  $(f_1, \dots, f_n)$  définissent une action locale  $\varphi_{(t_1, \dots, t_n)}$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $M$ , agissant localement librement sur chaque feuille. On choisit  $\phi_1(p), \dots, \phi_n(p)$  comme étant les temps nécessaires à cette action pour arriver en  $p$  partant sur  $\Sigma$ . On a donc  $\{f_i, \phi_i\} = 1$ . Enfin les sous-variétés  $\phi = \text{const}$  étant les images d'une lagrangienne par un flot symplectique sont elles-mêmes lagrangiennes, ce qui assure  $\{\phi_i, \phi_j\} = 0$ .  $\square$

En tout logique, le nom de Liouville devrait être associé à ce théorème, puisque bien avant Darboux et Carathéodory, Liouville donne une formule explicite et très jolie pour les fonctions  $\phi_i$ . Ce résultat publié en 1855 [45] fournit une résolution locale du flot de tout Hamiltonien complètement intégrable (et éventuellement dépendant du temps) en un point régulier du feuilletage en terme de la fameuse 1-forme de Liouville  $\sum_i \xi_i dx_i$ . En ce sens il implique le théorème de Darboux-Carathéodory comme corollaire, même si la formulation de Liouville est plus compliquée. Pour d'autres détails et une preuve du théorème de Liouville, voir [84].

Le théorème de Darboux-Carathéodory permet de répondre à un certain nombre de questions évoquées au paragraphe précédent (1.1). Rappelons-les brièvement.

**Définition 1.3** Soit  $\mathbf{f} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$  un système complètement intégrable. Le **commutant** de  $\mathbf{f}$  est l'ensemble des fonctions commutant avec toutes les  $f_i$ . On le note  $C_{\mathbf{f}}$ .

Il faut préciser qu'on verra en général  $C_{\mathbf{f}}$  comme un (pré-)faisceau, dans le sens où on parlera du commutant « sur un ouvert », en signifiant que la propriété de commutation n'est requise que sur cet ouvert.

**Lemme 1.4** Localement près d'un point régulier,  $C_{\mathbf{f}}$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ , où  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer Darboux-Carathéodory.  $\square$

**Proposition 1.5**  $C_{\mathbf{f}}$  est une algèbre de Lie-Poisson commutative.

**Démonstration.** C'est une algèbre de Lie en vertu de l'identité de Jacobi. C'est une algèbre de Poisson grâce à l'identité de Leibniz. Par le lemme précédent, elle est commutative au voisinage des points réguliers, donc partout.  $\square$

**Définition 1.6** On dit que deux systèmes complètement intégrables  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont *faiblement équivalents*, et on note  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ , lorsque  $C_{\mathbf{f}} = C_{\mathbf{g}}$ . C'est équivalent à  $\mathbf{f} \subset C_{\mathbf{g}}$ .

La dernière assertion découle de la proposition 1.5. Le lemme 1.4 implique la caractérisation suivante, qui sera fautive dans le cas singulier :

**Proposition 1.7** Si  $m$  est régulier pour  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$ , alors ils sont équivalents si et seulement si  $(f_1, \dots, f_n) = \varphi(g_1, \dots, g_n)$ , où  $\varphi$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans ce cas, l'équivalence faible est identique à l'équivalence forte (voir le paragraphe 1.3 plus bas).

Enfin, le théorème de Darboux-Carathéodory justifie le lien expliqué au paragraphe 1.1 entre les complexes de déformation associés à  $\mathbf{f}$  et le complexe de de Rham sur les feuilles lagrangiennes. En particulier, au voisinage d'un point régulier,  $H^1(\mathbf{f}) = 0$ .

**Semi-classique** — Le théorème de Darboux-Carathéodory admet un analogue semi-classique tout aussi simple mais tout aussi efficace. Sa première démonstration dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels homogènes est due à Colin de Verdière [10] (même si le cas  $n = 1$  est déjà traité par Duistermaat et Hörmander [26]).

On se donne  $n$  opérateurs  $\hbar$ -pseudo-différentiels  $P_1, \dots, P_n$  sur  $M = T^*X$  qui commutent deux à deux (globalement, où microlocalement dans un ouvert :  $[P_i, P_j] = O(\hbar^\infty)$ ). On note maintenant  $p$  l'application moment classique correspondant aux symboles principaux  $p_j$ , tandis que

$$P = (P_1, \dots, P_n)$$

est appelée application moment quantique, ou fibration quantique.

**Théorème 1.8** Si  $m$  est régulier,  $P$  est microlocalement conjuguée près de  $m$  à la fibration  $(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_n})$  agissant sur  $\mathbb{R}^n$

Autrement dit, il existe un opérateur intégral de Fourier  $U$  défini près de  $m$  et microlocalement unitaire tel que  $UP_jU^{-1} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$  microlocalement près de  $m$ .

**Démonstration.** Soit  $\chi$  le symplectomorphisme donné par le théorème de Darboux-Carathéodory, et  $U_0$  un opérateur intégral de Fourier le quantifiant près de  $m$ . Le résultat est ainsi obtenu modulo des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre  $\hbar$ . Pour corriger cette erreur on conjugue de nouveau par un opérateur pseudo-différentiel de la forme  $\exp(iA)$ , où  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel. Comme on ne désire qu'un résultat microlocal (à  $O(\hbar^\infty)$  près), il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de  $m$  dans lequel on peut résoudre à tout ordre en  $\hbar$ , ce qui est un simple exercice.  $\square$

**Remarque 1.9** Il n'est pas nécessaire que  $P$  soit auto-adjointe. À partir du moment où le symbole principal  $p$  est réel, le théorème s'applique encore, mais le caractère unitaire de  $U(\hbar)$  est perdu.  $\triangle$

En relation avec la théorie générale des formes normales racontée au paragraphe 1.1, on observe les quatre faits suivants : 1. ici, on ne désire pas autoriser d'équivalences entre deux fibrations : le symbole  $\sim$  est trivial; 2. le problème est bien posé (car il est formel) dans le cadre « action d'une algèbre de Lie par représentation adjointe »; 3. l'équation cohomologique, ne faisant intervenir qu'un ordre en  $\hbar$  à la fois, est en réalité une équation classique sur les symboles principaux; 4. la cohomologie associée est ici isomorphe à la cohomologie de de Rham, et donc localement triviale : l'équation cohomologique est toujours résoluble. (Le fait qu'il existe un voisinage universel provient par exemple de la formule de Poincaré pour intégrer une forme fermée.)

De ce point de vue on voit que la démonstration (non détaillée ici) suit parfaitement le schéma abstrait des formes normales, même s'il est probablement bien plus court et plus simple de l'écrire directement. Je dis « probablement » car il faut tout de même se rendre compte que le membre de droite des  $n$  équations que l'on obtient correspond simplement à une 1-forme fermée, ce qui est déjà une géométrisation du problème...

Dans la suite des événements, les points 2. et 3. seront toujours vérifiés (voir le théorème 1.10 ci-dessous); plus subtils seront les analogues des points 1. et 4.

Le théorème de Darboux-Carathéodory semi-classique permet d'introduire de façon parfaitement parallèle au cas classique les notions d'équivalences de feuilletages. En bref, on note  $\mathbf{P}$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  engendré par les  $P_i$ . Le commutant semi-classique  $C_{\mathbf{P}}$  est l'ensemble des opérateurs commutant avec les  $P_i$  (éventuellement microlocalement sur un ouvert). On montre alors que  $C_{\mathbf{P}}$  est une algèbre de Lie-Poisson commutative [81]. Deux systèmes  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont dits faiblement équivalents lorsqu'ils ont même commutant. Au voisinage de points réguliers pour les deux, cela revient à dire qu'il existe un symbole classique local  $\varphi \in S^0(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , dont le terme principal est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$ , tel que  $P = \varphi(Q)$  microlocalement près de  $m$ .

On peut même aller plus loin et introduire le complexe de déformation associé à un système complètement intégrable  $\mathbf{P}$ . Si  $\hat{X}$  désigne le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels à symboles classiques et de degré maximum zéro modulo équivalence microlocale, on voit  $\mathbf{P}$  comme une représentation de l'algèbre de Lie commutative type  $L_0$  dans  $\hat{X}$  (agissant par crochet  $S \rightarrow \frac{i}{\hbar}[P_j, S]$ ), ce qui fait de  $\hat{X}$  ou  $\hat{X}/C_{\mathbf{P}}$  un  $L_0$ -module. On définit comme au paragraphe 1.1 les complexes associés et le complexe mixte  $C^\bullet(\mathbf{P})$ . Soit  $\mathbf{p}$  le système classique correspondant aux symboles principaux de  $\mathbf{P}$ . On montre alors le résultat suivant :

**Théorème 1.10** *Si  $H^1(\mathbf{p}) = 0$  et la restriction du symbole principal  $\sigma_0 : C_{\mathbf{P}} \rightarrow C_{\mathbf{p}}$  est surjective, alors  $H^1(\mathbf{P}) = 0$ .*

Par la version classique de Darboux-Carathéodory, on voit que les hy-

pothèses sont vérifiées au voisinage d'un point régulier. Ce théorème permet de comprendre pourquoi les formes normales qu'on décrit dans ce mémoire et qui sont stables dans le sens où le  $H^1$  qui intervient est trivial donnent toujours lieu à leur analogue semi-classique.

L'hypothèse sur la surjectivité du symbole principal est cruciale mais semble un peu technique. Elle sera vérifiée dans les cas qu'on rencontrera, mais je n'ai pas d'argument général à son sujet. Il serait certainement intéressant de s'y attarder davantage.

**Solutions microlocales** — Parmi les autres (multiples) applications du théorème de Darboux-Carathéodory, on s'intéressera particulièrement au fait qu'il permet de décrire l'espace des *solutions microlocales* de  $P$  agissant sur le faisceau des microfonctions.

**Proposition 1.11 ([80])** *Si  $m$  est un point régulier, l'espace des solutions microlocale du système*

$$P_i u_{\hbar} = O(\hbar^\infty) \quad \text{près de } m$$

*est un  $\mathbb{C}_{\hbar}$ -module de rang 1, engendré par  $U^{-1}1_m$ , où  $U$  est un opérateur intégral de Fourier comme dans le théorème 1.8 et  $1_m$  une fonction d'onde microlocalement égale à 1 près de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .*

En d'autres termes, les solutions sont forcément du type "BKW" : des distributions associées à une lagrangienne; en l'occurrence il s'agit de la sous-variété lagrangienne engendrée par le flot des  $p_i$ , et plus précisément la feuille  $\cap_i p_i = 0$ . On retrouve ainsi la propriété fondamentale du microsupport (2). Une conséquence importante de cette proposition est que le microsupport est invariant par le flot hamiltonien.

**Forme sous-principale** — Soit  $(P_1, \dots, P_n)$  un système complètement intégrable quantique, et  $p = (p_1, \dots, p_n)$  l'application moment classique correspondante. Soit  $\Lambda_c$  une composante connexe de la fibre  $p^{-1}(c)$ . On définit sur les points réguliers de  $\Lambda_c$  une 1-forme  $\kappa_c$  dite *sous-principale* par

$$\kappa_c(\mathcal{X}_{p_j}) = -r_j, \tag{8}$$

où  $r_j$  est le symbole sous-principal de  $P_j$ . On voit facilement (par exemple par le théorème de Darboux-Carathéodory), que  $\kappa_c$  est *fermée*. En outre, si on conjugue les  $P_j$  par un opérateur intégral de Fourier,  $\kappa_c$  est modifiée par l'addition d'une 1-forme *exacte*. On verra comment la classe de cohomologie de  $\kappa_c$  (ou éventuellement une variante désingularisée) intervient dans les conditions de quantifications de Bohr-Sommerfeld.

### 1.3 Points singuliers

La théorie des singularités des systèmes intégrables (même classiques) n'est certainement pas achevée. Je présente ici ma vision personnelle de

l'état de l'art et ma contribution à celui-ci.

L'étude des singularités des systèmes intégrables est fondamentale pour diverses raisons. En premier lieu, de par la façon même dont on se donne un système intégrable :  $n$  fonctions sur une variété, on s'attend (sauf cas exceptionnels) à la présence automatique de singularités. D'autre part, ces fonctions définissent un système dynamique tel que leurs singularités correspondent aux points fixes et aux équilibres relatifs du système, qui sont bien entendu une des caractéristiques principales de la dynamique. D'un point de vue semi-classique, on sait en outre que les fonctions d'ondes importantes comme les fonctions propres du système ont un microsupport invariant par la dynamique classique; donc, d'une certaine façon que je ne détaillerai pas (il faut parler de mesure semi-classique), celles qui sont associées à une lagrangienne critique se concentrent autour des singularités hyperboliques (voir par exemple [14] et les travaux de Toth [71]). Cette concentration se manifeste d'un part par la croissance de la norme des fonctions propres (voir par exemple [72]) et d'autre part par l'augmentation de la densité locale des valeurs propres (voir la figure 5 plus loin et les articles [15, 80, 18]).

**Feuilletages singuliers** — On peut étudier les singularités d'un système hamiltonien soit par l'étude du flot des champs de vecteurs — c'est l'aspect « système dynamique » soit par celle des fonctions hamiltoniennes qui le définissent — c'est l'aspect « feuilletage ». Dans le cas des systèmes complètement intégrables, les deux aspects sont équivalents car les champs de vecteurs des  $n$  fonctions  $f_1, \dots, f_n$  forment une base des espaces tangents des feuilles du feuilletage  $f_i = \text{const}_i$ , au moins aux points réguliers. J'aurais toujours tendance à privilégier l'étude du feuilletage qui met davantage en évidence la géométrie du problème.

Cependant, les feuillets qui nous intéressent sont *singuliers*, et la notion même de feuilletage singulier est assez délicate. De façon générale, ces feuillets sont du type de Stefan-Süßmann [66] : les feuilles sont définies par une distribution intégrable de champs de vecteurs. Mais ils sont davantage : d'une part ils sont hamiltoniens, et d'autre part ils sont *presque réguliers* dans le sens où les feuilles singulières ne peuvent pas remplir un domaine de mesure strictement positive.

Avant de chercher à les classifier, il faut décider d'une relation d'équivalence acceptable. Lors de la discussion du paragraphe 1.1, on a défini la notion d'équivalence faible (définition 1.6), montré qu'elle était insuffisante pour les points singuliers, et introduit une équivalence plus forte, qui est la suivante :

**Définition 1.12** Deux systèmes  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont dits *fortement équivalents* en un point  $m \in M$  lorsque, au voisinage de  $m$ ,

$$C_{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}(m)) = C_{\mathbf{g}} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}(m)).$$

On note alors  $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$

Cette notion est un léger affaiblissement de la relation " $\mathbf{f} = \varphi \circ \mathbf{g}$ " qui serait trop forte dans la catégorie  $C^\infty$  (voir théorème 1.15).

Il est élémentaire (et probablement standard en géométrie algébrique) de voir que deux systèmes fortement équivalents ont exactement le même type de singularités. Pour ce faire, on dira qu'une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbf{f}$  est bien ordonnée lorsqu'il existe une partition de  $n = n_1 + \dots + n_d$ ,  $n_k \geq 0$  telle que pour tous  $k \in [1..d]$ , l'espace vectoriel engendré par les  $f_j$  correspondant au paquet  $n_k$  (c'est-à-dire d'indices  $j \in [(n_1 + \dots + n_{k-1} + 1)..(n_1 + \dots + n_k)]$ ) est constitué de fonctions s'annulant toutes à l'ordre exactement  $k$  en  $m$  (exceptée la fonction zéro). La partition associée est unique. Par exemple si  $m$  est un point régulier, toute base de  $\mathbf{f}$  est bien ordonnée. Si  $m$  est un point singulier, nécessairement  $n_1$  est le rang de  $dF(m)$ . On montre alors

**Lemme 1.13** *Si  $\mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$  au point  $m$ , alors il existe des bases bien ordonnées de  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  associées à une partition  $n = n_1 + \dots + n_d$  commune, et une matrice  $N$  de taille  $n \times n$  à coefficients dans  $C_{\mathbf{f}}$  ( $= C_{\mathbf{g}}$ ) telle que  $N(m) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  est diagonale par blocs (le bloc  $i$  étant de taille  $n_i$ ) et*

$$(g_1 - g_1(m), \dots, g_n - g_n(m)) = N \cdot (f_1 - f_1(m), \dots, f_n - f_n(m)).$$

**Singularités non-dégénérées** — Dans la théorie des singularités des fonctions différentiables, les singularités "génériques" sont les singularités de Morse. Il existe dans la théorie des systèmes complètement intégrables un analogue de la notion de singularité de Morse (ou plus généralement de Morse-Bott si l'on admet des sous-variétés de points critiques). Ces singularités dites *non-dégénérées* étant dorénavant amplement décrites dans la littérature et en particulier dans les travaux issus de ma thèse, je me bornerai ici à de brefs rappels.

**Définition 1.14 ([28])** *Un point fixe  $m$  est dit **non-dégénéré** (au sens d'Eliasson) si les Hessiennes  $d^2 f_j(m)$  engendrent un sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie des formes quadratiques sur  $T_m M$  (munie du crochet de Poisson linéarisé).*

Une caractérisation plus parlante est qu'une combinaison linéaire générique des champs de vecteurs linéarisés en  $m$  (qui sont des matrices hamiltoniennes : dans  $\text{sp}(2n, \mathbb{R})$ ) admet  $2n$  valeurs propres distinctes. Plus généralement si  $m$  est de corang  $r$ , on peut supposer que  $df_1(m), \dots, df_{n-r}(m)$  sont linéairement indépendantes; on restreint alors  $f_{n-r+1}, \dots, f_n$  à la variété symplectique  $\Sigma$  localement réduite de  $M$  par l'action de  $f_1, \dots, f_{n-r}$ . On dira que  $m$  est non dégénéré (on dit aussi *transversalement non-dégénéré*) lorsque cette restriction du système à  $\Sigma$  admet  $m$  comme point fixe non-dégénéré. Un tel point critique admet un *modèle linéaire* sur  $T^* \mathbb{R}^{n-r} \times T_m \Sigma$  donné par le système  $\mathbf{f}_0 := (\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, q_1, \dots, q_r)$ , où les  $q_j$  forment une base de la sous-algèbre de Cartan mentionnée dans la définition.

**Théorème 1.15 (Théorème d’Eliasson [28, 29])** *Les points critiques non dégénérés sont linéarisables : il existe un symplectomorphisme local  $\chi$  au voisinage de  $m$  tel que*

$$\chi^* \mathbf{f} \sim_s \mathbf{f}_0.$$

Pour utiliser ce théorème il faut comprendre la classification linéaire des sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ . Elle découle des travaux de Williamson [91], qui montre qu’il existe une base formée de trois types de blocs : deux blocs unidimensionnels (le bloc elliptique :  $q = x^2 + \xi^2$  et le bloc hyperbolique “réel” :  $q = x\xi$ ) et un bloc bidimensionnel dit foyer-foyer<sup>(7)</sup> ou loxodromique ou hyperbolique “complexe” :  $q_1 = x\xi + y\eta$ ,  $q_2 = x\eta - y\xi$ . Notons que sur  $\mathbb{C}$  la classification est triviale puisque tout se ramène au cas “hyperbolique”  $x\xi$ . Le cas analytique du théorème d’Eliasson avait été démontré par Rüssmann [61] pour deux degrés de liberté et par Vey [75] en dimension quelconque. Dans la catégorie  $C^\infty$ , le *lemme de Morse isochore* de Colin de Verdière et Vey [17] fournit le résultat d’Eliasson pour les systèmes à un degré de liberté.

La relation de forte équivalence dans le cas non-dégénéré est égale à l’équivalence faible et est bien comprise. En particulier en présence de blocs hyperboliques “réels” elle n’implique pas l’équivalence fonctionnelle (c’est-à-dire “ $\chi^* \mathbf{f} = \varphi \circ \mathbf{f}_0$ ”), alors que c’est bien le cas sinon. Pour davantage de détails, voir [81].

**Théorème 1.16** *Si  $m$  est un point critique non-dégénéré pour  $\mathbf{f}$ , alors il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $m$  sur lequel  $H^1(\mathbf{f}) = 0$  (pour l’équivalence faible ou forte).*

Ce théorème, qui est en réalité utilisé dans la preuve d’Eliasson<sup>(8)</sup>, indique la stabilité de la forme normale et son aptitude à fournir une version semi-classique.

**Semi-classique** — J’ai montré dans [81] un analogue semi-classique du théorème d’Eliasson, qui est crucial pour l’étude des conditions de Bohr-Sommerfeld singulières comme dans [80] ou pour le calcul par Zelditch et Toth des normes des fonctions propres [73]. L’énoncé mime le cas classique, jusque dans la définition de l’équivalence, à une subtilité près : l’apparition de séries formelles en  $\hbar$  d’invariants microlocaux.

**Définition 1.17** *On dira que deux systèmes quantiques  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont **fortement équivalents** en un point  $m \in M$  lorsque, microlocalement près de  $m$ ,*

$$C_{\mathbf{P}}(\mathbf{P} - \mathbf{p}(m)) = C_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} - \mathbf{q}(m)).$$

---

(7). En anglais on utilise la terminologie « latine » *focus-focus*

(8). La preuve d’Eliasson est malheureusement incomplète sur ce point-là.

Le « quantifié » du lemme 1.13 est encore valable, où  $N$  devient une matrice à coefficients pseudo-différentiels.

**Théorème 1.18 ([81])** *Si  $m$  est non-dégénéré, il existe un opérateur intégral de Fourier  $U$  défini près de  $m$  et microlocalement unitaire et des séries formelles  $\alpha_j(\hbar) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$ ,  $j = 1, \dots, r$  tels que*

$$U \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} U^{-1} \sim_s \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\xi}_{n-r} \\ \hat{q}_1 - \hbar \alpha_1(\hbar) \\ \vdots \\ \hat{q}_r - \hbar \alpha_r(\hbar) \end{pmatrix}$$

agissant sur  $\mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$ , microlocalement près de  $m$ .

On a utilisé le chapeau dans cet énoncé pour désigner la quantification de Weyl standard (par exemple  $\hat{\xi}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $\widehat{x\xi} = \frac{\hbar}{i} (x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2})$ ). La preuve repose sur le fait que pour le système modèle on a localement  $H^1(\mathbf{P}_0) = 0$ , pour l'équivalence faible. Ce résultat est obtenu comme application du théorème 1.10 (la surjectivité requise provient des propriétés du produit de Moyal associées au fait que le système modèle est quadratique). L'introduction des séries  $\alpha_j(\hbar)$  est nécessaire pour passer de l'équivalence faible à l'équivalence forte.

Ce théorème est bien adapté à la résolution microlocale du système  $P_j u_\hbar = O(\hbar^\infty)$  car ce dernier se voit remplacé par un système du type  $\hat{q}_j u_\hbar = O(\hbar^\infty)$ , qui se résout explicitement. Puisque le système modèle est découplé, il suffit d'étudier séparément chaque bloc, et on montre les faits suivants : pour un bloc elliptique, l'espace des solutions microlocales (au sens de la proposition 1.11) est de dimension 1; pour un bloc hyperbolique réel, il est de dimension 2 [15]; pour un bloc foyer-foyer, il est de dimension 1 [80].



## 2 Semi-global

Dans l’optique de la compréhension de la géométrie classique d’une fibration complètement intégrable ou de son analyse microlocale, c’est probablement l’aspect *semi-global* le plus fondamental. On qualifiera de semi-global tout ce qui concerne un voisinage invariant par la dynamique d’une feuille du feuilletage. (Certains auteurs parlent également de “semi-local”.) C’est l’étude semi-globale qui par exemple permet de construire des quasi-modes associés à une sous-variété lagrangienne. Remarquons que le semi-global peut être simplement du local, lorsque la feuille considérée est un point critique de type totalement elliptique.

### 2.1 Fibres régulières

L’analyse des voisinages des fibres régulières, basée sur le théorème de Liouville-Arnold-Mineur (ou théorème des variables action-angle), est maintenant bien maîtrisée et abondamment illustrée dans la littérature, aussi bien classique que quantique. Elle est à la base de toute la théorie moderne des systèmes complètement intégrables (dans la lignée de l’article de Duistermaat [25]), mais aussi des théorèmes de perturbations de type KAM. L’analyse microlocale des variables action-angle débute avec les travaux de Colin de Verdière [11], suivi dans la théorie semi-classique proprement dite par Charbonnel [8], et plus récemment par moi-même et divers travaux de Zelditch et Toth. L’analyse de tels systèmes sur variétés compactes a également été abordée, au moyen des opérateurs de Toeplitz [9].

On se donne donc un système  $(f_1, \dots, f_n)$  dont l’application moment  $F$  est *propre*. Soit  $c$  une valeur régulière de  $F$ . Quitte à se restreindre à un ouvert invariant, on pourra toujours supposer que les fibres de  $F$  sont connexes. On note  $\Lambda_c = F^{-1}(c)$ . Les fibres étant compactes et parallélisables (au moyen des champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{f_i}$ ), ce sont des tores. Les fonctions invariantes par le flot sont les fonctions constantes sur chaque fibre; en d’autres termes la restriction de  $C_f$  à chaque fibre est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ; or  $H^1(\Lambda_c, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ . Il n’est pas difficile d’en conclure qu’au voisinage de  $\Lambda_c$ ,  $H^1(\mathbf{f}) = 0$ , pour l’équivalence faible. On s’attend donc à une forme normale stable, qui bien sûr n’est autre que le théorème de Liouville-Arnold-Mineur :

**Théorème 2.1 (Liouville-Arnold-Mineur)** *Si  $\Lambda_c$  est régulière, il existe un symplectomorphisme  $\chi$  de  $T^*\mathbb{T}^n$  dans  $M$  envoyant la section nulle sur  $\Lambda_c$  tel que*

$$\chi^* \mathbf{f} \sim \mathbf{f}_0,$$

où  $\mathbf{f}_0$  est le système linéaire  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sur  $T^*\mathbb{T}^n$ .

On voit facilement que cela implique en réalité  $\chi^* \mathbf{f} = \varphi(\mathbf{f}_0)$  pour  $\varphi$  un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$ ; c’est en général sous cette forme que le théorème est énoncé. Il est important de remarquer que  $d\varphi$  est un *invariant* du

système puisqu'il est déterminé par les *périodes* des trajectoires périodiques du système initial. Vues comme fonctions sur  $M$  les  $\xi_i$  sont appelées les *actions* du système car on peut trouver une primitive  $\alpha$  de  $\omega$  au voisinage de  $\Lambda_c$  telle que les  $\xi_i$  soient les intégrales de  $\alpha$  sur une base de cycles de  $\Lambda_c$  dépendant régulièrement de  $c$ .

Dans l'optique semi-classique, il est nécessaire de disposer d'une version "exacte" du théorème de Liouville-Arnold-Mineur dans le sens où, une primitive  $\alpha$  de  $\omega$  étant fixée, un symplectomorphisme est dit exact lorsqu'il conserve les intégrales de  $\alpha$  le long de chemins fermés (intégrales d'action). On obtient immédiatement

**Théorème 2.2** *Si  $\Lambda_c$  est régulière, il existe un symplectomorphisme exact  $\chi$  de  $T^*\mathbb{T}^n$  dans  $M$  envoyant la section  $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (a_1, \dots, a_n) = \text{const}$  sur  $\Lambda_c$  tel que*

$$\chi^* \mathbf{f} \sim \mathbf{f}_0$$

si et seulement si  $a_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha$ , où  $\gamma_i$  est le cycle sur  $\Lambda_c$  correspondant via  $\chi$  au  $i$ -ème cycle canonique de  $\mathbb{T}^n$ .

**Semi-classique** — Soit  $\mathbf{P} = \langle P_1, \dots, P_n \rangle$  un système complètement intégrable quantique, dont les symboles principaux forment une application moment propre. On note encore  $\Lambda_c$  les feuilles lagrangiennes.  $\alpha$  est la 1-forme canonique de  $M = T^*X$  et comme précédemment on note  $a = (a_1, \dots, a_n)$  les intégrales d'action le long de la base de cycles de  $\Lambda_c$  définie par les actions  $\xi_j$  choisies.

**Théorème 2.3 (Action-angle semi-classique [81])** *Si  $\Lambda_c$  est régulière il existe des séries formelles  $\lambda_j(\hbar) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$  et un opérateur intégral de Fourier  $U$  associé à un symplectomorphisme exact de  $T^*\mathbb{T}^n$  dans  $M$  envoyant la section " $\xi = a$ " sur  $\Lambda_c$  tel que, microlocalement au voisinage de la section " $\xi = a$ " on ait*

$$U(P_1, \dots, P_n)U^{-1} \sim_s (\hat{\xi}_1 - \hbar\lambda_1(\hbar), \dots, \hat{\xi}_n - \hbar\lambda_n(\hbar)),$$

agissant sur  $\mathbb{T}^n$ .

Explicitement le résultat s'écrit

$$U(P_1 - p_1(m), \dots, P_n - p_n(m))U^{-1} = N \cdot (\hat{\xi}_1 - \tilde{\lambda}_1(\hbar), \dots, \hat{\xi}_n - \tilde{\lambda}_n(\hbar)),$$

où  $m$  est un point quelconque de  $\Lambda_c$ ,  $N$  est une matrice  $n \times n$  microlocalement inversible d'opérateurs pseudo-différentiels et  $\tilde{\lambda}_j(\hbar) = a_j + \hbar\lambda_j(\hbar)$ . On voit que l'action  $a_j$  peut être considérée comme le premier invariant semi-classique. Le deuxième terme est donné par les intégrales de la *forme sous-principale* (cf. la définition (8)) et du *cocycle de Maslov* sur la lagrangienne  $\Lambda_c$  (voir également [80]).

L'énoncé suivant est une conséquence directe du théorème.

**Théorème 2.4 (Quasi-modes réguliers de Bohr-Sommerfeld [80])** *Il existe une solution microlocale non nulle du système  $P_j u_\hbar = O(\hbar^\infty)$  (donc microlocali-*

sée sur  $\Lambda_0$ ) si et seulement si  $\tilde{\lambda}_j(\hbar) \in \hbar\mathbb{Z}$ . La solution est unique (au sens de la proposition 1.11).

On en déduit les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières de la façon suivante. Supposons que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^E$  dépende d'un paramètre  $E \in \mathbb{R}^n$  de sorte que pour tous  $m$  près de  $\Lambda_0^E = (p^E)^{-1}(0)$ , l'application des symboles principaux  $(E_1, \dots, E_n) \rightarrow (p_1^E, \dots, p_n^E)(m)$  soit un difféomorphisme local.

**Définition 2.5** On appelle spectre conjoint microlocal  $\Sigma_\hbar(P_1^E, \dots, P_n^E)$  l'ensemble des  $E \in \mathbb{R}^n$  tel que le système  $P_j^E u_\hbar = O(\hbar^\infty)$ ,  $j = 1, \dots, n$  admette une solution microlocale non nulle sur toute la fibre  $\Lambda_0^E$

Le cas typique est bien sûr  $P_j^E = P_j - E_j$ . De notre point de vue il est souvent préférable d'oublier la dépendance linéaire en  $E$ , qui n'est pas invariante par équivalence forte.

On obtient les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières à partir du théorème 2.4 en remarquant qu'il est encore valable "avec paramètres". Elles s'énoncent ainsi :

**Théorème 2.6 ([80])** Le spectre conjoint microlocal est constitué des  $E$  solutions de  $\tilde{\lambda}_j^E(\hbar) \in \hbar\mathbb{Z}$ , où

$$\tilde{\lambda}_j^E(\hbar) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j^E} \alpha + \hbar \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_j^E} \kappa^E + \hbar \frac{\mu(\gamma^E)}{4} + O(\hbar^2). \quad (9)$$

Ici  $\kappa^E$  est la 1-forme sous-principale sur  $\Lambda_0^E$  et  $\mu$  le cocycle de Maslov.  $\gamma^E$  est un cycle quelconque de  $\Lambda_0^E$ .

**Cas non-autoadjoint** — Récemment Melin et Sjöstrand ont réussi à obtenir des règles de type Bohr-Sommerfeld pour des opérateurs *non*-auto-adjoints en dimension 2 [51]. La condition qu'ils imposent sur le symbole de l'opérateur permet de voir les parties réelles et imaginaires comme un système hamiltonien à deux degrés de liberté presque complètement intégrable. Même si l'équation aux valeurs propres est différente de celle d'un spectre conjoint, les techniques de formes normales diverses s'appliquent encore avec succès, donnant ainsi un regain d'intérêt à l'étude des feuilletages lagrangiens, même réguliers. A fortiori, l'étude plus délicate des singularités devrait s'avérer aussi efficace dans le cadre non-autoadjoint. Des articles plus récents d'Hitrik et Sjöstrand [36, 65] l'attestent déjà.

## 2.2 Fibres singulières

J'évoquerai dans cette section la structure des fibres possédant des singularités non-dégénérées. Je ne connais pas de résultats semi-globaux pour des singularités plus dégénérées. L'initiateur principal de l'analyse topologique des fibres singulières non dégénérées est sans doute Fomenko [30], relayé avec succès par un certain nombre de ses élèves.

**Cas elliptique** — Au voisinage d'un point fixe elliptique, les fibres sont des petits tores et sont entièrement décrits par la forme normale locale, aussi bien du point de vue classique que semi-classique (le système se ramène à des oscillateurs harmoniques découplés). Je n'insisterai donc pas sur ce type de singularités... même si en toute rigueur l'étude semi-classique semi-globale n'a pas été traitée en détails pour des singularités *transversalement elliptiques*. Mais on ne s'attend pas à des difficultés particulières.

**Cas foyer-foyer** — Le théorème d'Eliasson donne la structure locale des singularités foyer-foyer. Plusieurs personnes ont remarqué (dans les années 1996-1997) qu'elle suffisait pour déterminer la *monodromie* du feuilletage autour de la fibre singulière; j'en parlerai davantage en section 3. En réalité, cette structure locale est un point de départ pour comprendre beaucoup plus: la classification semi-globale d'une fibre singulière de type foyer-foyer [86]. Contrairement à la monodromie qui est un invariant topologique, déjà observé dans des fibrations en tores sans structure hamiltonienne, la classification semi-globale fait intervenir des invariants purement symplectiques.

Soit  $F = (f_1, f_2)$  un système complètement intégrable à deux degrés de libertés sur une variété symplectique  $M$  de dimension 4. Soit  $m$  un point critique de type foyer-foyer; on supposera pour simplifier que  $F(m) = 0$ , et que la fibre (compacte, connexe)  $\Lambda_0$  ne contient pas d'autres points critiques. On peut montrer que  $\Lambda_0$  est un tore "pincé" (l'immersion lagrangienne d'une sphère  $S^2$  avec un point double transversal), entouré par des fibres régulières qui sont des tores  $\mathbb{T}^2$  standards. Quels sont les invariants semi-globaux associés à cette fibration singulière?

Une des caractéristiques majeures des singularités foyer-foyer est l'existence d'une *action hamiltonienne de  $S^1$*  qui commute avec le flot du système, dans un voisinage de  $\Lambda_0$ . En effet, commençons par appliquer le théorème d'Eliasson au voisinage de  $m$  pour se ramener à une application moment  $F = (f_1, f_2)$  qui soit égale près de  $m$  à la base canonique foyer-foyer  $(x\xi + y\eta, x\eta - y\xi)$ .  $f_2$  est le Hamiltonien périodique recherché; on peut également l'identifier à une intégrale d'action associée au cycle évanescant du tore pincé (cf. fig. 2).

Soit  $c$  une valeur régulière de  $F$  proche de 0. Étant donné un point  $A$  sur  $\Lambda_c$  proche de  $m$ , on définit  $\tau_1(c) > 0$  comme étant le temps de premier retour pour le flot de  $\mathcal{X}_{f_1}$  sur l'orbite de  $A$  par le flot de  $\mathcal{X}_{f_2}$ , et  $\tau_2(c) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le temps nécessaire pour retourner en  $A$  sous l'action de  $\mathcal{X}_{f_2}$ . On définit

$$\sigma_1(c) = \tau_1(c) + \Re(\ln c) \quad \text{et} \quad \sigma_2(c) = \tau_2(c) - \Im(\ln c),$$

où on a identifié  $c = c_1 + ic_2$ . On montre que  $\sigma := \sigma_1(c)dc_1 + \sigma_2(c)dc_2$  est une 1-forme fermée de classe  $C^\infty$  au voisinage de l'origine. Soit  $S$  une primitive de  $\sigma$  s'annulant à l'origine. Soit  $[\mathbf{f}]$  le feuilletage associé au système

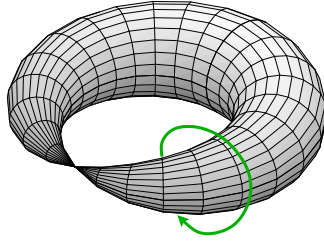


FIG. 2 – Le cycle évanescant du tore pincé

dans un voisinage de  $\Lambda_0$  (c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $\mathbf{f}$  modulo l'équivalence forte). On note  $S([\mathbf{f}])$  la série de Taylor de  $S$ .

**Théorème 2.7 ([86])**  $S([\mathbf{f}])$  caractérise entièrement le feuilletage singulier au voisinage de  $\Lambda_0$ , c'est-à-dire :

- $S([\mathbf{f}])$  est bien définie (elle ne dépend pas du choix de la carte locale d'Eliasson et est invariante par équivalence forte);
- Si  $[\mathbf{f}]$  et  $[\mathbf{g}]$  sont deux feuilletages singuliers au voisinage de feuilles foyer-foyer, et vérifient  $S([\mathbf{f}]) = S([\mathbf{g}])$ , alors il existe un symplectomorphisme semi-global  $\chi$  tel que  $\chi^* \mathbf{f} \sim_s \mathbf{g}$ ;
- Si  $T$  est une série formelle quelconque de  $\mathbb{R}[[X, Y]]$  sans terme constant, alors il existe un feuilletage singulier de type foyer-foyer  $\mathbf{f}$  tel que  $T = S([\mathbf{f}])$ .

**Remarque 2.8** Le fait que deux fibrations foyer-foyer sont toujours semi-globalement *topologiquement* conjuguées avait été déjà prouvé par Zung [95], qui avait introduit diverses notions d'équivalences de nature topologique. Dans notre langage cela dit que la classe topologique est invariante par équivalence forte. Le théorème montre que ce n'est plus le cas pour la classe symplectique.  $\triangle$

**Remarque 2.9**  $S$  s'interprète comme une *action régularisée* (ou désingularisée). En effet si  $\gamma_c$  est le lacet sur  $\Lambda_c$  défini comme dans la description des  $\tau_j(c)$  ci-dessus, et si  $\alpha$  est une primitive semi-globale de la forme symplectique  $\omega$ , on note  $\mathcal{A}(c) = \int_{\gamma_c} \alpha$ ; on a alors

$$S(c) = \mathcal{A}(c) - \mathcal{A}(0) + \mathfrak{R}(c \ln c - c). \quad \triangle$$

L'étude semi-classique des fibres de type foyer-foyer a été menée à bien dans l'article [80]. J'y énonce des conditions de type Bohr-Sommerfeld *singulières* qui permettent de décrire complètement le spectre conjoint micro-local au voisinage de la valeur critique de l'application moment. Contrairement au cas des variables action-angle standard, on ne peut pas procéder aussi simplement en appliquant une forme normale semi-globale semi-classique; en effet, le théorème de classification ne donne pas de modèle

explicite particulier. Et tous les exemples que je connais, qui peuvent raisonnablement prétendre au titre de « modèle type de singularité foyer-foyer », ne sont pas résolubles explicitement. La stratégie que j’ai développée consiste à voir les solutions microlocales comme les sections globales d’un faisceau qui, en vertu des formes normales locales, est un fibré localement plat; une telle section globale existe alors si et seulement si l’holonomie du faisceau est triviale. Cette approche est bien entendu utilisable dans le cas régulier également; on identifie alors (la phase de) cette holonomie aux *intégrales d’action semi-classiques* de la formule (9). Dans le cas singulier l’holonomie adéquate est une *régularisation* de l’action semi-classique habituelle, au sens de la remarque 2.9 ci-dessus. D’ailleurs le premier terme de cette holonomie est exactement l’invariant semi-classique décrit au théorème 2.7 ci-dessus, ce qui indique que la classe d’équivalence symplectique du feuilletage est un *invariant spectral* du système quantique. Voir [80, 82] pour davantage de détails.

Outre l’analyse semi-classique, le théorème 2.7 conduit à un certain nombre d’applications diverses. On peut par exemple exploiter le fait que l’ensemble des classes d’équivalence symplectiques de ces feuilletages se voit muni d’une structure d’espace vectoriel. C’est ce que fait Symington dans [69] pour montrer que des voisinages de fibres foyer-foyer sont toujours symplectomorphes (en oubliant de préserver le feuilletage, bien sûr). Il suffit pour cela d’introduire des fonctions  $S_0$  et  $S_1$  dont la série de Taylor donne les invariants des deux feuilletages, et de construire un “chemin de feuilletages” en interpolant entre  $S_0$  et  $S_1$ . Un argument à la Moser permet alors de conclure (puisque les formes symplectiques sont cohomologues).

Le théorème est aussi très utile pour effectuer des calculs presque explicites dans un voisinage de la fibre. On peut ainsi, par exemple, déterminer la validité des conditions qui apparaissent dans les théorèmes de type KAM<sup>(9)</sup>, pour une perturbation d’un système complètement intégrable possédant une singularité foyer-foyer. En collaboration avec Dullin, nous avons ainsi montré :

**Théorème 2.10 ([27])** *Soit  $H$  un Hamiltonien complètement intégrable singulier en l’origine, et  $\gamma$  possédant un feuilletage lagrangien singulier de type foyer-foyer ( $H$  a une singularité loxodromique). Alors, au voisinage de 0,*

- *la condition de non-dégénérescence de Kolmogorov est vérifiée sur tous les tores proches de la fibre critique;*
- *la condition de “fréquences tournantes iso-énergétique” est vérifiée sauf sur une famille à 1-paramètre de tores correspondant à une courbe dans l’image de l’application moment qui passe par l’origine et est transversale aux droites d’énergie  $H$  constante.*

---

(9). Pour une discussion sur ces différentes conditions et leurs relations, on consultera avec intérêt la thèse de Nicolas Roy [60].

**Cas hyperbolique** — A l’instar des blocs elliptiques, les blocs hyperboliques sont de dimension 1 (forme normale  $q_i = x_i \xi_i$ ); cependant ils se révèlent plus compliqués et donc plus riches que les premiers, et ce pour deux raisons principales. La première est fondamentale : les fibres singulières ne sont pas localisées près de la singularité; au contraire elles sont constituées de variétés stables et instables qui peuvent connecter plusieurs points singuliers. La deuxième raison, plus technique, est que la structure  $C^\infty$  naturelle de l’espace des feuilles est compliquée. Par exemple dans le cas du “8” (fig. 3) l’espace “topologique” des feuilles est un “Y”; pourtant du point de vue de la structure analytique (lorsque le Hamiltonien est analytique) l’espace des feuilles est juste un intervalle (les fonctions qui commutent avec  $x\xi$  sont des fonctions de  $x\xi$ ). Dans la catégorie  $C^\infty$  l’espace des feuilles est toujours un “Y”, mais dont les bras ont toutes leurs dérivées égales au point de branchement : les fonctions  $C^\infty$  qui commutent avec  $x\xi$  se décrivent localement par deux fonctions  $f^+(x\xi)$  et  $f^-(x\xi)$  (par exemple correspondant aux deux demi-espaces  $\pm x > 0$ ) telles que  $f^+ - f^-$  est plate à l’origine.

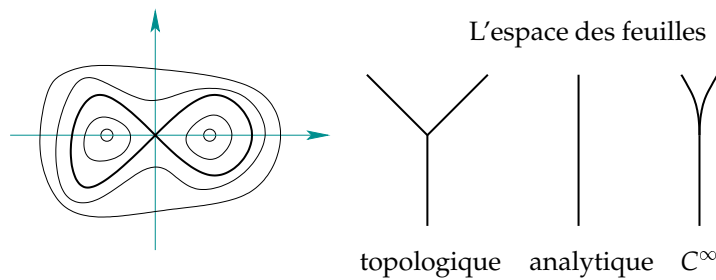


FIG. 3 – L’espace des feuilles d’un feuilletage hyperbolique réel.

D’un point de vue semi-global, la classification des feuilletages hyperboliques a été réalisée uniquement à 1 degré de liberté, dans la thèse de Toulet, et publiée dans la note [74, 23]. On peut d’ailleurs donner une preuve de l’énoncé proposé dans cette note avec des méthodes similaires à celles que j’ai utilisées dans [86].

La fibre critique est un *graphe* dont les sommets sont tétravalents (si les singularités de la fibre sont toutes hyperboliques). L’invariant est ce même graphe, vu comme objet topologique, muni de certaines *décorations*. Toulet propose une cohomologie supportée sur le graphe qu’il serait intéressant de comparer avec le  $H^1(\mathbf{f})$  que j’ai défini. L’analyse semi-classique correspondante est traitée par Colin de Verdière et Parisse [14, 15, 16]. Les auteurs utilisent le graphe de Dufour-Molino-Toulet pour lire les conditions de quantification appropriées. Là encore, c’est la cohomologie du graphe qui sous-tend la discussion.

Dans l’article [18], nous avons étudié en détails le cas à deux degrés de

liberté de singularités *transversalement hyperboliques*. L'ensemble des points critiques de la fibre critique est une union de cercles. Au voisinage de chaque cercle, on se ramène à une situation modèle qui peut présenter une symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (c'est le cas par exemple de la forme normale de Birkhoff en résonance 1 : 2, pour une énergie non nulle; la fibre critique est représentée en figure 4). Comme pour le cas unidimensionnel, on construit un graphe qui

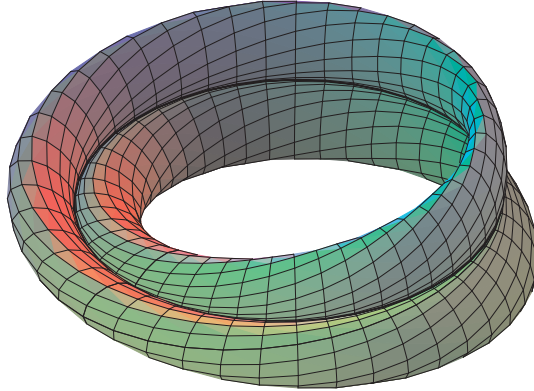


FIG. 4 – fibre critique hyperbolique avec symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (cas de la résonance 1 : 2)

permettra d'énoncer des conditions de type Bohr-Sommerfeld singulières. Ce graphe est abstraitement la *réduction* de la fibre critique par une action de  $S^1$  que l'on construit et qui laisse le feuilletage invariant. La "subtilité" est que les cercles critiques avec symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  deviennent des sommets *bivalents* (et non tétravalents) du graphe. D'autre part le problème évoqué ci-dessus de la structure  $C^\infty$  délicate sur le graphe qui semble-t-il ne peut pas être évité conduit à une preuve assez technique de la validité des conditions de Bohr-Sommerfeld. (Au contraire, cette difficulté est facilement évitable en dimension 1.)

On obtient ainsi de façon très précise le *comportement universel* du spectre conjoint microlocal au voisinage d'une séparatrice transversalement hyperbolique<sup>(10)</sup>, qui permet entre autres de calculer la densité locale des valeurs propres (formules de type Weyl). Comme attendu, la distance entre deux points du spectre conjoint est de l'ordre de  $\hbar$  dans la direction donnée par le (c'est-à-dire duale au) champ hamiltonien périodique, et de l'ordre de  $\hbar/|\ln \hbar|$  dans la direction transverse (cf. fig. 5).

En regardant un dessin similaire à la figure 5, Sadovskii et Zhilinskiï ont eu l'idée qu'on pouvait définir (et calculer) une *monodromie fractionnaire* [58], c'est-à-dire rendant compte de l'homologie à coefficients rationnels des fibres de la fibration singulière en tores. En utilisant nos travaux, on

(10). Je n'énonce pas ici le théorème, qui est un peu long à introduire proprement [18]

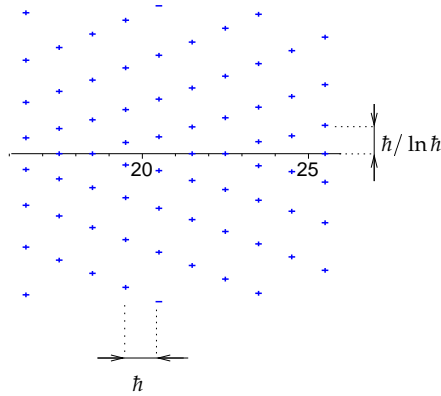


FIG. 5 – Portion du spectre conjoint pour une singularité transversalement hyperbolique avec symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Cas de la résonance 1 : 2. L'axe horizontal représente les valeurs de l'énergie  $H$  et l'axe vertical celles de l'intégrale supplémentaire du système  $K$ .

devrait pouvoir l'écrire rigoureusement et la calculer au moyen du graphe du feuilletage. La structure affine rationnelle de la base devrait également être finement comparée au spectre conjoint.

**Cas restants...** — Pour finir l'étude des systèmes à deux degrés de liberté il resterait à inclure les cas elliptique-hyperbolique et hyperbolique-hyperbolique.

Le cas d'un système possédant un point critique se séparant en un bloc elliptique et un bloc hyperbolique est probablement le plus simple. On peut le voir comme un cas limite de singularité transversalement hyperbolique dont les cercles critiques dégénèrent en un point, excluant la possibilité d'une symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . La fibre critique est donc un graphe tétravalent plongé dans  $M$ .

D'un point de vue semi-classique, on obtiendra deux conditions de quantification : l'une liée à la cohomologie du graphe; l'autre au cycle évanescent.

Le cas hyperbolique-hyperbolique est certainement un très bon problème ouvert non trivial. On peut le voir comme un branchement de quatre singularités transversalement hyperboliques (non indépendantes).



### 3 Global

Nous avons jusqu'à maintenant considéré diverses propriétés des systèmes intégrables dans des voisinages, éventuellement arbitrairement petits, d'objets invariants minimaux : les orbites de points de  $M$ . Pour en savoir plus, il faut "globaliser". Mais l'adjectif "global" recouvre plusieurs aspects, qualitatifs et quantitatifs.

Par exemple la démarche de Duistermaat a été de globaliser les propriétés données par le théorème de Liouville-Arnold-Mineur. Il s'est donc intéressé à la fibration au dessus de l'ensemble des *points réguliers*, analysant la rôle de la monodromie, de la classe de Chern et de la classe de cohomologie de la forme symplectique.

La globalisation la plus naturelle est de chercher à décrire la variété symplectique entière en s'appuyant comme dans la théorie de Morse sur des formules qui permettent de "localiser" les objets globaux sur les *singularités* du système. Sous l'hypothèse de non-dégénérescence des points critiques, Zung a étudié cette question en montrant en particulier l'importance de la *structure affine entière* de la base de la fibration.

Cette structure affine entière fournit un autre angle d'attaque du problème global. Dans le cas le plus simple des systèmes complètement intégrables *toriques* (c'est-à-dire dont le flot définit une action effective de  $\mathbb{T}^n$ ) on sait caractériser entièrement le système constitué de la variété symplectique  $M$  et de l'application moment  $F$  au moyen de l'image de  $M$  par  $F$  qui, dans la variété affine entière  $\mathbb{R}^n$ , est un polytope convexe rationnel (théorème de Delzant [21]). Il semble qu'une généralisation naturelle des systèmes toriques soit ceux qui ne possèdent que des singularités non-dégénérées de type elliptique et/ou foyer-foyer. On les appelle les systèmes *presque toriques* (la terminologie a probablement été introduite pour la première fois par Symington [68]; j'ai proposé la même appellation indépendamment).

Du point de vue de l'analyse semi-classique, la "globalisation" peut faire référence, de façon parallèle, aux globalisations géométriques proposées ci-dessus. Il est également naturel de penser au problème du passage du microlocal à l'"exact" : comment utiliser les constructions microlocales pour obtenir des résultats concernant le "vrai" opérateur de Schrödinger agissant sur le "vrai" espace de Hilbert  $L^2(X)$  ? Quel est le lien entre le spectre microlocal et le spectre exact ?

#### 3.1 Le spectre exact

On se donne  $P = (P_1, \dots, P_n)$ , un système complètement intégrable quantique sur  $M = T^*X$ .

**Définition 3.1** *Le spectre conjoint de  $P$  est l'ensemble des  $(E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$*

tels qu'il existe  $\Psi \in L^2(X)$  normalisée vérifiant

$$\forall i, \quad P_i \Psi = E_i \Psi.$$

Le passage du microlocal à l'exact repose sur deux points. Le premier, très général, le deuxième, adapté à notre vision des systèmes intégrables.

Le premier point concerne la géométrie et l'analyse à l'infini : on veut s'assurer que le bout de feuilletage lagrangien considéré est bien séparé d'éventuelles autres composantes connexes "lointaines" de la fibration  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Ceci est assuré par le fait que  $p$  est supposée propre dans la zone qui nous intéresse : il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $p^{-1}(K)$  est compact. Si  $X$  est compact ou si  $X = \mathbb{R}^n$  et les symboles des opérateurs  $P_j$  ont un bon comportement à l'infini (par exemple dont toutes les dérivées sont bornées par une fonction poids au sens de Hörmander [37]), on montre alors que dans tout compact  $K'$  d'intérieur inclus dans  $K$ , le spectre conjoint des  $P_j$  est discret (de multiplicité finie) [8].

Le deuxième point s'appuie sur la construction des quasi-modes microlocaux et de leur *multiplicité* microlocale, comme dans la proposition 1.11. L'unicité microlocale des solutions du système montre non seulement que les quasi-modes construits approximent réellement les fonctions propres mais aussi qu'ils forment un système complet, car ils sont microlocalement orthogonaux [80]. On est ainsi assuré que le spectre microlocal est vraiment une perturbation d'ordre  $O(\hbar^\infty)$  du spectre exact, incluant les multiplicités.

### 3.2 Fibrations régulières : le cas de la monodromie

Je rappelle ici la définition de la monodromie et ses conséquences semi-classiques. Je serai très bref, ce point ayant été amplement discuté dans plusieurs de mes articles [79, 80, 83].

Le théorème de Liouville-Arnold-Mineur définit au voisinage de valeurs régulières de l'application moment  $F$  des variables d'action. Vues comme cartes locales de l'ouvert  $B_r$  des valeurs régulières, elles munissent  $B_r$  d'une structure de variété affine entière de groupe de structure le groupe affine  $GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$ . Par définition, la *monodromie affine* du système est l'holonomie de cette structure affine. Une autre façon de définir un variété affine entière est de spécifier une distribution de *réseaux* dans chaque espace tangent. Le réseau en question est le dual du *réseau des périodes*, qui est l'ensemble des  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  tels que le champs hamiltonien  $\sum \tau_i \mathcal{X}_{f_i}$  est  $2\pi$ -périodique. La partie linéaire de la monodromie affine, appelée simplement monodromie, est également l'holonomie du fibré plat des groupes d'homologie des fibres de la fibration en tore au dessus de  $B_r$ .

Suivant une idée de Cushman et Duistermaat, j'ai montré comment cette monodromie se lit sur le *spectre conjoint* microlocal d'un système quantique correspondant. Il suffit d'appliquer les conditions de Bohr-Sommer-

feld régulières qui décrivent localement le spectre conjoint comme une portion d'un réseau de type  $\hbar\mathbb{Z}^n$ , dont la taille de la maille tend vers 0. On définit ainsi une structure affine entière asymptotique dont on montre qu'elle coïncide pour  $\hbar$  assez petit avec la structure classique [79].

### 3.3 Foyer-foyer et monodromie

Une propriété remarquable des singularités foyer-foyer pour un système à deux degrés de liberté est qu'elles impliquent la présence d'une monodromie non triviale universelle pour la fibration régulière qui entoure la fibre critique. Ce résultat est valable de façon générale pour des fibrations en tores possédant une fibre singulière isolée générique [55, 48]; il a été redécouvert dans le cadre hamiltonien dans les années 1996-1997 par plusieurs personnes, dont Nguyễn Tiên Zung [96] et Matveev [49]. La particularité de la situation hamiltonienne est que la monodromie est orientée :

si, dans le cas topologique, la matrice de monodromie s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$ , dans le cas hamiltonien, le signe est prescrit, et toujours positif. Il suffit pour cela de fixer une orientation sur  $\mathbb{R}^2$  et l'application moment (ainsi que la forme symplectique) induisent une orientation naturelle sur chaque tore lagrangien, et donc sur leur homologie [19]. Du point de vue quantique Zhilinskií suggère d'interpréter ce signe comme le fait qu'autour du point foyer-foyer, le "réseau" des valeurs propres conjointes possède un *défaut ponctuel* (dans le sens où un certain nombre de points ont dû être enlevés, et non rajoutés). Cette assertion peut être vérifiée par les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières dont nous avons déjà parlé et qui donnent la position précise des valeurs propres près de la singularité [80].

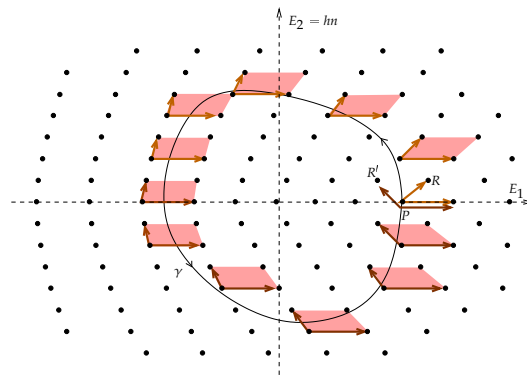


FIG. 6 – Un spectre conjoint avec monodromie, et la détermination de cette dernière comme holonomie affine asymptotique.

### 3.4 Systèmes toriques et polyades

Le cas le plus simple de systèmes intégrables dont on connait parfaitement la géométrie globale est celui des systèmes toriques. On se donne un système complètement intégrable  $(f_1, \dots, f_n)$  d'application moment  $F$  propre.

**Définition 3.2** *Le système  $F$  est dit **torique** s'il existe une action hamiltonienne effective de  $\mathbb{T}^n$  avec une application moment  $\Phi$  de la forme  $\Phi = \varphi \circ F$  où  $\varphi$  est un difféomorphisme local sur l'image de  $F$ .*

Rappelons que par le théorème d'Atiyah [3] et Guillemin-Sternberg [33] les fibres de l'application moment pour une action hamiltonienne de tore sont connexes et l'image est un polytope rationnel convexe, et par le théorème de Delzant [21] cette image détermine entièrement la variété  $M$  et l'application moment  $\Phi$  (à isomorphisme près) dans le cas complètement intégrable. En réalité le théorème de connexité/convexité est énoncé dans le cas où  $M$  est compacte, mais il reste valable dans le cas d'une application moment propre [42] (le « polytope » n'étant plus nécessairement borné).

On peut montrer que dans la définition 3.2 les fibres de  $F$  sont nécessairement connexes et  $\varphi$  est un difféomorphisme de l'image de  $F$  dans celle de  $\Phi$  [85]. On connaît donc parfaitement la structure de la fibration lagrangienne. En particulier les seules singularités sont de type (transversalement) elliptique. En recollant les descriptions locales, on parvient ainsi assez aisément dans la situation semi-classique à une description globale du spectre conjoint.

**Théorème 3.3 ([87])** *Soit  $P = (P_1, \dots, P_n)$  un système complètement intégrable quantique, et  $\Sigma(P)$  son spectre conjoint. Il existe une application  $\varphi_{\hbar}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,*

- la restriction de  $\varphi_{\hbar}$  à  $K$  est un symbole classique dont le terme principal  $\varphi_0$  est un difféomorphisme local;
- les composantes de  $\varphi_0 \circ F$  sont des variables d'action classiques;
- $\varphi_{\hbar}(K \cap \Sigma(P)) = \hbar\mathbb{Z}^n \cap \varphi_{\hbar}(K) + O(\hbar^\infty)$ .

Le spectre conjoint est ainsi transformé en un réseau droit associé au polytope moment, éventuellement décalé par rapport à ce dernier en raison d'éventuels termes sous-principaux.

Une fois choisi un vecteur de base du réseau dans lequel s'inscrit le spectre conjoint, on peut définir un regroupement de valeurs propres en associant celles qui sont sur la même droite dirigée par ce vecteur. On appelle ces « paquets » de valeurs propres des **polyades**, en référence au cas de l'oscillateur harmonique dans la littérature physico-chimique. D'un point de vue classique, un tel vecteur de base définit une sous-action de  $S^1$ ; les polyades correspondantes sont alors les *clusters* (amas) de Weinstein [89] associés aux Hamiltoniens périodiques. Il faut noter que dans notre situation complètement intégrable, l'hypothèse de Weinstein sur les symboles

sous-principaux n'est plus nécessaire.

Ce théorème fournit une preuve semi-classique amusante du corollaire suivant (qui peut également se montrer par des moyens plus habituels) : lorsque  $M = T^*X$  (ce qui est évidemment le cas du théorème, sauf si on l'énonce dans le cadre des opérateurs de Toeplitz), il ne peut y avoir qu'un seul point critique de corang maximal. Ce qui indique que l'intérêt du théorème ne réside pas réellement dans la description globale du spectre, qui ne serait valable que pour un nombre très limité d'exemples, mais dans la description de toutes les parties (polyédrales, convexes) du spectre conjoint qui correspondent à un sous-système torique.

### 3.5 Systèmes presque toriques

Les systèmes toriques sont essentiellement des systèmes complètement intégrables dont les singularités sont non-dégénérées de type (transversalement) elliptique (même si énoncée telle quelle l'assertion est fautive : cf la proposition 3.5).

Une façon pas trop brutale de généraliser les systèmes toriques et d'admettre des singularités isolées dans l'image du moment.

**Définition 3.4** *Un système complètement intégrable avec application moment propre est dit **presque torique** lorsque toutes ses singularités sont non-dégénérées, sans bloc hyperbolique.*

Autrement dit un système presque torique ne possède que des blocs de type elliptique ou foyer-foyer. La classification (à difféomorphisme près) des variétés compactes de dimension 4 admettant un système presque torique vient d'être annoncée par Leung et Symington [43].

Parmi les propriétés élémentaires des systèmes presque toriques, on peut énoncer :

**Proposition 3.5 ([85])** — *Si toutes les singularités de  $F$  sont non-dégénérées et l'ensemble des valeurs régulières de  $F$  est connexe, alors  $F$  est presque torique;*

— *Si  $F$  est presque torique alors  $F$  est torique si et seulement si l'ensemble des valeurs régulières de  $F$  est connexe et simplement connexe.*

**Polytopes généralisés** — Il n'existe actuellement aucun résultat semi-classique général sur les systèmes presque toriques. Pour commencer cette étude, je me suis intéressé à une sous-classe simple de systèmes presque toriques à deux degrés de liberté, ceux dont l'indice de défaut est égal à 1 :

**Définition 3.6** *Un système intégrable presque torique  $F = (f_1, f_2)$  sur une variété symplectique de dimension 4 a un **indice de défaut** égal à 1 s'il existe un difféomorphisme local  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  sur l'image de  $F$  tel que  $\varphi_1 \circ F$  soit une application moment propre pour une action hamiltonienne effective de  $S^1$ .*

Les actions hamiltoniennes de  $S^1$  sur une variété compacte ont été classifiées topologiquement par Audin [4] et symplectiquement par Karshon [39]. On peut montrer que les systèmes à indice de défaut 1 sont souvent compacts et donc relèvent de cette classification. Cependant, ce n'est pas vraiment la variété symplectique qui nous intéresse ici, dans la mesure où en général celle-ci est obtenue après un « découpage symplectique » adapté à la portion de système qui nous intéresse. Dans l'optique d'une analyse semi-classique, l'objet essentiel est l'image de l'application moment, munie de sa structure de variété affine entière (avec singularités).

Soit donc  $F = (f_1, f_2)$  un système presque torique d'indice de défaut égal à 1; on note  $B \subset \mathbb{R}^2$  l'image de  $F$ ,  $B_r$  l'ensemble des valeurs régulières, et  $m_f$  le nombre de valeurs critiques  $c_1, \dots, c_{m_f}$  de type foyer-foyer. Soit  $\vec{\epsilon} \in \{-1, +1\}^{m_f}$ . On note  $\ell_i$  la demi-droite verticale partant de  $c_i$  dans la direction donnée par  $\epsilon_i$ . Soit  $k_i$  l'indice de monodromie de  $c_i$  (nous avons montré dans [19] que la monodromie dans cette situation est abélienne et s'identifie à un indice à valeurs entières).

**Théorème 3.7 ([85])** *Il existe un homéomorphisme  $\psi$  de  $B$  dans  $\psi(B) \subset \mathbb{R}^2$  de la forme  $\psi(x, y) = (x, \psi^{(2)}(x, y))$  tel que*

1. *en dehors de  $\ell_i$ ,  $\psi$  est un difféomorphisme affine (ie.  $\psi \circ F$  sont des variables d'action locales)*
2.  *$\psi$  s'étend en une application  $C^\infty$  multivaluée de  $B_r$  dans  $\mathbb{R}^2$  et pour tous  $i = 1, \dots, m_f$  et tout  $c \in \ell_i$  on a*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow c \\ x < x_i}} d\psi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon_i k_i & 1 \end{pmatrix} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow c \\ x > x_i}} d\psi(x,y),$$

3. *L'image de  $\psi$  est un polygone rationnel convexe.*

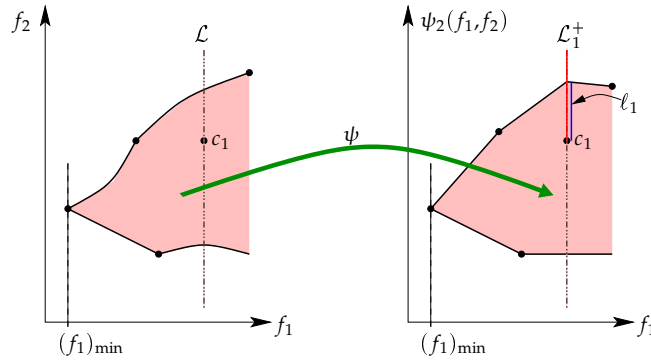


FIG. 7 – Construction du polygone

Bien que le système  $F$  ne soit pas torique, le théorème fournit malgré tout un moyen de lui associer un polygone rationnel convexe, qui se révèle très

utile pour étudier le système. On peut par exemple écrire des formules de localisation qui expriment les mesure de Duistermaat-Heckman associées aux actions du système en fonction de l'indice de monodromie [85].

La différence avec le cas torique, qui fait bien sûr tout l'intérêt de ces systèmes, et que le polygone moment « généralisé » n'est pas unique; au contraire, il est paramétré par un multi-signe  $\vec{\epsilon}$ , qui munit la classe de polygones possibles d'une structure de groupe abélien et exprime la non-unicité des variables d'action.

### 3.6 Bifurcations et redistribution de valeurs propres.

On se pose de façon générale le problème suivant. Soit un système intégrable quantique  $P(t)$  dépendant d'un paramètre  $t \in [0,1]$  tel que  $P(0)$  et  $P(1)$  soient toriques. On sait donc décrire les spectres conjoints de  $P(0)$  et  $P(1)$  au moyen du théorème 3.3. Quelle est la relation entre les deux spectres?

Pour être plus précis, supposons qu'il existe une direction rationnelle particulière dans l'image du symbole principal conjoint  $p(t)$ , indépendamment de  $t$  (c'est le cas par exemple s'il existe une sous-action de  $S^1$  indépendante de  $t$ ). On peut donc définir les *polyades* correspondantes pour  $P(0)$  et  $P(1)$ . Comment les valeurs propres se réarrangent-elles d'un ensemble de polyades à l'autre? C'est le problème de la *redistribution* des valeurs propres. D'après le théorème 3.3 il suffit d'étudier la transformation du polygone moment pour obtenir l'asymptotique du nombre de valeurs propres dans chaque polyade.

En étudiant l'exemple du couplage de deux spins (c'est un système hamiltonien sur  $S^2 \times S^2$  qui vérifie nos hypothèses) Sadovskii et Zhilinskiï ont conjecturé que cette redistribution était liée à l'apparition de monodromie pour une certaine valeur intermédiaire de  $t$  [62].

On se placera dans l'hypothèse où le système est presque torique avec indice de défaut égal à 1, sauf pour un nombre fini de  $t$  qu'on appellera instants de bifurcation. En supposant que les seules bifurcations que subisse le système soient des bifurcations de Hopf hamiltoniennes (qui correspondent à une transformation elliptique-elliptique  $\leftrightarrow$  foyer-foyer et sont génériques<sup>(11)</sup>), on confirme la conjecture de la façon suivante: les polytopes correspondant à  $P(0)$  et  $P(1)$  sont des polygones généralisés d'un même système, le  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m_f})$  correspondant à leur différence est déterminé par la séquence des bifurcations de Hopf. Autrement dit on passe d'un polygone à l'autre par une application affine par morceaux déterminée par la position des valeurs critiques qui bifurquent et leur indice de monodromie [87].

---

(11). Elles sont génériques par exemple dans la classe des Hamiltoniens qui commutent avec une action de  $S^1$  fixée

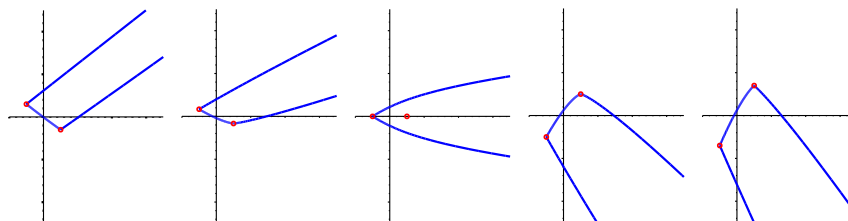


FIG. 8 – Bifurcation de l'image du moment pour le couplage entre un spin et un oscillateur harmonique ( $M = S^2 \times \mathbb{R}^2$ )

Ce résultat a été la motivation essentielle pour introduire les polytopes généralisés, car ces derniers décrivent parfaitement de façon géométrique et combinatoire la redistribution des valeurs propres au sein des polyades. Il est naturel d'imaginer cependant qu'ils auront d'autres applications, pas nécessairement de type semi-classique (je pense par exemple à un résultat de classification de type Delzant).



## Références

- [1] V. I. Arnol'd and A. Avez. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Number 9 in Monographies Internationales de Mathématiques Modernes. Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [2] V.I. Arnol'd. A theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics. *Siberian Math. J.*, 4, 1963. English transl.
- [3] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):1–15, 1982.
- [4] M. Audin. *The topology of torus actions on symplectic manifolds*. Progress in Math. Birkhäuser, 1991.
- [5] M. Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. Number 8 in Cours spécialisés. SMF, EDP Sciences, 2001.
- [6] S. Bates and A. Weinstein. *Lectures on the Geometry of Quantization*, volume 8 of *Berkeley Mathematics Lecture Notes*. AMS, 1997.
- [7] H. Broer. *Bifurcation of Singularities in Volume Preserving Vector Fields*. PhD thesis, Rijksuniversiteit te Groningen, 1979.
- [8] A.-M. Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Asymptotic Analysis*, 1:227–261, 1988.

- [9] L. Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators. to appear in *Comm. PDE*, 2002.
- [10] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent I. *Duke Math. J.*, 46(1):169–182, 1979.
- [11] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. *Math. Z.*, 171:51–73, 1980.
- [12] Y. Colin de Verdière. *Méthodes semi-classiques et Théorie Spectrale*. Cours de DEA. Université Grenoble I, 1992–2003.
- [13] Y. Colin de Verdière. Singular lagrangian manifolds and semiclassical analysis. *Duke Math. J.*, 116(2):263–298, 2003.
- [14] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique I: Concentration microlocale. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9–10):1535–1563, 1994.
- [15] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique II: Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.*, 61(3):347–367, 1994.
- [16] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Singular Bohr-Sommerfeld rules. *Commun. Math. Phys.*, 205:459–500, 1999.
- [17] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18:283–293, 1979.
- [18] Y. Colin de Verdière and S. Vũ Ngọc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36:1–55, 2003.
- [19] R. Cushman and S. Vũ Ngọc. Sign of the monodromy for Liouville integrable systems. *Annales Henri Poincaré*, 3(5):883–894, 2002.
- [20] P. Dazord and T. Delzant. Le problème général des variables actions-angles. *J. Differential Geom.*, 26(2):223–251, 1987.
- [21] T. Delzant. Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116:315–339, 1988.
- [22] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [23] J.-P. Dufour, P. Molino, and A. Toulet. Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318:949–952, 1994.
- [24] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27:207–281, 1974.
- [25] J.J. Duistermaat. On global action-angle variables. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:687–706, 1980.
- [26] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128:183–269, 1972.
- [27] H. Dullin and S. Vũ Ngọc. Vanishing twist near focus-focus points. Preprint, 2003.

- [28] L.H. Eliasson. *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*. PhD thesis, University of Stockholm, 1984.
- [29] L.H. Eliasson. Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case. *Comment. Math. Helv.*, 65:4–35, 1990.
- [30] A.T. Fomenko. *Topological classification of integrable systems*, volume 6 of *Advances in soviet mathematics*. AMS, 1991.
- [31] M. Garay. Stable moment mappings and singular lagrangian foliations. preprint, 2003.
- [32] M. Gross. Topological mirror symmetry. *Invent. Math.*, 144:75–137, 2001.
- [33] V. Guillemin and S. Sternberg. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67(3):491–513, 1982.
- [34] M. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 1990.
- [35] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Comm. Partial Differential Equations*, 9:337–408, 1984.
- [36] M. Hitrik and J. Sjöstrand. Non-selfadjoint perturbations of selfadjoint operators in 2 dimensions i. Preprint math.SP/0302297, 2003.
- [37] L. Hörmander. The Weyl calculus of pseudodifferential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(3):360–444, 1979.
- [38] C. Huygens. *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*. Muguet, Paris, 1673.
- [39] Y. Karshon. Periodic hamiltonian flows on four dimensional manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 672, 1999.
- [40] J. Keller. Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems. *Ann. Phys.*, 4:180–188, 1958.
- [41] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique quantique*. MIR, 1967. 2ème édition.
- [42] E. Lerman, E. Meinrenken, S. Tolman, and C. Woodward. Nonabelian convexity by symplectic cuts. *Topology*, 37(2):245–259, 1998.
- [43] N. C. Leung and M. Symington. Almost toric symplectic four-manifolds. Preprint, October 2003.
- [44] J. Liouville. Note à l’occasion du Mémoire précédent. *J. Math. Pures Appl.*, 20:201–202, 1855.
- [45] J. Liouville. Note sur l’intégration des équations différentielles de la Dynamique. *J. Math. Pures Appl.*, 20:137–138, 1855. Présentée en 1853.
- [46] J. Liouville. Rapport sur un mémoire de M. Bour. *J. Math. Pures Appl.*, 20:135–136, 1855.
- [47] V.P. Maslov. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Dunod, Paris, 1972.

- [48] Y. Matsumoto. Torus fibrations over the 2-sphere with the simplest singular fibers. *J. Math. Soc. Japan*, 37(4):605–636, 1985.
- [49] V. Matveev. Integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom. Topological structure of saturated neighborhoods of saddle-saddle and focus points. *Mat. Sb.*, 187:29–58, 1996.
- [50] V. Matveev and P. Topalov. Quantum integrability of Beltrami-Laplace operator as geodesic equivalence. *Math. Z.*, 238(4):833–866, 2001.
- [51] A. Melin and J. Sjöstrand. Bohr-Sommerfeld quantization conditions for non-selfadjoint operators in dimension 2. *Astérisque*, 2003. to appear.
- [52] H. Mineur. Sur les systèmes mécaniques admettant  $n$  intégrales premières uniformes et l’extension ces systèmes de la méthode de quantification de Sommerfeld. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 200:1571–1573, 1935.
- [53] H. Mineur. Réduction des systèmes mécaniques à  $n$  degrés de liberté admettant  $n$  intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées. *J. Math. Pures Appl.*, 15:385–389, 1936.
- [54] H. Mineur. Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des paramètres fonctions du temps. Étude des systèmes admettant  $n$  intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. *J. Ecole Polytechn.*, III(Cahier 1, Fasc. 2 et 3):173–191, 237–270, 1937.
- [55] B. Moishezon. *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*. Number 603 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.
- [56] J. Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120:286–294, 1965.
- [57] N. Nekhoroshev. Action-angle variables and their generalization. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 26:181–198, 1972.
- [58] N. Nekhoroshev, D. Sadovskii, and Zhilinskiĭ, B. Fractional monodromy of resonant classical and quantum oscillators. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 335(11):985–988, 2002.
- [59] D. Robert. *Autour de l’approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1987.
- [60] N. Roy. *Sur les déformations des systèmes complètement intégrables classiques et semi-classiques*. PhD thesis, Institut Fourier, Université Grenoble 1, 2003.
- [61] H. Rüssmann. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. *Math. Ann.*, 154:285–300, 1964.
- [62] D.A. Sadovskii and B.I. Zhilinskiĭ. Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling. *Phys. Lett. A*, 256(4):235–244, 1999.

- [63] C. Sevenheck and D. van Straten. Deformation of singular lagrangian subvarieties. *Math. Ann.*, 327(1):79–102, 2003.
- [64] J. Sjöstrand. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic Analysis*, 6:29–43, 1992.
- [65] J. Sjöstrand. Perturbations of selfadjoint operators with periodic classical flow. Preprint math.SP/0303023.
- [66] P. Stefan. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. *Proc. London Math. Soc.* (3), 29:699–713, 1974.
- [67] L. Stolovitch. Singular complete integrability. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 91:133–210 (2001), 2000.
- [68] M. Symington. Four dimensions from two in symplectic topology. Preprint math.SG/0210033.
- [69] M. Symington. Generalized symplectic rational blowdowns. *Algebraic and Geometric Topology*, 1(26):503–518, 2001.
- [70] J. Toth. Various quantum mechanical aspects of quadratic forms. *Jour. Funct. Analysis*, 130:1–42, 1995.
- [71] J. Toth. On the quantum expected values of integrable metric forms. *J. Differential Geom.*, 52(2):327–374, 1999.
- [72] J. Toth and S. Zelditch. Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions. *Duke Math. J.*, 111(1):97–132, 2002.
- [73] J. Toth and S. Zelditch.  $L^p$  norms of eigenfunctions in the completely integrable case. *Ann. Henri Poincaré*, 4(2):343–368, 2003.
- [74] A. Toulet. *Classification des systèmes intégrables en dimension 2*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 1993.
- [75] J. Vey. Sur certains systèmes dynamiques séparables. *Amer. J. Math.*, 100:591–614, 1978.
- [76] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*. Number 38 in Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Springer, Berlin, 1932. Ré-édité en français par Gabay [77].
- [77] J. von Neumann. *Les fondements mathématiques de la mécanique quantique*. Jacques Gabay, 1988. Traduit par A. Proca.
- [78] S. Vũ Ngọc. *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*. PhD thesis, Université Grenoble 1, 1998.
- [79] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy in integrable systems. *Commun. Math. Phys.*, 203(2):465–479, 1999.
- [80] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2):143–217, 2000.
- [81] S. Vũ Ngọc. Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d’un point critique de l’application moment. *Asymptotic Analysis*, 24(3,4):319–342, 2000.

- [82] S. Vũ Ngọc. Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes intégrables avec singularités. In *Séminaire X-EDP*, janvier 2001.
- [83] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy and Bohr-Sommerfeld rules. *Lett. Math. Phys.*, 55(3):205–217, 2001.
- [84] S. Vũ Ngọc. Mineur’s proof of Liouville-Arnold theorem. In preparation, 2003.
- [85] S. Vũ Ngọc. Moment polytopes for symplectic manifolds with monodromy. Preprint, 2003.
- [86] S. Vũ Ngọc. On semi-global invariants for focus-focus singularities. *Topology*, 42(2):365–380, 2003.
- [87] S. Vũ Ngọc. Semiclassical quantisation of almost-toric manifolds and eigenvalue redistribution. In preparation, 2003.
- [88] A. Weinstein. Fourier integral operators, quantization, and the spectra of Riemannian manifolds. In *Géométrie symplectique et physique mathématique (Colloq. Internat. CNRS, No. 237, Aix-en-Provence, 1974)*, pages 289–298. Éditions C.N.R.S., Paris, 1975.
- [89] A. Weinstein. Asymptotics of eigenvalue clusters for the laplacian plus a potential. *Duke Math. J.*, 44(4):883–892, 1977.
- [90] A. Weinstein. Connections of Berry and Hannay type for moving lagrangean submanifolds. *Adv. in Math.*, 82:135–159, 1990.
- [91] J. Williamson. On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems. *Amer. J. Math.*, 58(1):141–163, 1936.
- [92] S. Zelditch. Wave invariants at elliptic closed geodesics. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1):145–213, 1997.
- [93] S. Zelditch. Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains. *Geom. Funct. Anal.*, 10(3):628–677, 2000.
- [94] M. Zou. Monodromy in two degrees of freedom integrable systems. *J. Geom. Phys.*, 10:37–45, 1992.
- [95] Nguyễn Tiên Zung. Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities. *Compositio Math.*, 101:179–215, 1996.
- [96] Nguyễn Tiên Zung. A note on focus-focus singularities. *Diff. Geom. Appl.*, 7(2):123–130, 1997.
- [97] Nguyễn Tiên Zung. Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, II: Topological classification. Preprint Univ. Montpellier, math.DG/0010181, to appear in *Compositio Math.*, 2000.
- [98] Nguyễn Tiên Zung. Torus action and integrable systems. Preprint, 2003.

## Publications et travaux en cours

- [san1] H. Dullin and S. Vũ Ngọc. Vanishing twist near focus-focus points. Preprint, 2003.
- [san2] S. Vũ Ngọc. Moment polytopes for symplectic manifolds with monodromy. Preprint, 2003.
- [san3] S. Vũ Ngọc. On semi-global invariants for focus-focus singularities. *Topology*, 42(2):365–380, 2003.
- [san4] Y. Colin de Verdière and S. Vũ Ngọc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36:1–55, 2003.
- [san5] R. Cushman and S. Vũ Ngọc. Sign of the monodromy for Liouville integrable systems. *Annales Henri Poincaré*, 3(5):883–894, 2002.
- [san6] S. Vũ Ngọc. Invariants symplectiques et semi-classiques des systèmes intégrables avec singularités. In *Séminaire X-EDP*, janvier 2001.
- [san7] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy and Bohr-Sommerfeld rules. *Lett. Math. Phys.*, 55(3):205–217, 2001.
- [san8] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2):143–217, 2000.
- [san9] S. Vũ Ngọc. Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d’un point critique de l’application moment. *Asymptotic Analysis*, 24(3,4):319–342, 2000.
- [san10] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy in integrable systems. *Commun. Math. Phys.*, 203(2):465–479, 1999.
- [san11] S. Vũ Ngọc. *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*. PhD thesis, Université Grenoble 1, 1998.
- [san12] S. Vũ Ngọc. Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les singularités focus-focus et monodromie quantique. In *Journées EDP*, Saint Jean de Monts, 1998. CNRS.
  
- [prep1] S. Vũ Ngọc. Mineur’s proof of Liouville-Arnold theorem. In preparation, 2003.
- [prep2] S. Vũ Ngọc. Semiclassical quantisation of almost-toric manifolds and eigenvalue redistribution. In preparation, 2003.

*Les articles référencés [san\*] sont disponibles sur ma page web :*  
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~svungoc/>