

Application de la méthode de Vojta
à des résultats de finitude sur les
variétés abéliennes et
semi-abéliennes

Gaël Rémond

Table des matières

Introduction	5
I Courbes sur les variétés abéliennes	7
1 Un peu d'ineffectivité	7
2 Notion de hauteur	8
3 Inégalités de Mumford et de Vojta	10
4 Démonstration d'une inégalité de Mumford	12
5 Uniformité	16
6 Des ensembles plus gros que $C(K)$	19
7 Points de petite hauteur	22
8 Problèmes simultanés	24
II Cadre plus général	29
1 Dimension supérieure	29
2 Cas torique et semi-abélien	32
3 Une inégalité de Vojta plus générale	35
Conclusion	39
Liste de publications	41
Bibliographie	43

Introduction

Les sujets abordés dans ce texte trouvent leur origine dans la conjecture que L. Mordell formula en 1922, prévoyant qu'une courbe de genre au moins 2 n'avait qu'un nombre fini de points rationnels sur un corps de nombres (voir [Mord]). En dépit d'une démonstration de ce fait pour une classe plus restreinte de courbes par C. Chabauty en 1941 et d'un résultat de D. Mumford, sur lequel nous reviendrons, affirmant que de tels points rationnels sont rares en un sens précis, la conjecture résista jusqu'aux travaux de G. Faltings en 1983. Il parvint à démontrer les conjectures de Tate et de Shafarevitch dont on savait depuis 1968, grâce à A. Parshin, qu'elles entraînaient celle de Mordell. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

Théorème (Faltings [F1]) *Soient K un corps de nombres, C une courbe projective lisse sur K et g le genre de C . Si $g \geq 2$ alors l'ensemble $C(K)$ est fini.*

L'histoire ne s'arrête pas là. En 1990, P. Vojta donna une seconde démonstration de ce théorème, par une voie complètement différente de celle de G. Faltings, empruntant aux techniques d'approximation diophantienne. Immédiatement après (les deux articles parurent côte à côte dans le même fascicule des *Annals of Mathematics* en 1991), G. Faltings étendit la méthode de Vojta pour montrer une généralisation de l'énoncé aux sous-variétés de variétés abéliennes. Ensuite, dans un article également publié en 1991, E. Bombieri revint au théorème initial sur les courbes avec une démonstration simplifiée. Ultérieurement, P. Vojta réussit encore à étendre sa méthode aux variétés semi-abéliennes.

Ces travaux de Vojta, Faltings et Bombieri se trouvent véritablement au cœur du présent mémoire. Nous les verrons interagir avec (voire rendre possibles) de nombreux autres résultats comme ceux de M. Raynaud, M. Laurent, M. Hindry, M. McQuillan, S. Zhang, B. Poonen... Sans entrer dans trop de détails pour cette introduction, nous souhaitons passer en revue les questions que pose le théorème ci-dessus.

Dans un premier temps, nous les classons en trois catégories.

1. Étant donné C et K comme dans le théorème, peut-on déterminer $C(K)$?
2. Peut-on, à défaut, majorer le cardinal de $C(K)$?
3. Peut-on généraliser le résultat?

Le premier point constitue un problème très intéressant, malheureusement complètement ouvert à l'heure actuelle, connu en général sous le nom de problème de Mordell effectif. Au-delà de la question naïve (suggérant une interprétation algorithmique), des conjectures précises existent, formulées notamment par L. Moret-Bailly et qui présentent des liens fascinants avec d'autres problèmes ouverts parmi lesquels brille l'élégante conjecture *abc*. Nous ne reviendrons pas sur cet aspect, sinon pour souligner que les méthodes employées (à la suite de Vojta) souffrent d'ineffectivité congénitale.

Tous les résultats que nous présenterons se situent donc dans le cadre des deux derniers points. En particulier, nous écrirons une majoration entièrement explicite du cardinal de $C(K)$ et nous donnerons des résultats de finitude nouveaux. Bien

sûr, les deux aspects se complètent : à chaque nouvel énoncé de finitude, on peut se poser la question du décompte.

Il reste à dire un peu plus précisément à quels types de généralisations nous nous intéresserons. Il existe essentiellement deux voies, éclairées chacune par des conjectures de S. Lang.

L'une consiste à déterminer toutes les variétés ayant, comme les courbes de genre au moins 2, peu de points rationnels sur les corps de nombres. Ici « peu » signifie que l'on remplace la finitude, trop restrictive, par la non-densité de ces points (pour la topologie de Zariski). La conjecture proposée par S. Lang, à savoir que ces variétés coïncident avec les variétés de type général, demeure ouverte. Les seuls cas connus (sous-variétés de variétés abéliennes) proviennent en fait de la seconde approche ci-dessous.

L'autre voie met, elle, l'accent sur la structure de groupe algébrique. Bien qu'apparemment absente de l'énoncé que nous avons donné, celle-ci entre en scène avec la jacobienne de la courbe C , qui intervient dans *toutes* les approches que nous avons citées (Chabauty, Mumford, Faltings, Vojta...). Dès lors, on peut songer à remplacer l'inclusion $C \subset J = \text{Jac}(C)$ par celle $X \subset G$ d'une variété dans un groupe algébrique commutatif. Comme, par ailleurs, le théorème de Mordell-Weil affirme que le groupe $J(K)$ est de type fini, il devient possible d'oublier les points rationnels et de ne considérer $C(K)$ que comme l'intersection de C avec un groupe de type fini. Ceci conduit à s'intéresser à des ensembles de la forme $X \cap \Gamma$ où Γ est une partie de $G(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfaisant des conditions de finitude liées à la structure de groupe de G . Les conjectures de S. Lang (maintenant démontrées) s'arrêtaient au cas d'un sous-groupe de rang fini Γ mais des problèmes intéressants apparaissent avec des ensembles plus généraux, en faisant intervenir soit (avec B. Poonen) une hauteur normalisée pour la loi de groupe soit (à la suite d'un résultat de E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier) des sous-groupes algébriques de G .

Nous reviendrons au fur et à mesure de manière précise sur ces questions. Dans un souci de simplicité, nous traiterons dans un premier chapitre uniquement du cas des courbes mais en parcourant toute la gamme des ensembles Γ : après des rappels élémentaires, nous introduirons la méthode de Vojta en suivant essentiellement Bombieri puis nous montrerons comment aller plus loin. La majorité des idées importantes apparaîtra déjà dans ce chapitre sur les courbes sans trop de complications techniques. Dans le second, nous envisagerons (plus rapidement) les problèmes propres à la dimension supérieure ainsi que le cas des variétés semi-abéliennes.

Ce panorama s'appuie sur les articles [R1, R2, R5, R6, R7] et [RV] auxquels nous renvoyons pour des détails complets.

Chapitre I

Courbes sur les variétés abéliennes

Ce chapitre passe en revue un certain nombre de problèmes de finitude sur les courbes, gravitant tous autour de la méthode de Vojta. Pour introduire cette méthode de la manière la plus simple possible, le premier paragraphe donne un résultat de finitude totalement élémentaire qui permet cependant d'appréhender déjà les différents ingrédients qui apparaîtront. Ceux-ci s'expriment précisément en termes de hauteur. Cette notion, omniprésente dans tout ce qui suit, est décrite brièvement au second paragraphe. Le troisième décrit les inégalités fondamentales dues à Vojta et Mumford en suivant le texte de Bombieri. Nous nous en écarterons ensuite pour reformuler ces inégalités et aborder une preuve de la seconde (paragraphe 4). Après un résultat d'uniformité de la majoration de $\text{Card}C(K)$ (dans un contexte approprié, voir paragraphe 5), nous montrerons comment la méthode s'étend à d'autres ensembles que $C(K)$ (paragraphe 6) quitte à faire intervenir un nouvel outil nommé ici propriété de Bogomolov (paragraphe 7). Le résultat du dernier paragraphe, quant à lui, concerne l'ensemble des points d'une courbe C qui deviennent rationnels après application d'un morphisme de C vers une variété abélienne quelconque.

1 Un peu d'ineffectivité

Ce paragraphe vise à expliquer pourquoi la méthode de Vojta donnant la finitude de $C(K)$ ne permet pas de déterminer cet ensemble, bien qu'elle puisse être rendue entièrement explicite. En fait, l'argument de Vojta seul ne suffit même pas pour borner le cardinal de $C(K)$: il faut lui adjoindre le résultat de Mumford. Nous présentons cela ici de manière volontairement très naïve à l'aide de parties de \mathbb{N} ou de \mathbb{R}_+ . Le paragraphe suivant montrera comment leur relier $C(K)$. Disons encore que la source d'ineffectivité mise en lumière ci-dessous apparaît telle quelle dans la démonstration du théorème de Roth.

Le lemme suivant donne l'argument de finitude sous sa forme la plus dépouillée.

Lemme I.1.1 *Soit A une partie de \mathbb{N} . Supposons qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que, pour tout couple (x,y) d'éléments de A , nous ayons*

$$x \leq \lambda y.$$

Alors A est finie.

DÉMONSTRATION : Si A est vide, elle est finie. Si elle contient un élément y , elle est incluse dans l'ensemble fini $[0, \lambda y] \cap \mathbb{N}$. \square

Ici, bien que l'existence de λ prouve la finitude de A , même une connaissance explicite de λ ne donne aucun moyen de déterminer un majorant de A ni de borner son cardinal comme le montre l'exemple de l'ensemble $A = \{a, a+1, \dots, [\lambda a]\}$, pour un élément arbitraire a de \mathbb{N} , dont le cardinal $[(\lambda-1)a] + 1$ et le plus grand élément $[\lambda a]$ tendent vers l'infini avec a (la notation $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x).

Notons la variante réelle tout aussi évidente.

Lemme I.1.2 *Soit A une partie de \mathbb{R}_+ . Supposons qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A , nous ayons*

$$x \leq \lambda y.$$

Alors A est bornée.

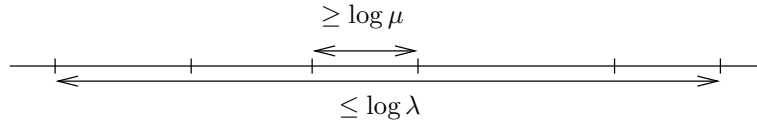
Ces deux lemmes représentent le prototype de ce que nous nommerons plus tard une inégalité de Vojta. Ajoutons maintenant un second ingrédient, qui deviendra une inégalité de Mumford.

Lemme I.1.3 *Soit A une partie de \mathbb{R}_+ . Supposons qu'il existe deux réels $\lambda, \mu > 1$ tels que, pour tout couple (x, y) d'éléments de A avec $x > y$, nous ayons*

$$x \leq \lambda y \quad \text{et} \quad x \geq \mu y.$$

Alors A est finie et son cardinal est majoré par $[\log \lambda / \log \mu] + 1$.

DÉMONSTRATION : Si A est vide, le lemme est clair. Si $0 \in A$ alors $A = \{0\}$. Sinon tout couple d'éléments distincts de A vérifie $\log \mu \leq |\log x - \log y| \leq \log \lambda$ donc, en dessinant sur une échelle logarithmique,



il y a bien au plus $1 + \log \lambda / \log \mu$ éléments dans A . \square

A présent, la connaissance de λ et μ fournit une borne explicite pour le cardinal de A mais ne permet toujours pas de donner un majorant de A : pour l'ensemble $A = \{a, \mu a, \mu^2 a, \dots, \mu^m a\}$ avec $m = [\log \lambda / \log \mu]$ et a un élément quelconque de \mathbb{R}_+ , le plus grand élément $\mu^m a$ tend encore vers l'infini avec a .

2 Notion de hauteur

Les considérations du paragraphe précédent ne s'appliquent bien entendu pas directement à l'ensemble $C(K)$. Pour voir celui-ci comme une partie de \mathbb{N} , disons, l'on pourrait songer à choisir une bijection entre un ensemble dénombrable le contenant et \mathbb{N} . Par exemple, si l'on plonge la courbe projective C dans \mathbb{P}_K^n , on obtient $C(K) \subset \mathbb{P}_K^n(K)$ voire $C(K) \subset \mathbb{P}_K^n(\overline{K})$. On pressent également qu'une bijection choisie au hasard n'aurait guère d'utilité. La notion de *hauteur* fournit un moyen naturel de mesurer les éléments de $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ et, bien que non bijective, se révèle tout à fait adaptée à nos objectifs.

Expliquons le principe. Au lieu de mettre en bijection \mathbb{Z} et \mathbb{N} , il suffit amplement de mesurer $x \in \mathbb{Z}$ par $|x| \in \mathbb{N}$: une ambiguïté finie ne nous gêne pas. De même, un rationnel p/q sous forme irréductible se mesure très bien par $\max(|p|, |q|)$. Le procédé s'étend aux nombres algébriques : si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, nous écrivons son polynôme minimal sur \mathbb{Z} comme $\mu_x = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$ et mesurons x par $\max(d, |a_d|, \dots, |a_0|)$. Cette définition simple satisfait à la propriété essentielle d'une mesure arithmétique (une

application $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{N}$ à fibres finies) et s'étendrait à $\overline{\mathbb{Q}}^n$ ou à $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$. Nous utilisons en fait une notion un tout petit peu plus technique, qui consiste à mesurer plutôt les racines de μ_x que ses coefficients (et il vaut mieux ne pas mettre le degré sur le même plan).

De manière précise, définissons la hauteur de Weil logarithmique et absolue d'un point $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$. Soient (x_0, \dots, x_n) des coordonnées projectives quelconques de x et $K = \mathbb{Q}(x_0, \dots, x_n)$ le corps de nombres qu'elles engendrent. Alors nous posons

$$h(x) = \sum_{v \in M(K)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v)$$

où $M(K)$ est l'ensemble des places de K et, pour chaque telle place, K_v est le complété de K en v ; nous normalisons les valeurs absolues de sorte que $|2|_v = 2$ si v est archimédienne ($\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$) et $|p|_v = p^{-1}$ si v divise le nombre premier p ($\mathbb{Q}_v = \mathbb{Q}_p$). On vérifie sans peine que cette définition ne dépend pas du choix de coordonnées effectué. L'introduction apparemment gratuite du logarithme dans la formule s'avère commode pour écrire un certain nombre d'énoncés (voir notamment le théorème de Néron-Tate ci-dessous). Cette hauteur est dite absolue du fait de la division par $[K : \mathbb{Q}]$. Nous n'obtenons pas une application $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ à fibres finies mais elle le devient si l'on borne le degré.

Théorème I.2.1 (Northcott) *Étant donné un entier d et un réel H , il n'y a qu'un nombre fini de points x de $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $\deg x \leq d$ et $h(x) \leq H$.*

Ce théorème se démontre sans difficulté: en se restreignant, disons, à $x = (1 : x_1 : \dots : x_n)$ et en considérant les polynômes minimaux des x_i sur \mathbb{Z} , on borne leurs coefficients à l'aide de d et H grâce aux relations entre coefficients et racines.

Nous disposons désormais du moyen de munir tout schéma projectif X sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de hauteurs: tout plongement de la forme $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$ induit une application $h: X(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par composition. Sans rappeler ici toute la théorie de ces hauteurs de Weil, disons simplement que l'application h ne dépend essentiellement que du faisceau inversible $\iota^*\mathcal{O}(1)$ au sens suivant: si deux plongements ι et ι' de X vérifient $\iota^*\mathcal{O}(1) \simeq \iota'^*\mathcal{O}(1)$ alors les fonctions correspondantes h et h' ne diffèrent que par une application bornée de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ vers \mathbb{R} (autrement dit, il existe un réel c tel que si $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ alors $|h(x) - h'(x)| \leq c$).

Si nous revenons au cas d'une courbe C sur un corps de nombres K , nous pouvons munir $C(\overline{K})$ d'une hauteur grâce à un plongement $C \times \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{K}}^n \simeq \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$. Pour simplifier, nous supposons que celui-ci provient d'un plongement $C \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$ (par ailleurs le choix d'un isomorphisme $\overline{K} \simeq \overline{\mathbb{Q}}$ n'interfère pas car la hauteur $h: \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ est stable par action du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$). De cette façon, le degré de K majore le degré de l'image d'un point de $C(K)$ dans $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$ et donc, d'après le théorème de Northcott, l'ensemble $C(K)$ est fini si et seulement si la hauteur reste bornée sur celui-ci.

Dans la suite, des inégalités exprimées en termes de hauteurs analogues à celle du paragraphe précédent permettront de montrer la finitude de $C(K)$ mais non de majorer sa hauteur. Ainsi, comme nous l'avons dit dans l'introduction, le problème de Mordell effectif reste hors de portée: la détermination de $C(K)$ équivaut sensiblement à connaître une borne pour la hauteur de ses points (et les conjectures précises que nous avons évoquées consistent à prévoir la forme de cette borne en fonction des données, principalement du corps K ; voir par exemple [M-B]).

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il nous reste à introduire un dernier ingrédient, provenant de la théorie générale des hauteurs. Alors que, sur un schéma quelconque, le choix d'un faisceau inversible ne détermine pas de manière unique une application hauteur, puisqu'il faut choisir soit un plongement comme plus haut

soit des métriques dans le formalisme arakélovien, en revanche, sur une variété abélienne A , nous pouvons attacher canoniquement à tout faisceau inversible une unique application $A(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$, dite hauteur de Néron-Tate. En d'autres termes, il s'agit de sélectionner parmi une famille d'applications différant deux à deux par une fonction bornée la plus adaptée à la structure de groupe abélien sur $A(\overline{\mathbb{Q}})$. Par commodité, nous énonçons le résultat seulement pour des faisceaux inversibles très amples et symétriques. Une forme quadratique sur un groupe abélien G est une application $q: G \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $q(a+b) + q(a-b) = 2q(a) + 2q(b)$ pour tous a, b dans G ; elle induit une forme quadratique au sens usuel $G \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème I.2.2 (Néron-Tate) *Soient A une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et \mathcal{L} un faisceau inversible symétrique et très ample sur A . Il existe une unique forme quadratique q sur $A(\overline{\mathbb{Q}})$ telle que pour tout plongement $\iota: A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$ vérifiant $\iota^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{L}$ il existe un réel c de sorte que*

$$|q(x) - h(\iota(x))| \leq c$$

pour tout $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. De plus, la forme quadratique induite par q sur $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ est définie positive.

En suivant Tate, l'existence de q se démontre sans difficulté à l'aide du théorème du cube, la construction s'obtenant par un procédé limite :

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} h(\iota(2^n x)).$$

Dans la suite, chaque fois que nous aurons affaire à une hauteur de Néron-Tate, nous noterons $|\cdot|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire associés c'est-à-dire $|x| = q(x)^{1/2}$ et $\langle x, y \rangle = (q(x+y) - q(x) - q(y))/2$ pour $x, y \in A(\overline{\mathbb{Q}})$.

3 Inégalités de Mumford et de Vojta

Nous en venons aux inégalités qui sont au cœur de la preuve de Vojta. Nous considérons donc une courbe projective et lisse C sur un corps de nombres K dont le genre g est au moins 2. Nous supposons que $C(K)$ n'est pas vide et nous plongeons C dans sa jacobienne J à l'aide d'un point rationnel $P_0 \in C(K)$ fixé. Si Θ désigne le diviseur thêta sur J , nous notons \mathcal{L} le faisceau inversible correspondant au diviseur $3(\Theta + [-1]^*\Theta)$ très ample et symétrique. Nous nous intéressons alors à la hauteur de Néron-Tate $|\cdot|^2$ associée à \mathcal{L} qui induit une application $C(\overline{K}) \subset J(\overline{K}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème I.3.1 *Avec les notations précédentes, il existe deux réels $\gamma_1 \geq 0$ et $\gamma_2 > 1$ tels que si x et y sont deux éléments distincts de $C(\overline{K})$ vérifiant*

$$|y| \geq |x| \geq \gamma_1 \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle \geq \frac{3}{4}|x||y|$$

alors

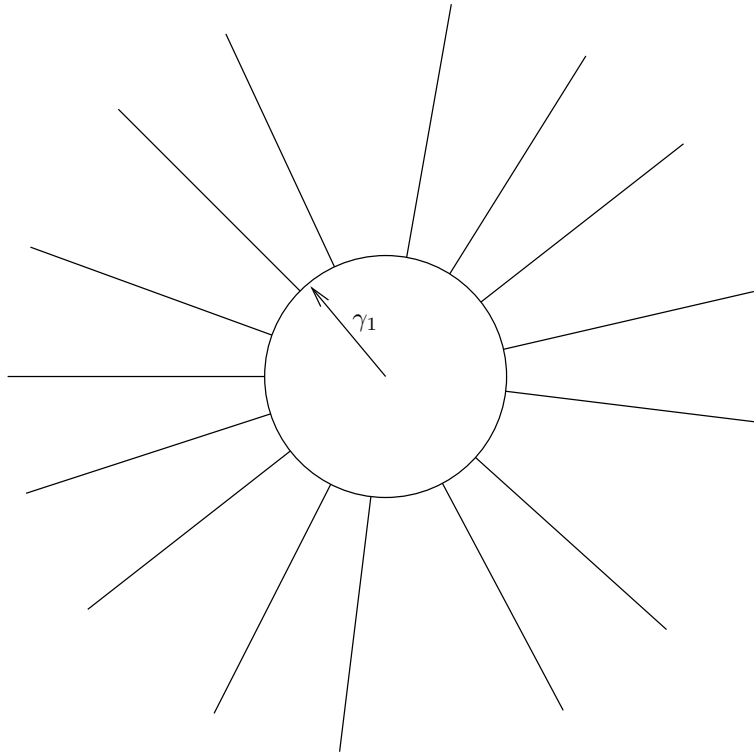
- (Mumford) $|y| \geq g|x|$;
- (Vojta) $|y| \leq \gamma_2|x|$.

Nous nous intéresserons plus tard à la démonstration d'inégalités de cette forme. Indiquons seulement ici comment déduire la version citée de l'article de Bombieri [Bom]. La partie que nous appelons inégalité de Vojta figure telle quelle dans son théorème 1 page 637 (en choisissant $\gamma_1 = \gamma_2$) tandis que l'inégalité de Mumford découle du théorème donné page 623 (voir aussi [Mum]) de la façon suivante: en choisissant γ_1 suffisamment grand devant c_3 , le théorème affirme que si

$|y| \geq |x| \geq \gamma_1$ alors $(1/2g)(|x|^2 + |y|^2) - \langle x, y \rangle \geq -(1/8)|x||y|$; si de plus nous supposons $\langle x, y \rangle \geq (3/4)|x||y|$ il vient $|x|^2 - (5g/4)|x||y| + |y|^2 \geq 0$; comme le polynôme $X^2 - (5g/4)X + 1$ est négatif sur $[1, g]$, nous constatons effectivement que $|y|/|x| \geq 1$ entraîne $|y|/|x| \geq g$.

Nous nous tournons maintenant vers la partie facile de la démonstration, celle qui consiste à déduire la finitude et le décompte de $C(K)$ du théorème I.3.1 ci-dessus. Nous la détaillons tout de même en vue des généralisations ultérieures (voir aussi [Bom, page 638]).

Il n'aura échappé à personne que nos deux inégalités centrales se veulent le pendant de celles du lemme I.1.3. Toutefois, pour pouvoir réellement appliquer ce dernier, il nous faut traiter des conditions sur x et y : la première $|y| \geq |x| \geq \gamma_1$ coûte peu; la seconde, en revanche, exprime que l'angle entre x et y est faible (précisément, inférieur à $\text{Arccos}(3/4)$). Ceci a un sens dans l'espace $J(\overline{K}) \otimes \mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$. Nous utilisons maintenant de manière cruciale le théorème de Mordell-Weil qui assure que le groupe $J(K)$ est de type fini. Ainsi, nous pouvons partitionner de la façon suivante l'espace euclidien $E = J(K) \otimes \mathbb{R}$:



nous isolons la boule de rayon γ_1 centrée en l'origine sur laquelle le théorème I.3.1 ne dit rien et nous répartissons le reste des points en un nombre fini d'ensembles où deux points quelconques vérifient $\langle x, y \rangle \geq (3/4)|x||y|$. Pour faire ceci, il suffit de recouvrir l'espace par un nombre fini de cônes d'angle au sommet commun assez petit, ce qui est clairement possible par compacité de la sphère unité de E . On vérifie même de manière explicite que l'on peut se contenter de $7^{\dim E}$ ensembles (voir par exemple le corollaire 6.1 page 542 de [R2] qui donne $1 + 4\sqrt{2} \leq 7$).

Nous nous concentrons à présent sur un ensemble $A \subset C(K)$ dont tous les points vérifient $|x| \geq \gamma_1$ et $\langle x, y \rangle \geq (3/4)|x||y|$. Alors les lemmes I.1.2 et I.1.3 s'appliquent à la partie $|A|$ de \mathbb{R}_+ , image de A par l'application norme, avec $\lambda = \gamma_2$ et $\mu = g$. En ne retenant d'abord que le premier, nous voyons que $|A|$ est bornée, autrement dit que A est de hauteur bornée. Puisque les points de $C(K)$ de hauteur au moins γ_1^2 se répartissent en un nombre fini de tels ensembles A , il appert que $C(K)$ lui-même

est de hauteur bornée. Comme nous l'avons vu plus haut, ceci entraîne bien, *via* le théorème de Northcott, la finitude de $C(K)$. L'inégalité de Vojta seule a donc suffi à établir la conjecture de Mordell.

Pour avoir un résultat de décompte, nous faisons jouer en outre l'inégalité de Mumford. D'après le lemme I.1.3, la partie $|A|$ considérée ci-dessus a au plus $1 + \log \gamma_2 / \log g$ éléments. Il en va par suite de même de A , car l'inégalité de Mumford montre l'injectivité de l'application $A \rightarrow |A|$ (si $x \neq y \in A$, ou bien $|y| \geq g|x|$ ou bien $|x| \geq g|y|$). En combinant avec la borne sur le nombre de tels ensembles A , nous aboutissons à la majoration

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x| \geq \gamma_1\} \leq 7^r(1 + (\log \gamma_2)/(\log g))$$

où maintenant r désigne le rang de $J(K)$.

Pour majorer $\text{Card}C(K)$, il reste à estimer le cardinal de $\{x \in C(K) \mid |x| \leq \gamma_1\}$. Comme la finitude de cet ensemble découle à nouveau du théorème de Northcott, la méthode la plus naturelle consisterait à utiliser une forme effective de ce résultat. Toutefois cette approche, bien que réalisable, ne fournit pas de bornes satisfaisantes. Aussi reviendrons-nous sur ce problème plus bas, lorsque nous disposerons d'une technique plus fine.

Enfin, avant de nous écarter du cadre original de la méthode de Vojta (celui de [V1] et [Bom]), nous terminons par une remarque propre à celui-ci. En effet, la formule de décompte que nous avons donnée n'a d'intérêt que si l'on connaît γ_1 et γ_2 . Le texte de Bombieri indique que ces constantes peuvent être déterminées explicitement, sans préciser le calcul. Si l'estimation de γ_1 s'avère laborieuse (voir [R1]), celle de γ_2 se déduit plus facilement. La remarque, attribuée à J. Oesterlé par [HS], est alors que l'on peut choisir pour γ_2 une puissance de g et donc que la borne pour les points de norme au moins γ_1 ne dépend pas de g . Précisément, nous pouvons écrire

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x| \geq \gamma_1\} \leq 7^{r+2};$$

voir [dDi] qui explicite les détails.

4 Démonstration d'une inégalité de Mumford

Dorénavant, nous modifions quelque peu la perspective. Au lieu de plonger une courbe dans sa jacobienne, nous considérons une courbe C donnée comme sous-schéma fermé intègre d'une variété abélienne A sur le corps de nombres K . Incidemment, nous ne faisons plus d'hypothèse de régularité sur C . La condition sur le genre de la courbe se transforme en: C n'est pas une courbe elliptique — intrinsèquement — ou le translaté d'une courbe elliptique — comme sous-variété de A (ici nous supposons encore pour simplifier que C admet un point rationnel).

Ce changement de cadre apporte peu en termes de résultats: nous visons toujours la finitude de $C(K)$, mais permet une variation dans la méthode. Ce nouvel éclairage nous conduit à reformuler les inégalités du paragraphe précédent et sera, à terme, plus susceptible de généralisations. Nous commençons par une version de l'inégalité de Mumford, plus faible que l'originale car nous nous sommes interdit de tirer parti des relations privilégiées entre C et sa jacobienne. Nous en donnons une démonstration complète moyennant quelques outils de théorie des hauteurs.

La variété abélienne A est désormais fixée, ainsi qu'un faisceau inversible \mathcal{L} très ample et symétrique sur A . Celui-ci fournit une hauteur de Néron-Tate et une notion de degré sur les sous-schémas fermés de A : par exemple, $\text{deg } C$ désigne le nombre d'intersection $\mathcal{L} \cdot C$. Par ailleurs, nous utilisons le stabilisateur d'un sous-schéma fermé X de A , à savoir le sous-schéma en groupes de A dont les points sur \overline{K} sont les éléments $a \in A(\overline{K})$ tels que $a + X \subset X$.

Notre argument s'articule autour du morphisme de différence

$$\begin{aligned} f: C \times C &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto x - y. \end{aligned}$$

Le lemme simple suivant en constitue la partie géométrique.

Lemme I.4.1 *Soit a un élément de $A(\overline{K})$. La fibre $f^{-1}(a)$ est finie si et seulement si $a \notin \text{Stab}(C)$.*

DÉMONSTRATION : Nous avons

$$f^{-1}(a) = \{(x, x - a) \mid x \in C \cap a + C\}.$$

Cet ensemble est donc infini si et seulement si $C \cap a + C$ l'est. Par dimension et irréductibilité de C , ceci équivaut exactement à $a + C = C$ c'est-à-dire à $a \in \text{Stab}(C)$. \square

Si le stabilisateur $\text{Stab}(C)$ était infini, il serait une courbe elliptique et C en serait un translaté. Par conséquent, dans notre situation, la courbe C a un stabilisateur fini et, par le lemme, f est génériquement fini.

L'étape suivante s'appuie sur une idée simple. Étant donné deux points x et y de $C(\overline{K})$ tels que $x - y \notin \text{Stab}(C)$, puisque (x, y) fait partie de l'ensemble fini $f^{-1}(x - y)$, il doit être possible de contrôler (x, y) en fonction uniquement de $x - y$. Plus précisément, en termes de hauteurs, nous espérons une majoration de la forme $h(x) + h(y) \leq ch(x - y) + c'$. Nous verrons pourquoi ceci s'apparente à l'inégalité de Mumford.

De manière naïve, les équations du fermé $f^{-1}(x - y)$ s'obtiennent clairement à l'aide de celles de C , des coordonnées de $x - y$ et des formules donnant la soustraction de A . Nous pourrions en déduire une majoration de la hauteur du point (x, y) de même que la hauteur de l'une des racines d'un polynôme en une variable se borne facilement en termes des coefficients. Ce procédé suffirait pour obtenir le résultat cherché (bien que de manière un peu laborieuse). Nous préférons esquisser une démonstration à l'aide de hauteurs de sous-schémas.

Celles-ci fournissent une manière plus canonique de mesurer la hauteur d'un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ que celle qui consiste à choisir des équations et à évaluer la hauteur de la famille de leurs coefficients. Elles ont été introduites d'une part par Faltings, Bost-Gillet-Soulé en termes d'intersection arithmétique et d'autre part par P. Philippon en termes de formes éliminantes. Dans les deux cas, la définition requiert trop de préparatifs pour être donnée commodément ici (voir [BGS], [Phi] ou [R3]).

Nous fixons donc un plongement $\iota: A \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$ tel que $\iota^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{L}$ et nous notons $h(C)$ la hauteur de C à travers ce plongement. Nous utilisons également la lettre h pour la hauteur de Weil sur $A(\overline{K})$ induite par ι , qui diffère de la hauteur de Néron-Tate $|\cdot|^2$ par au plus une constante (notée c_{NT}). Remarquons que le choix de plongement pour définir $h(C)$ (également nécessaire si l'on avait voulu parler d'équations ou de coordonnées) peut se remplacer par un choix de métriques sur \mathcal{L} dans le formalisme arakélovien, comme pour la hauteur des points ; en outre il existe une notion de hauteur normalisée $\hat{h}(C)$ généralisant la hauteur de Néron-Tate mais son emploi n'apporterait rien ici.

Pour en revenir à notre problème, c'est-à-dire contrôler x et y à l'aide de $x - y$, nous utilisons le lemme sous la forme suivante : si $x - y \notin \text{Stab}(C)$ alors x est un point isolé de l'intersection $C \cap x - y + C$. Par suite, la hauteur de x est majorée par celle de l'intersection. Sachant comment se comporte la hauteur par intersection et

translation, cela conduit à une borne en termes de $h(x - y)$ et $h(C)$. En écrivant cela précisément, nous avons le résultat suivant.

Proposition I.4.1 *Il existe un réel h_0 ne dépendant que de A et ι tel que, si x et y sont des points de $C(\overline{K})$ vérifiant $x - y \notin \text{Stab}(C)$, alors*

$$h(x) \leq 3Dh(C) + 2D^2h(y - x) + 8D^3 + D^2h_0$$

où $D = \deg C$.

DÉMONSTRATION : Voir le calcul fait pages 522 et 523 de [R2] (la méthode employée diffère très légèrement de celle indiquée ci-dessus, étant adaptée à un cadre plus général). Nous posons $h_0 = h_1 + 8 \log(n + 1)$ avec les notations de ce texte. \square

Remarque : la constante h_0 doit être vue comme la hauteur des formules d'addition de A . Comme c_{NT} , elle se réduit essentiellement à la hauteur de Faltings de A . On pourra consulter [DP2] pour des formules précises.

Nous appliquons la proposition aux couples (x, y) et (y, x) et employons les comparaisons $|x|^2 \leq h(x) + c_{\text{NT}}$, $|y|^2 \leq h(y) + c_{\text{NT}}$ et $h(x - y), h(y - x) \leq |x - y|^2 + c_{\text{NT}}$ pour obtenir, toujours sous l'hypothèse $x - y \notin \text{Stab}(C)$,

$$|x|^2 + |y|^2 \leq 6Dh(C) + 4D^2|x - y|^2 + 16D^3 + 2D^2h_0 + (4D^2 + 2)c_{\text{NT}}.$$

Si nous supposons de plus $|x|$ et $|y|$ assez grands, disons

$$|x|^2, |y|^2 \geq 6Dh(C) + 16D^3 + 2D^2h_0 + (4D^2 + 2)c_{\text{NT}},$$

alors l'inégalité devient

$$|x|^2 + |y|^2 \leq 8D^2|x - y|^2.$$

Pour interpréter ceci comme une inégalité de Mumford (voir aussi [Bom, page 623]), nous devons encore imposer que l'angle entre x et y soit petit. La valeur $3/4$ qui apparaissait au paragraphe précédent ne convient plus mais si nous supposons

$$\langle x, y \rangle \geq (1 - 1/16D^2)|x||y|$$

l'argument peut continuer. En effet, cette minoration se réécrit

$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq (|x| - |y|)^2 + (8D^2)^{-1}|x||y|.$$

L'inégalité principale devient alors

$$|x|^2 + |y|^2 \leq 8D^2(|x| - |y|)^2 + |x||y|.$$

Par symétrie disons que $|x| \leq |y|$ donc $|x||y| \leq |y|^2$ et il reste

$$|x| \leq \sqrt{8D}(|y| - |x|)$$

soit

$$|y| \geq (1 + (\sqrt{8D})^{-1})|x|.$$

Énonçons à présent le résultat obtenu sous une forme semblable à celle du théorème I.3.1.

Proposition I.4.2 *Il existe trois réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que si x et y sont deux éléments de $C(\overline{K})$ vérifiant $x - y \notin \text{Stab}(C)$,*

$$|y|^2 \geq |x|^2 \geq c_3 \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle \geq (1 - 1/c_1)|x||y|$$

alors

$$|y| \geq (1 + 1/c_4)|x|.$$

Les noms c_1, c_3, c_4 respectent les notations communes aux articles [R1, R2, R5, R6, R7, RV] (et c_2 ne tardera pas à les rejoindre). Nous avons montré la proposition avec $c_1 = 16D^2$, $c_4 = \sqrt{8}D$ et

$$c_3 = 6Dh(C) + 16D^3 + 2D^2h_0 + (4D^2 + 2)c_{\text{NT}}.$$

Dans le théorème I.3.1, nous avons $c_1 = 4$, $c_4 = 1/(g-1)$ et $c_3 = \gamma_1^2$ (non précisé). Il est important de noter que si la proposition vaut pour un triplet (c_1, c_3, c_4) elle vaut de même pour tout triplet plus grand (pour l'ordre produit). Ainsi, nous avons affaibli le théorème I.3.1 de deux façons : en augmentant d'une part les valeurs de c_1 et c_4 et en remplaçant d'autre part la condition $x \neq y$ par $x - y \notin \text{Stab}(C)$. Pour autant, l'argument de décompte ne se trouve pas compromis : si, sous les hypothèses de la proposition, nous avons simultanément une inégalité de Vojta $|y| \leq \gamma_2|x|$, alors, en faisant intervenir plus de cônes, nous aurions

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x|^2 \geq c_3\} \leq \text{CardStab}(C)(1 + \sqrt{8c_1})^r \left(1 + \frac{\log \gamma_2}{\log(1 + \frac{1}{c_4})}\right)$$

où r désigne le rang de $A(K)$ (fini à nouveau d'après le théorème de Mordell-Weil). De plus, on montre facilement $\text{CardStab}(C) \leq D^2$. Le changement de méthode donne certes une borne moins fine mais, pour majorer $C(K)$, cela n'a guère d'influence car, en pratique, le terme principal provient de l'estimation du nombre des points vérifiant $|x|^2 \leq c_3$ (voir paragraphe 7).

Envisageons maintenant ce que devient l'inégalité de Vojta dans ce cadre. Elle apparaît d'une certaine façon comme une généralisation de l'inégalité de Mumford avec paramètre. En effet, la partie géométrique repose sur le morphisme α suivant, associé à un entier $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} C \times C &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto sx - y. \end{aligned}$$

Pour $s = 1$, nous retrouvons le morphisme f précédent. La propriété de finitude qui nous intéresse ici est donnée par le résultat suivant.

Lemme I.4.2 *Si $\text{Stab}(C)$ est fini et si $|s| > 1$ alors le morphisme α est fini.*

DÉMONSTRATION : Si $a \in A(\overline{K})$, la seconde projection $C \times C \rightarrow C$ induit un morphisme surjectif et fini

$$\alpha^{-1}(a) \longrightarrow C \cap (sC - a).$$

Par suite, si $\alpha^{-1}(a)$ est infinie, il en va de même de $C \cap (sC - a)$ donc $C = sC - a$. En itérant cette formule, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$C = s^n C + \frac{1 - s^n}{s - 1} a.$$

Le degré du terme de droite vaut $\deg(s^n C) = s^{2n} \deg(C) / \text{Card}(\text{Ker}[s^n] \cap \text{Stab}(C))$ (voir [Hin, lemme 6]). Par conséquent, si la fibre $\alpha^{-1}(a)$ n'est pas finie, nous trouvons $\text{CardStab}(C) \geq \text{CardKer}[s^n] \cap \text{Stab}(C) = s^{2n}$ pour tout $n \geq 1$ ce qui entraîne que $\text{Stab}(C)$ est infini. \square

De même que la propriété géométrique de f se traduisait en l'inégalité $|x|^2 + |y|^2 \leq 8D^2|x - y|^2$ pour $|x|$ et $|y|$ assez grands, la finitude de α se reflète dans le fait suivant : pour $|x|$, $|y|$ et s assez grands

$$s^2|x|^2 + |y|^2 \leq 2^{22}D^2|sx - y|^2.$$

Au-delà de la valeur numérique (tirée des calculs de [R1]), il importe surtout que le coefficient devant $|sx - y|^2$ ne dépende pas de s . En effet, alors qu'une inégalité avec cette dépendance s'obtiendrait facilement en suivant le même cheminement que pour l'inégalité de Mumford, elle ne donnerait qu'un résultat d'espacement (de la forme : y n'est pas trop proche de sx). Ici, en revanche, nous avons la possibilité de choisir s arbitrairement grand et cela permet de raisonner comme suit. Nous imposons

$$\langle x, y \rangle \geq (1 - (2^{23}D^2)^{-1})|x||y|$$

qui, comme plus haut, se traduit en

$$|sx - y|^2 \leq (s|x| - |y|)^2 + (2^{22}D^2)^{-1}s|x||y|.$$

L'inégalité devient donc

$$s^2|x|^2 + |y|^2 \leq 2^{22}D^2(s|x| - |y|)^2 + s|x||y|.$$

Si nous pouvons choisir pour s l'entier le plus proche de $|y|/|x|$ de sorte que $|s|x| - |y|| \leq |x|/2$ nous avons

$$s^2|x|^2 + |y|^2 \leq 2^{20}D^2|x|^2 + |y|^2 + |x|^2/4.$$

Ceci borne s donc $|y|/|x|$. Si nous ne pouvons choisir s comme indiqué, cela signifie simplement que $|y|/|x|$ n'atteint pas la valeur limite sur s à partir de laquelle l'inégalité vaut mais dans ce cas $|y|/|x|$ est évidemment borné. Nous avons donc une inégalité de Vojta.

Proposition I.4.3 *Il existe trois réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que si x et y sont deux éléments de $C(\overline{K})$ vérifiant*

$$|x|^2, |y|^2 \geq c_3 \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle \geq (1 - 1/c_1)|x||y|$$

alors

$$|y| \leq c_2|x|.$$

Les calculs de [R1] démontrent ceci avec $c_1 = 2^{24}D^2$, $c_2 = 2^{43}D^6$ et (en majorant un peu à partir du théorème 1.2)

$$c_3 = 2^{140}D^{20}n^2(h(C) + h_0 + c_{\text{NT}}).$$

Bien entendu, nous n'avons fait qu'effleurer la démonstration de l'inégalité de Vojta, toute la difficulté résidant dans la preuve de la majoration $s^2|x|^2 + |y|^2 \leq 2^{22}D^2|sx - y|^2$. Nous résumerons les ingrédients nécessaires plus bas dans un cadre beaucoup plus général (paragraphe 3 du chapitre suivant) mais ils restent proches de ceux de Bombieri (voir [Bom] ou encore [HS, partie E]).

5 Uniformité

Le résultat de ce paragraphe ne présente guère d'intérêt pour une courbe unique plongée dans sa jacobienne mais il devient déjà non trivial lorsque nous considérons toutes les courbes tracées sur une variété abélienne donnée et, surtout, l'argument utilisé se révèle absolument fondamental pour établir une inégalité de Mumford en dimension supérieure. Ceci constitue le point crucial de [R2], sur lequel nous reviendrons, mais la démarche apparaît déjà clairement dans le cas d'une courbe.

Pour appréhender l'amélioration que nous avons en vue, rappelons que les énoncés du paragraphe précédent montrent qu'il existe deux réels α et β et un entier N tels que

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x|^2 \geq \alpha h(C) + \beta\} \leq N,$$

où α , β et N ne dépendent de la courbe C que par son degré. Ce sont même des polynômes en ce dernier ; pour le reste ils dépendent de A , de K (à travers le rang de $A(K)$) et du plongement fixé.

Notre objectif consiste à établir que ce fait, de manière surprenante, entraîne une assertion de la même forme où la hauteur de C a disparu ! En première approximation, le principe est le suivant : soit la courbe C a peu de points rationnels et l'on borne immédiatement $\text{Card}C(K)$, soit elle en a beaucoup et alors la hauteur de C est contrôlée par ses points rationnels.

Il nous faudra un argument plus imbriqué mais nous commençons bien par un contrôle de la hauteur de C . Qu'il soit possible se voit très simplement sur l'observation géométrique élémentaire que *dans \mathbb{P}^n une courbe irréductible de degré D est entièrement déterminée par la donnée de $D^2 + 1$ de ses points*. En effet, d'après le théorème de Bézout, deux courbes irréductibles de degré D distinctes ne peuvent partager plus de D^2 points. La hauteur de C doit donc se contrôler en termes des hauteurs de $D^2 + 1$ points fixés. En pratique, nous augmentons le nombre de ces points pour faciliter la majoration.

Lemme I.5.1 *Soit $M = (n+1)D^2$. Si x_0, \dots, x_M sont des points distincts de $C(\overline{K})$ alors*

$$h(C) \leq (n+1)^2 D \left(\max_{0 \leq i \leq M} |x_i|^2 + c_{NT} + 3 \log(n+1) \right).$$

DÉMONSTRATION : Voir le lemme 3.1 de [R2]. Pour être efficace, nous y utilisons une majoration de fonction de Hilbert arithmétique due à S. David et P. Philippon (voir [DP1]). \square

Si nous combinons avec la majoration de cardinal que nous avons, nous constatons qu'il existe deux réels α' et β' , dépendant des données de la même façon que α et β , de sorte que si x_0, \dots, x_M sont des points distincts de $C(\overline{K})$ alors

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x|^2 \geq \alpha' \max_{0 \leq i \leq M} |x_i|^2 + \beta'\} \leq N.$$

Ceci nous intéresse bien sûr lorsque les x_i sont rationnels. De plus, puisque α' et β' ne dépendent de C que par son degré, la même formule vaut pour toute courbe obtenue à partir de C par translation, en particulier $C - x_0$. Ainsi, si x_0, \dots, x_M sont des points rationnels distincts de C , alors

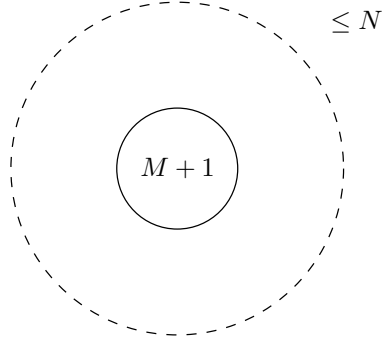
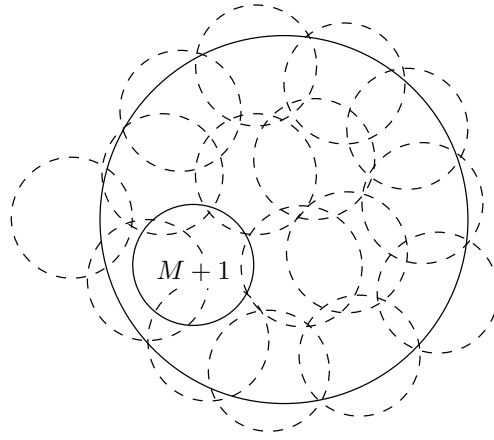
$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x - x_0|^2 \geq \alpha' \max_{1 \leq i \leq M} |x_i - x_0|^2 + \beta'\} \leq N.$$

Nous interprétons ceci comme un principe de concentration : dès que $M + 1$ points sont proches entr'eux, tous les points sauf au plus N sont relativement proches des premiers. De manière plus précise, en termes de boules dans l'espace euclidien $J(K) \otimes \mathbb{R}$:

si une boule de rayon ρ contient $M + 1$ points rationnels, alors tous les points rationnels sauf au plus N sont contenus dans une boule de rayon $\sqrt{\alpha' \rho^2 + \beta'}$.

Pour obtenir $M + 1$ points assez rapprochés, nous nous basons sur le principe des tiroirs. Pour tout réel $\mu \geq 1$, cela donne :

si une boule de rayon R contient un nombre de points rationnels $\geq (2\mu + 1)^r M + 1$, alors il existe une boule de rayon R/μ en contenant $M + 1$.

FIG. I.1 – *Principe de concentration.*FIG. I.2 – *Principe des tiroirs.*

En effet, le lemme 6.1 de [R2] montre qu'une boule de rayon R est recouverte par moins de $(2\mu + 1)^r$ boules de rayon R/μ . Nous choisissons maintenant $\mu = \sqrt{2\alpha'}$. En emboîtant nos résultats (avec $\rho = R/\mu$), nous obtenons donc :

si une boule de rayon R contient plus de $(\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + 1$ points rationnels, alors tous les points rationnels sauf au plus N sont contenus dans une boule de rayon $\sqrt{R^2/2 + \beta'}$.

Nous considérons alors deux cas : ou bien $\text{Card}C(K) \leq (\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + N$ et notre objectif est déjà atteint (!) ou bien $\text{Card}C(K) \geq (\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + N + 1$. Dans ce dernier cas, une boule contenant tous les points rationnels sauf N en contient nécessairement plus de $(\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + 1$. Nous reformulons donc la propriété que nous avons obtenue ainsi :

si une boule de rayon R contient tous les points rationnels sauf au plus N , alors la même propriété est vraie pour une boule de rayon $\sqrt{R^2/2 + \beta'}$.

Il reste seulement à itérer ce procédé : pour R assez grand il existe bien une telle boule (nous savons que $R^2 = \alpha'h(C) + \beta'$ convient mais nous pouvons aussi prendre une boule contenant $C(K)$ en entier) puis nous diminuons le rayon par $R \mapsto \sqrt{R^2/2 + \beta'}$. A la limite, $R^2 = 2\beta'$ et cela donne le résultat suivant.

Proposition I.5.1 *Si $\text{Card}C(K) > (\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + N$ alors il existe $y \in C(K)$ tel que*

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x - y|^2 > 2\beta'\} \leq N.$$

DÉMONSTRATION : C'est le raisonnement qui précède où l'on vérifie à chaque pas que l'on peut garder des boules centrées en des points rationnels. \square

Voici atteint le but fixé : la hauteur de C a bel et bien disparu. En conséquence, nous pouvons borner $\text{Card}C(K)$ indépendamment de $h(C)$. Par exemple,

$$\text{Card}C(K) \leq \text{Card}\{a \in A(K) \mid |a|^2 \leq 2\beta'\} + (\sqrt{8\alpha'} + 1)^r M + N$$

(nous serons plus précis au paragraphe 7). Le résultat présente donc une uniformité nouvelle : la même majoration vaut pour toutes les courbes de A de degré donné. En plus de cet aspect qualitatif, la disparition d'un paramètre facilite le décompte. Surtout, nous l'avons dit, elle permet de passer à la dimension supérieure : sur une surface apparaissent des courbes « exceptionnelles » dont il faut dénombrer les points et dont le degré est contrôlé mais non la hauteur (voir chapitre suivant).

6 Des ensembles plus gros que $C(K)$

Nous restons dans le cadre des deux paragraphes précédents (une courbe C sur une variété abélienne A) mais nous élargissons le champ d'application de la méthode en montrant comment elle permet de traiter des ensembles plus généraux que celui des points rationnels.

Pour commencer, nous écrivons $C(K) = C(\overline{K}) \cap A(K)$. Si nous ne retenons que la propriété de $A(K)$ d'être un sous-groupe de type fini de $A(\overline{K})$, nous pouvons nous demander si $C(\overline{K}) \cap \Gamma$ est fini pour tout sous-groupe Γ de $A(\overline{K})$ de type fini. Cette première généralisation s'avère inoffensive : pour tout tel Γ , il existe une extension finie K' de K telle que $\Gamma \subset A(K')$, par exemple en choisissant l'extension engendrée par les corps de définition d'une famille finie de générateurs de Γ , et donc $C(\overline{K}) \cap \Gamma \subset C(K')$ est fini. Elle nous permet tout de même d'oublier les points rationnels et le corps K et de modifier légèrement notre point de vue. En effet, il est plus naturel de considérer des schémas C et A sur $\overline{\mathbb{Q}}$, un sous-groupe Γ de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de type fini et d'énoncer la finitude de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$. Bien entendu, le changement est mince puisque de tels schémas proviennent d'un corps de nombres mais on gagne à ne pas le faire apparaître.

L'étape suivante consiste à affaiblir l'hypothèse sur Γ en ne demandant plus qu'il soit de type fini mais seulement de rang fini c'est-à-dire que $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ soit un espace de dimension finie sur \mathbb{Q} . Le cas particulier important $\Gamma = A_{\text{tors}}$ correspond à la conjecture de Manin-Mumford et a été démontrée par M. Raynaud [Ray]. Le cas général fut d'abord une conjecture de Lang avant de résulter de la conjonction du résultat de G. Faltings et d'un argument de M. Raynaud. Ici, nous avons vraiment progressé car Γ n'a plus aucune raison d'être défini sur un corps de nombres.

Nous pouvons ensuite, en suivant B. Poonen, épaissir le groupe de rang fini Γ . Cela signifie que l'on inclut des points très proches de Γ au sens de la hauteur de Néron-Tate. Explicitement, nous définissons, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, une partie de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ par

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + y \mid x \in \Gamma \text{ et } |y|^2 \leq \varepsilon\}$$

et le théorème, dû indépendamment à B. Poonen [Poo] et S. Zhang [Z2], affirme qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ est fini.

Finalement, nous traiterons d'un sur-ensemble de Γ_ε qui consiste à bâtir autour de Γ non plus un cylindre (pour Γ_ε) mais plutôt un cône :

$$C(\Gamma, \varepsilon) = \{x + y \mid x \in \Gamma \text{ et } |y|^2 \leq \varepsilon(1 + |x|^2)\}.$$

Cet ensemble a été introduit pour la première fois, semble-t-il, par J.-H. Evertse (dans le cas torique : voir [Ever] ; pour le cas abélien, un théorème de [Z2] s'apparente à cette situation). Ici encore, nous montrerons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini.

Bien entendu, les problèmes vont croissant puisque pour tout Γ et tout $\varepsilon \geq 0$

$$\Gamma \subset \Gamma_\varepsilon \subset \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$$

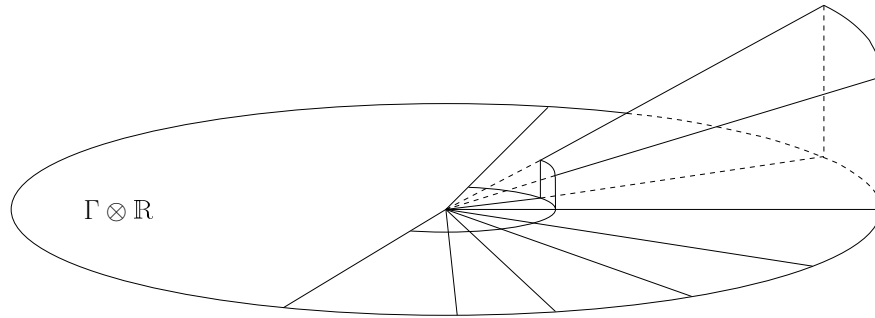
et donc il suffit de s'intéresser au dernier problème. Nous commençons par l'application de l'inégalité de Vojta. Rappelons que celle-ci avait donné seule la finitude de la hauteur de $C(K)$ et donc la finitude par le théorème de Northcott. Ici, ce dernier ne pourra pas s'appliquer puisque le degré des points de $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ (ou même de Γ) n'est pas borné et il nous faudra trouver un autre argument pour passer à la finitude. Toutefois, la première étape ne change pas : la seule inégalité de Vojta, celle que nous avons énoncée, suffit à montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la hauteur de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est bornée.

La clef de ce succès réside dans une caractéristique du théorème I.3.1, ou de la proposition I.4.3, que nous n'avons pas exploitée jusqu'ici : les inégalités de Vojta et de Mumford valent pour tous les points algébriques. Par conséquent, si nous cherchons à copier le raisonnement mené pour $C(K)$, un seul point peut éventuellement atterrir, à savoir que nous avons utilisé la dimension finie de $A(K) \otimes \mathbb{R}$ pour recouvrir $C(K)$ par un nombre fini de petits cônes. Pour $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ rien ne change puisque $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ est de dimension finie mais, en revanche, si $\varepsilon > 0$, les sous-espaces de $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ engendrés par Γ_ε et, *a fortiori*, par $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ sont résolument de dimension infinie (on voit en fait facilement qu'ils coïncident avec $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$). Pourtant, la liberté du choix de ε autorise à recouvrir ces ensembles d'un nombre fini de petits cônes.

Lemme I.6.1 *Si c_1, c_3 et ε sont trois réels tels que $c_1 \geq 1, c_3 \geq 1$ et $\varepsilon \leq 2^{-5}c_1^{-1}$ alors pour tout sous-groupe Γ de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang r il existe une partition de $\{x \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x|^2 \geq c_3\}$ en au plus $(4\sqrt{c_1} + 1)^r$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques x et y vérifient*

$$\langle x, y \rangle \geq (1 - 1/c_1)|x||y|.$$

DÉMONSTRATION : Nous commençons par recouvrir $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ par de petits cônes comme précédemment mais un peu plus petits c'est-à-dire tels que deux points quelconques x et y vérifient $\langle x, y \rangle \geq (1 - 1/2c_1)|x||y|$. Que nous puissions le faire avec moins de $(4\sqrt{c_1} + 1)^r$ ensembles résulte du corollaire 6.1 de [R2] déjà utilisé. Nous bâtissons ensuite autour d'un tel ensemble $E \subset \Gamma \otimes \mathbb{R}$ le cône $\mathcal{C}(E, \varepsilon)$ en choisissant ε assez petit pour qu'il ait la propriété requise.



Concrètement, il s'agit de vérifier que si x et y (dans Γ) satisfont $\langle x, y \rangle \geq (1 - 1/2c_1)|x||y|$ et si $|z|^2 \leq \varepsilon(1 + |x|^2), |t|^2 \leq \varepsilon(1 + |y|^2)$ avec $|x + z|^2, |y + t|^2 \geq c_3$ alors

$\langle x+z, y+t \rangle \geq (1-1/c_1)|x+z||y+t|$. Ce calcul est laissé au lecteur (voir aussi les lemmes 5.1 de [R6] et 3.3 de [RV] pour des manipulations semblables). \square

Nous avons ainsi obtenu sans grand effort le résultat suivant : si $\varepsilon \leq 2^{-5}c_1^{-1}$ alors $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est de hauteur bornée. De plus, comme l'inégalité de Mumford vaut elle aussi sans changement, nous avons sous la même condition

$$\text{Card}\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x|^2 \geq c_3\} \leq \text{CardStab}(C)(4\sqrt{c_1} + 1)^r \left(1 + \frac{\log c_2}{\log(1 + \frac{1}{c_4})}\right).$$

Avant de se poser la question de la finitude, il est naturel d'envisager à ce point ce que devient l'uniformité acquise au paragraphe précédent dans ce cadre plus général. Dans le cas d'un sous-groupe Γ de rang fini (*ie* pour $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$) il n'y a aucun changement : il suffit de remplacer partout $C(K)$ par Γ et le raisonnement reste valable.

Si nous considérons ensuite Γ_ε , l'argument devient un peu plus délicat. D'une part Γ_ε n'est pas stable par translation par l'un quelconque de ses points. En revanche, il l'est par translation par les points de Γ et nous énonçons le principe de concentration : si $y \in \Gamma$ si x_0, \dots, x_M sont des points distincts de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ alors

$$\text{Card}\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \geq \alpha' \max_{0 \leq i \leq M} |x_i - y|^2 + \beta'\} \leq N'$$

(α' et β' comme au paragraphe précédent, N' comme dans la majoration ci-dessus). Dans le reste du raisonnement, il convient ensuite de ne choisir que des boules centrées en des points de Γ . L'autre modification provient du fait que ces boules ne vivent plus dans un espace euclidien mais dans $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$. Cela pose un problème pour recouvrir une boule de rayon R par de petites boules de rayon $R/\sqrt{2\alpha'}$. Nous le contournerons comme dans la démonstration du lemme I.6.1 ci-dessus. Nous commençons par couvrir la boule correspondante de $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ par de plus petites boules puis nous choisissons ε assez petit. De manière précise, il faut couvrir les points de Γ dans la boule de rayon $R + \sqrt{\varepsilon}$ par des boules de rayon $R/\sqrt{8\alpha'}$. Alors les boules de mêmes centres et de rayon double $R/\sqrt{2\alpha'}$ recouvrent les points de Γ_ε pourvu que $\sqrt{\varepsilon} \leq R/\sqrt{8\alpha'}$. Le lemme 6.1 de [R2] montre que ceci se réalise avec au plus

$$\left(2 \frac{R + \sqrt{\varepsilon}}{R/\sqrt{8\alpha'}} + 1\right)^r = \left(4\sqrt{2\alpha'} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}\right) + 1\right)^r \leq (4\sqrt{2\alpha'} + 3)^r$$

boules. Par ailleurs, puisque R tend vers $\sqrt{2\beta'}$ dans notre application, il vient finalement que si $\varepsilon \leq 2^{-5}c_1^{-1}$, $\varepsilon \leq \beta'/4\alpha'$ et $\text{Card}C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon > (\sqrt{2^5\alpha'} + 3)^r M + N'$ alors il existe $y \in \Gamma$ tel que

$$\text{Card}\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 > 2\beta'\} \leq N'.$$

Notons qu'en pratique $\alpha' \leq \beta'$ donc la condition sur ε se résume à $\varepsilon \leq 2^{-5}c_1^{-1}$ et qu'en dehors d'icelle, nous avons un énoncé très proche de la proposition I.5.1 : le facteur $(\sqrt{8c_1} + 1)^r$ de N est remplacé dans N' par $(4\sqrt{c_1} + 1)^r$ et $(\sqrt{8\alpha'} + 1)^r$ est devenu $(\sqrt{2^5\alpha'} + 3)^r$.

En dernier lieu, on peut essayer d'appliquer le même procédé à $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ mais on se heurte alors à la difficulté insurmontable que $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ n'est stable par quasiment aucune translation. On montre en fait qu'il est impossible que cette démarche aboutisse et que la hauteur de C disparaisse : on voit facilement que, dans ce cas, la borne supérieure des ε tels que $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini tend nécessairement vers 0 quand la hauteur de C tend vers l'infini (sauf si $\Gamma \subset A_{\text{tors}}$). Signalons que le passage à la dimension supérieure s'en trouve compliqué : si la finitude est acquise, on ne connaît pas d'inégalité de Mumford et la question du décompte est ouverte.

Indépendamment des problèmes d'uniformité, il nous reste à voir pourquoi l'ensemble des points de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ de hauteur bornée est fini, au moins si ε est assez petit. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant mais notons déjà ici que l'on peut remplacer $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ par Γ_ε pour cette question. En effet, un calcul direct montre

$$\{x \in \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x|^2 \leq c\} \subset \{x \in \Gamma_{3c\varepsilon} \mid |x|^2 \leq c\}$$

pour tous réels $c \geq 1$ et $\varepsilon \leq 2^{-4}$.

7 Points de petite hauteur

Nous pouvons maintenant revenir sur un problème laissé en suspens jusqu'ici. En effet, au vu de la proposition I.5.1, il nous reste à expliquer comment borner explicitement et efficacement le nombre

$$\text{Card}\{x \in C(K) \mid |x - y|^2 \leq 2\beta'\}$$

où, rappelons-le, y est un point non précisé de $C(K)$ tandis que β' est connu explicitement et ne dépend de C que par son degré.

Par ailleurs, nous devons également terminer la démonstration de la finitude des intersections $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$, $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ et $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$. Grâce au paragraphe précédent, il nous suffit pour cela de montrer que $\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \mid |x|^2 \leq c_3\}$ est fini pour ε assez petit. Au-delà, nous nous demandons aussi comment borner le cardinal de cet ensemble et même, pour avoir une meilleure majoration dans les deux premiers cas, celui de $\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq 2\beta'\}$ pour la même valeur de β' et $y \in \Gamma$ inconnu.

Bien entendu, toutes ces questions sont intimement liées et nous pouvons les réduire à une seule. En premier lieu, l'ultime remarque du paragraphe précédent montre que ce qui concerne $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ se ramène facilement à Γ_ε . Ensuite $C(K)$ s'écrit $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ où Γ est le groupe de rang fini particulier $A(K)$. Finalement, comme $\Gamma \subset \Gamma_\varepsilon$, il nous suffit de montrer la finitude et de borner le cardinal de $\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq c\}$ pour ε assez petit où $y \in \Gamma$ et $c \in \mathbb{R}$ (d'un point de vue quantitatif, il faudrait également examiner si remplacer Γ par Γ_ε n'affecte pas trop la qualité de la borne mais en pratique cela coûte peu).

Pour résoudre le problème, nous faisons intervenir une propriété de Bogomolov. Pour en justifier l'introduction, nous pouvons noter qu'à condition de supposer $\varepsilon \leq c$ notre question comprend celle de la finitude de l'ensemble

$$\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq \varepsilon\} = \{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |x - y|^2 \leq \varepsilon\}$$

qui s'identifie avec celui des points de hauteur de Néron-Tate inférieure à ε sur la courbe $C - y$. De même, si $\Gamma = 0$, l'intersection $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ coïncide avec les points de C de hauteur au plus ε . Remarquons que l'introduction du problème de Bogomolov, bien que naturelle lorsque l'on considère Γ_ε , ne s'imposait pas *a priori* pour traiter le cas de $C(K)$; elle se révèle cependant très efficace.

Théorème I.7.1 (Ullmo-Zhang) *Il existe un réel $\eta > 0$ tel que l'ensemble des points $x \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $|x|^2 \leq \eta$ est fini.*

Ce résultat répond à la conjecture initiale de Bogomolov (nous utilisons le terme plus vague de propriété de Bogomolov pour inclure toutes les généralisations envisagées depuis) et a été établi par E. Ullmo (voir [Ull]), au moins dans le cas où A est la jacobienne de C . Ensuite, S. Zhang a généralisé l'énoncé à une sous-variété X de A de dimension quelconque. Dans les deux cas, la méthode s'appuie sur un théorème d'équidistribution dû à L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang (voir [SUZ]). De

leur côté, S. David et P. Philippon ont approché ce problème de manière différente (après des travaux de E. Bombieri et U. Zannier [BZ]) qui leur permet d'une part de produire des énoncés quantitatifs (voir [DP2]) et d'autre part de généraliser le résultat aux variétés semi-abéliennes (voir [DP3]) où la propriété d'équidistribution n'est pas connue à l'heure actuelle. En particulier, nous avons ici d'après [DP2] :

Théorème I.7.2 (David-Philippon) *Il existe un réel $q > 0$ explicitement calculable et ne dépendant de C que par son degré tel que*

$$\text{Card}\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |x|^2 \leq q^{-1}\} \leq q.$$

Dans cette formulation, le réel q joue deux rôles *a priori* différents mais, la démarche fournissant des estimations voisines pour les deux quantités, on ne perd guère à les confondre.

Nous appliquons maintenant ceci à l'ensemble $\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq c\}$. Le raisonnement fait au paragraphe précédent montre que la boule de Γ_ε centrée en y et de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ peut être recouverte par moins de $(4\sqrt{cq} + 3)^r$ boules centrées en des points de Γ et de rayon \sqrt{q} à condition que $\varepsilon \leq 1/4q$. Il existe donc une partie $E \subset \Gamma$ telle que $\text{Card}E \leq (4\sqrt{cq} + 3)^r$ et

$$\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq c\} \subset \bigcup_{z \in E} \{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |x - z|^2 \leq q^{-1}\}.$$

En appliquant le théorème de S. David et P. Philippon à chacun des translatés $C - z$ (de même degré que C), il vient donc

$$\text{Card}\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \mid |x - y|^2 \leq c\} \leq q(4\sqrt{cq} + 3)^r.$$

Notre objectif est rempli: d'une part nous avons terminé la démonstration du fait que $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est fini pour ε assez petit et d'autre part nous obtenons des résultats de décompte explicites. Par exemple, nous pouvons affirmer que si $\varepsilon \leq \min(2^{-5}c_1^{-1}, \beta'(4\alpha')^{-1}, (4q)^{-1})$ alors

$$\text{Card}C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \leq q(4\sqrt{2\beta'q} + 3)^r + (\sqrt{2^5\alpha'} + 3)^r M + N'$$

avec les notations introduites au fur et à mesure dans les paragraphes précédents. En particulier, cette borne ne dépend de C qu'à travers son degré (la dépendance étant même polynomiale). Nous trouvons également une borne explicite pour le cardinal de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ et la valeur limite de ε dans ce cas-là mais elles dépendent cette fois de la hauteur de C . Enfin ceci fournit comme escompté une majoration du cardinal de $C(K)$ dans la situation initiale.

Nous terminons ce paragraphe par deux remarques, l'une sur le caractère explicite des bornes, l'autre sur la méthode employée.

En premier lieu, écrivons le résultat ci-dessus tous calculs faits. D'après le théorème 1.3 de [R5] si

$$\varepsilon \leq (2^{10}dh(A) \deg C)^{-16g^4}$$

alors

$$\text{Card}C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \leq (2^{34}dh(A) \deg C)^{(r+1)g^{20}}$$

où $g = \dim A$, d est le degré d'un corps de définition de (A, \mathcal{L}) , $h(A)$ est une hauteur de A (le maximum entre 1 et la hauteur θ définie dans [DP2] où figure également une comparaison avec la hauteur de Faltings) et l'on suppose que \mathcal{L} définit une polarisation principale (sinon le degré de la polarisation intervient). En particulier, ceci entraîne

$$\text{Card}C(K) \leq (2^{18}[K : \mathbb{Q}]h(J))^{(r+1)g^{21}}$$

où g est le rang de C , r le rang de $J(K)$ et $h(J)$ la hauteur thêta comme ci-dessus relativement au diviseur thêta. Bien entendu, nous appliquons ici des formules valables en toute dimension au cas des courbes et il est possible d'affiner les exposants en réécrivant toutes les étapes dans ce cadre (B. Fahri l'a fait depuis dans sa thèse [Fah]) mais la nature de la borne ne change guère (pour mémoire la borne donnée par [Fah] pour $\text{Card}C(K)$ est comprise dans tous les cas entre $(2^{150}[K : \mathbb{Q}]h(J))^{(r+1)g}$ et $(2^{38}[K : \mathbb{Q}]h(J))^{2(r+1)g^3}$).

Remarquons encore que dans l'estimation de $\text{Card}C(K)$ on peut majorer le rang r de $J(K)$ grâce au résultat de T. Ooe et J. Top (voir [OT]). Quoi qu'il en soit, la borne reste loin de ce que l'on semble pouvoir espérer. Par exemple, comme l'a montré Patricia Pacelli (voir [Pac] qui étend le résultat de L. Caporaso, J. Harris et B. Mazur [CHM]), la conjecture de Lang de non-densité des points rationnels sur les variétés de type général entraîne l'existence d'une majoration uniquement en termes de g et $[K : \mathbb{Q}]$. Dans le cas de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$, le paramètre r est indépendant (et indispensable) mais une question de B. Mazur (voir [Maz, page 234]) suggère que d et $h(A)$ devraient pouvoir disparaître de la borne.

Enfin, en ce qui concerne la méthode décrite ci-dessus, consistant à combiner le résultat de l'inégalité de Vojta avec une propriété de Bogomolov, notons qu'elle fournit une preuve différente de celles employées auparavant. En effet, initialement, la finitude de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ s'obtenait à partir du cas particulier où Γ est de type fini par des techniques galoisiennes introduites par M. Raynaud [Ray] pour $\Gamma = A_{\text{tors}}$ et généralisées par M. Hindry [Hin] (puis étendues par M. McQuillan [McQ] au cas semi-abélien). Ensuite, les travaux de B. Poonen et S. Zhang concernant $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ utilisaient un argument intermédiaire autour de trois ingrédients : à nouveau la finitude de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ pour Γ de type fini, la propriété de Bogomolov et un théorème d'équirépartition. En tirant un plus grand parti de l'inégalité de Vojta, nous avons donc supprimé le recours à ce dernier résultat. Cela constitue la clef de la démonstration dans [R6] de la conjecture de B. Poonen sur les variétés semi-abéliennes car, comme nous l'avons mentionné, la propriété d'équirépartition n'est pas connue dans ce cadre (voir [C-L]).

8 Problèmes simultanés

Le résultat que nous décrivons dans ce paragraphe concerne à nouveau l'intersection de $C(\overline{\mathbb{Q}})$ avec un ensemble bâti à l'aide d'un sous-groupe Γ de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang fini mais, avant de l'énoncer sous cette forme, nous commençons par une présentation plus simple en termes de points rationnels. De manière naïve, par rapport à la situation $C \subset A$ étudiée plus haut, nous fixons C et faisons varier A , en regardant tous les points de C qui deviennent rationnels sur une variété abélienne quelconque.

Pour être plus précis, soient maintenant K un corps de nombres et C une courbe irréductible sur K . Nous lui associons l'ensemble \mathcal{F} de tous les K -morphisms $f : C \rightarrow A$ où A est une variété abélienne sur K quelconque avec la seule restriction que $f(C)$ soit une courbe non elliptique (en particulier f est quasi-fini). Nous considérons

$$C((K)) = \{P \in C(\overline{K}) \mid \text{il existe } f \in \mathcal{F} \text{ avec } f(P) \in A(K)\}$$

(la notation veut simplement évoquer un sur-ensemble de $C(K)$, ce qui est le cas si $\mathcal{F} \neq \emptyset$). Nous avons le résultat suivant.

Théorème I.8.1 *L'ensemble $C((K))$ est de hauteur bornée.*

Nous esquisserons la démonstration de ce fait après avoir reformulé le problème mais signalons déjà que l'on s'attend à ce que $C((K))$ soit fini et que cela découlerait

d'une conjecture de S. David. Le théorème se déduit quant à lui du résultat de [R9] mais les idées principales figurent déjà dans [RV].

Dans un premier temps, nous remarquons que, pour établir le théorème, nous pouvons facilement supposer que C est une courbe projective et lisse de genre au moins 2 sur K ayant un point rationnel, disons P_0 . Dans ces conditions, tout morphisme $f: C \rightarrow A$ se décompose en l'injection $j: C \hookrightarrow J$ de C dans sa jacobienne donnée par P_0 , suivie d'un morphisme de variétés abéliennes $\varphi: J \rightarrow A$ puis de la translation $A \rightarrow A$ par $f(P_0)$. De plus, l'hypothèse que $\overline{f(C)}$ est une courbe non elliptique équivaut simplement à $\dim \varphi(J) \geq 2$ (puisque C engendre J). Comme $f(P_0) \in A(K)$, nous pouvons oublier la translation et il n'y a pas non plus de restriction à supposer φ surjectif. Puisque tout quotient de J est isogène à une sous-variété abélienne de J , nous avons même :

$$C((K)) = \{P \in C(\overline{K}) \mid \text{il existe } \varphi \in \text{End}(J) \text{ avec } \text{rg} \varphi \geq 2 \text{ et } \varphi(P) \in J(K)\}.$$

Maintenant, pour tout $\varphi \in \text{End}(J)$, il existe une isogénie $\psi: J \rightarrow J$ telle que $\varphi \circ \psi$ induit sur $\text{Im} \varphi$ l'isogénie $[n]$ de multiplication par un entier $n \geq 1$. De cette façon, si $Q \in \text{Im} \varphi$ avec $nQ = \varphi(P)$ alors $\psi(Q)$ et P ont même image par φ . Si $\varphi(P) \in J(K)$ alors $\psi(Q) \in J(K)_{\text{sat}}$ (le saturé comme groupe abélien) et donc $P \in J(K)_{\text{sat}} + \text{Ker} \varphi$. Réciproquement, si $P \in J(K)_{\text{sat}} + \text{Ker} \varphi$, il existe n tel que $(n\varphi)(P) \in J(K)$. Finalement, il vient

$$C((K)) = \{P \in C(\overline{K}) \mid \text{il existe } \varphi \in \text{End}(J) \text{ avec } \text{rg} \varphi \geq 2 \text{ et } P \in J(K)_{\text{sat}} + \text{Ker} \varphi\}.$$

Cette forme est la plus utile en pratique mais nous pouvons encore noter que $J(K)_{\text{sat}} + \text{Ker} \varphi = J(K)_{\text{sat}} + \text{Ker}^0 \varphi$ (composante neutre) car $J_{\text{tors}} \subset J(K)_{\text{sat}}$. Donc

$$C((K)) = C(\overline{K}) \cap \bigcup_{\text{codim} B \geq 2} J(K)_{\text{sat}} + B$$

où l'union porte sur toutes les sous-variétés abéliennes B de J vérifiant la condition de codimension.

Nous oublions à ce stade les points rationnels et la jacobienne pour retrouver la situation où C est une courbe sur une variété abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et Γ un sous-groupe de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang fini. Nous introduisons même un réel ε et posons

$$\Gamma_\varepsilon^{(2)} = \bigcup_{\text{codim} B \geq 2} \Gamma_\varepsilon + B$$

où à nouveau B parcourt toutes les sous-variétés abéliennes de A de codimension au moins 2.

Théorème I.8.2 *Si C n'est contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de A différente de A , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon^{(2)}$ est de hauteur bornée.*

Signalons que si $\Gamma = 0$ et $\varepsilon = 0$ nous avons $\Gamma_\varepsilon = A_{\text{tors}}$ et le problème de la finitude de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A_{\text{tors}}^{(2)}$ est alors l'exact analogue de celui résolu par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier dans [BMZ] dans le cas torique (c'est-à-dire que A est remplacée par \mathbb{G}_m^n). La finitude est également connue pour $\varepsilon = 0$ si A est la puissance d'une courbe elliptique à multiplication complexe d'après le travail d'E. Viada lorsque $\Gamma = 0$ (voir [Via]) et en général d'après [RV]. Dans le cas d'une variété abélienne quelconque, des énoncés intermédiaires existent concernant $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_0^{(r)}$ avec $r > 2$ (voir [R8]). Un résultat plus satisfaisant se déduit de la conjecture suivante de S. David.

Conjecture I.8.3 (S. David) *Soient K_0 un corps de nombres, (A_0, \mathcal{L}_0) une variété abélienne polarisée sur K_0 et K_0^\dagger l'extension de K_0 engendrée par les corps de*

définition de tous les points de torsion de A_0 . Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_0 > 0$ tel que si $P \in A_0(\overline{K_0})$ n'est pas de torsion sur $\text{End}(A_0 \times \overline{K_0})$ alors

$$h(P) \geq c_0 [K_0^t(P) : K_0^t]^{-(1/\dim A) - \varepsilon}.$$

Cette conjecture constitue un problème de Lehmer abélien plus difficile que les formulations antérieures où K_0 remplaçait le corps de degré infini K_0^t (pour celles-ci, voir [DH] et, en particulier, le résultat pour les variétés abéliennes à multiplication complexe, utilisé dans [Via] et [RV]). Nous avons toutefois affaibli l'énoncé en introduisant le paramètre ε qui ne figure pas dans la conjecture telle qu'elle est formulée par S. David dans sa version la plus forte (où $\varepsilon = 0$).

Proposition I.8.4 *Si la conjecture est vraie, $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_0^{(2)}$ est fini.*

La démonstration figure dans [R8]. Nous ne la commentons pas ici, non plus que les motivations et résultats partiels concernant la conjecture. En revanche, pour terminer ce chapitre, nous décrivons brièvement comment intervient une inégalité de Vojta dans la preuve du théorème I.8.2. Comme plus haut, ce dernier est entièrement prouvé seulement dans [R9] mais les idées que nous présentons ici se trouvent déjà dans [RV] où est traité le cas particulier $A = E^n$ pour une courbe elliptique E .

Nous écrivons l'ensemble qui nous intéresse sous la forme

$$\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \text{il existe } \varphi \in \text{End}(A) \text{ avec } \text{rg} \varphi \geq 2 \text{ et } P \in \Gamma_\varepsilon + \text{Ker} \varphi\}$$

et nous cherchons à montrer que sa hauteur est bornée. Bien entendu, si un seul morphisme φ intervenait, le problème se traiterai aisément en appliquant la méthode des paragraphes précédents à la courbe $\varphi(C)$. Nous souhaitons en quelque sorte faire ceci simultanément sur toutes les courbes $\varphi(C)$ de manière suffisamment uniforme par rapport à φ .

Rappelons que, sous sa forme la plus ramassée, l'inégalité de Vojta affirme que, pour $|x|$, $|y|$ et s assez grands, nous avons

$$s^2|x|^2 + |y|^2 \leq c_1|sx - y|^2.$$

La version uniforme dont nous avons besoin ici s'énonce elle : il existe un réel c'_1 tel que pour $|x|$, $|y|$ et s assez grands et tout φ de rang ≥ 2 convenable

$$\|\varphi\|^2(s^2|x|^2 + |y|^2) \leq c'_1|\varphi(sx - y)|^2.$$

Nous choisissons une norme quelconque sur l'espace de dimension finie $\text{End}(A) \otimes \mathbb{R}$. Nous ne dirons pas précisément ce que signifie « φ convenable » : il s'agit de se restreindre à une partie fermée de l'ensemble des endomorphismes de rang au moins 2 qui contienne pour toute sous-variété abélienne B de A de codimension ≥ 2 un élément φ avec $B = \text{Ker}^0 \varphi$. La preuve de cette inégalité repose sur le résultat de [R7] (voir paragraphe 3 du chapitre suivant) et sur un calcul de nombres d'intersection sur $C \times C$.

Soient maintenant x et y deux points dans notre ensemble. Ils s'écrivent $x = \gamma + P$ et $y = \gamma' + P'$ où $\gamma, \gamma' \in \Gamma_\varepsilon$ et $\varphi(P) = \varphi'(P') = 0$ pour φ, φ' dans l'ensemble convenable évoqué ci-dessus. Ceci suppose bien sûr des choix de représentants dans les sommes $\Gamma_\varepsilon + \text{Ker} \varphi$ et $\Gamma_\varepsilon + \text{Ker} \varphi'$. On montre qu'il existe des choix tels que $\max(|\gamma|, |P|) \leq c|x|$ où c ne dépend que de (A, \mathcal{L}) et de même pour $y = \gamma' + P'$.

La fin de l'argument repose sur le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} |\varphi(sx - y)| &= |\varphi(s\gamma - \gamma') - \varphi(P')| \\ &= |\varphi(s\gamma - \gamma') + (\varphi' - \varphi)(P')| \\ &\leq c'(\|\varphi\| |s\gamma - \gamma'| + \|\varphi' - \varphi\| |P'|) \end{aligned}$$

où c' dépend du choix de norme. L'idée est de rendre à la fois $|s\gamma - \gamma'|$ et $\|\varphi' - \varphi\|$ petits. Dans le premier cas, nous l'avons déjà réalisé plus haut : il suffit de recouvrir Γ_ε par un nombre fini de petits cônes, ce qui autorise à se placer dans l'un d'eux et à choisir s comme l'entier le plus proche de $|\gamma'|/|\gamma|$. Pour le second cas, nous faisons de même : $\text{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ étant un espace de dimension finie, il se recouvre également de petits cônes en nombre fini et nous pouvons supposer φ et φ' dans l'un d'eux. Ensuite, rien n'empêche de multiplier ces deux morphismes par des entiers bien choisis de sorte que leurs normes soient comparables. Par cette méthode, nous pouvons imposer, un réel $\eta > 0$ étant fixé à l'avance,

$$|s\gamma - \gamma'| \leq \eta|s\gamma| \quad \text{et} \quad \|\varphi' - \varphi\| \leq \eta\|\varphi\|.$$

Avec ce qui précède, il vient

$$|\varphi(sx - y)| \leq \eta cc' \|\varphi\| (s|x| + |y|).$$

Ceci contredit clairement notre inégalité de Vojta uniforme si $\eta^2(cc')^2c'_1 < 1$. Cette incompatibilité entraîne que $|x|$ et $|y|$ sont bornés et termine la preuve (l'argument est complet si l'ensemble des γ apparaissant n'est pas borné en hauteur, ce qui permet de choisir s assez grand comme indiqué ; sinon il faut prendre s constant assez grand et l'on trouve encore une inégalité de la forme $|s\gamma - \gamma'| \leq \eta c|x|$ si $|x|$ est assez grand). Nous renvoyons à [RV] et [R9] pour une démonstration complètement détaillée. L'essentiel est l'utilisation d'un énoncé de la forme de l'inégalité de Vojta mais avec une liberté supplémentaire. Cela constitue la principale motivation du résultat de [R7] que nous évoquons à la fin du chapitre suivant.

Chapitre II

Cadre plus général

Nous étendons les énoncés du chapitre précédent, suivant deux directions. D'une part, nous considérons des sous-variétés de dimension quelconque et non seulement des courbes. D'autre part, nous autorisons le groupe algébrique ambiant à être une variété semi-abélienne. Nous discutons ces deux généralisations dans les deux premiers paragraphes tandis que le troisième présente l'inégalité de Vojta abstraite à partir de laquelle on peut déduire tous les avatars qui apparaissent dans ces pages. Parce que notre description restera proche des articles sur lesquels nous nous basons, à savoir respectivement [R2], [R6] et [R7], elle sera aussi souvent plus succincte que jusqu'ici.

1 Dimension supérieure

Nous commençons par le résultat de [F3].

Théorème II.1.1 (Faltings) *Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K et X un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est pas le translaté d'une sous-variété abélienne de A . Alors l'ensemble des points rationnels $X(K)$ n'est pas dense dans X .*

Bien entendu, si $\dim X = 1$, nous retrouvons la situation étudiée au premier chapitre puisque, sur une courbe, les parties denses coïncident avec les parties infinies. Par une simple récurrence, le théorème entraîne un résultat plus précis.

Corollaire II.1.1 *Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K et X un sous-schéma fermé intègre de A . Il existe un entier S , des points x_1, \dots, x_S de $X(K)$ et des sous-variétés abéliennes B_1, \dots, B_S de A telles que*

$$X(K) = \bigcup_{i=1}^S x_i + B_i(K).$$

Ceci suggère une version quantitative consistant à borner S et généralisant donc le dénombrement de $C(K)$. Pour aborder des énoncés plus généraux, nous changeons de perspective. Dorénavant, dans tout ce paragraphe, A désigne une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$ équipée d'un faisceau inversible symétrique et ample \mathcal{L} induisant une hauteur de Néron-Tate $|\cdot|^2$ et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\overline{\mathbb{Q}})$. Nous fixons également la plupart du temps un sous-schéma fermé intègre X de A .

Les travaux de M. Hindry permettent le passage de $X(K)$ à $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ dans les énoncés ci-dessus. Mieux, ceux-ci demeurent vrais *mutatis mutandis* pour une intersection de la forme $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ comme l'ont montré B. Poonen (voir [Poo]) et

S. Zhang (voir [Z2]) indépendamment. En particulier, l'analogie du corollaire (qui le contient) se formule ainsi.

Théorème II.1.2 *Étant donné A , Γ et X , il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$, un entier S , des points x_1, \dots, x_S de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ et une famille B_1, \dots, B_S de sous-variétés abéliennes de A telles que $x_i + B_i \subset X$ (pour $1 \leq i \leq S$) et si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^S (x_i + B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

Une version quantitative de ce résultat, fournissant des valeurs explicites indépendantes de $h(X)$ pour ε_0 et S , figure dans [R5, page 339]. Notons que dans l'énoncé qualitatif on peut imposer aux points x_i d'appartenir à $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ mais non dans la version quantitative (on montre que ε_0 devrait alors dépendre de $h(X)$).

Si nous nous tournons ensuite vers $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$, la situation change sensiblement. D'une part le résultat de non-densité nécessite une hypothèse supplémentaire.

Théorème II.1.3 *Si $\dim \text{Stab}(X) = 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ n'est pas dense dans X .*

D'autre part, l'obtention d'une version quantitative demeure un problème ouvert dès que $\dim X > 1$: bien que la méthode fournisse une borne explicite pour ε (dépendant de $h(X)$), la question de décompte associée n'est pas résolue.

Enfin, nous ne parlerons pas de problèmes simultanés ici: on ne connaît pas à l'heure actuelle d'extension satisfaisante du théorème I.8.2 en dimension supérieure (malgré des résultats partiels dans cette direction: voir [R9]).

Pour aborder la démonstration des théorèmes II.1.2 et II.1.3 (ainsi que de la version quantitative du premier), nous avons besoin d'introduire l'ensemble exceptionnel $Z_X \subset X$ défini comme l'union de tous les translatés de sous-variétés abéliennes non nulles de A qui sont contenus dans X , en abrégé:

$$Z_X = \bigcup_{x+B \subset X} x + B.$$

On démontre sans trop de peine les deux propriétés fondamentales de cet ensemble: Z_X est fermé (bien que défini comme union infinie) et $Z_X \neq X$ si et seulement si $\dim \text{Stab}(X) = 0$. Elles permettent de reformuler le théorème II.1.3: celui-ci affirme la finitude de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ pour ε assez petit. Notons au passage que la question ouverte de décompte évoquée ci-dessus demande de borner le cardinal de cet ensemble. Par ailleurs, ce fait contient la finitude de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$, étape essentielle dans la démonstration du théorème II.1.2.

Concrètement l'inégalité de Vojta que nous allons énoncer entraîne, tout à fait comme pour les courbes, que la hauteur de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ est bornée et une propriété de Bogomolov permet de conclure à la finitude. En revanche, la généralisation de l'inégalité de Mumford demande quelques contorsions: son établissement pour X requiert un résultat de décompte en dimension $\dim X - 1$ qui soit indépendant de la hauteur. Cela nous force à nous limiter à Γ_ε dès que $\dim X \geq 2$.

Voici l'inégalité de Vojta adaptée à ce contexte (théorème principal de [R1]) où $m = \dim X + 1$.

Proposition II.1.4 *Il existe trois réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que si x_1, \dots, x_m sont des éléments de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant pour $1 \leq i \leq m - 1$*

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_{i+1} \rangle &\geq (1 - 1/c_1) |x_i| |x_{i+1}| \\ |x_{i+1}| &\geq c_2 |x_i| \\ |x_1|^2 &\geq c_3 \end{aligned}$$

alors il existe i tel que $1 \leq i \leq m$ et $x_i \in Z_X(\overline{\mathbb{Q}})$.

Si X est une courbe C , nous retrouvons exactement la proposition I.4.3 (l'hypothèse faite alors sur C s'écrit $Z_C = \emptyset$). Comme elle, elle admet une formulation plus compacte : si $x_1, \dots, x_m \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}})$ et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 |x_i|^2 \leq c_1 \sum_{i=1}^{m-1} |a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1}|^2$$

dès que les $|x_i|$ et les a_i/a_{i+1} sont assez grands. Dans le cas des courbes, nous avons $a_1 = s$ et $a_2 = 1$.

L'application de la proposition n'offre aucune nouveauté : si la hauteur d'une suite de points de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ dans un petit cône tend vers l'infini, on en sélectionne aisément m contredisant l'assertion ; le lemme I.6.1 donne donc le résultat.

Pour obtenir l'énoncé d'une propriété de Bogomolov généralisant celle que nous avons donnée sur les courbes, il suffit de remplacer C par $X \setminus Z_X$. Le résultat qualitatif est dû à S. Zhang (voir [Z1]) ; nous utilisons la version effective de S. David et P. Philippon (voir [DP2]).

Théorème II.1.5 *Il existe un réel $q > 0$ ne dépendant de X que par son degré tel que*

$$\text{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \mid |x|^2 \leq q^{-1}\} \leq q.$$

Dès lors, il reste seulement à couvrir $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ de petites boules de rayon $q^{-1/2}$ pour montrer la finitude de cet ensemble. Ceci démontre donc le théorème II.1.3. Pour le théorème II.1.2, il faut envisager le cas où $Z_X = X$. Mais alors la sous-variété abélienne non nulle $B = \text{Stab}^0(X)$ stabilise X et nous appliquons ce qui précède à $X/B \subset A/B$. Par image réciproque, nous trouvons bien que si X n'est pas un translaté de sous-variété abélienne alors $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ n'est pas dense dans X . En appliquant ceci aux composantes de l'adhérence de $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$, on aboutit par récurrence au théorème II.1.2.

Pour le reste de ce paragraphe, nous nous concentrons sur la forme quantitative du théorème II.1.2, c'est-à-dire essentiellement sur l'inégalité de Mumford. Celle-ci prend la forme suivante (théorème 3.2 de [R2] sans ε , proposition 4.2 de [R5] avec ε mais pour un tore).

Proposition II.1.6 *Il existe trois réels $c_1, c_3, c_4 > 0$ et un entier T tels que si $\varepsilon \leq 1/4q$ et si $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifie $|x|^2 \geq c_3$ alors il existe au plus T points $y \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ tels que*

$$\langle x, y \rangle \geq (1 - 1/c_1)|x||y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq \frac{1}{c_4}|y|.$$

La proposition I.4.2 montre un tel énoncé pour $X = C$ avec $T = \text{CardStab}(C)$. En général, la difficulté tient au fait que T dépend d'une borne pour $\text{Card}(Y \setminus Z_Y)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ avec $\dim Y < \dim X$. La démonstration doit donc procéder par récurrence. Pour l'esquisser de manière simple, nous traitons le cas des surfaces, $\dim X = 2$.

Bien entendu, nous supposons $Z_X \neq X$. L'ingrédient géométrique est le morphisme

$$\begin{aligned} X^3 &\longrightarrow A^2 \\ x, y, z &\longmapsto (y - x, z - x). \end{aligned}$$

Il est génériquement fini mais la description des fibres infinies ne dépend pas seulement du stabilisateur de X comme c'était le cas pour une courbe. En revanche,

un calcul de hauteur semblable montre que si (x, y, z) est isolé dans sa fibre et que $|x|, |y|, |z|$ sont assez grands

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \leq (2 \deg X)^3 (|x - y|^2 + |x - z|^2).$$

Ceci entraînera facilement le résultat à condition de trouver T tel que parmi $T + 1$ points de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ il y ait toujours un couple (y, z) de sorte que (x, y, z) soit isolé dans sa fibre. Cette dernière est isomorphe à

$$(X - x) \cap (X - y) \cap (X - z).$$

Si $T \geq \text{CardStab}(X)$, nous pouvons choisir y tel que $x - y \notin \text{Stab}(X)$ c'est-à-dire $\dim(\overline{X - x}) \cap (X - y) \leq 1$. Écrivons C_1, \dots, C_s les composantes irréductibles de dimension 1 du fermé $(X - x) \cap (X - y)$. Nous cherchons z tel que $C_i \not\subset X - z$ pour tout i . Autrement dit, nous souhaitons

$$z \notin \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{c \in C_j} X - c.$$

Maintenant le fermé de droite, disons W , ne peut être de dimension 2, à nouveau par finitude de $\text{Stab}(X)$. Par conséquent, pour pouvoir choisir $z \notin W$, il suffit d'imposer

$$T \geq \text{Card}(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon \cap W(\overline{\mathbb{Q}}) = \text{Card}(W \setminus Z_W)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon.$$

La définition de W montre clairement que $\deg W$ est contrôlé (par $\deg X$) mais que $h(W)$ ne l'est pas. Il est donc crucial de disposer d'une majoration pour les courbes indépendante de leur hauteur pour pouvoir estimer T .

Une fois la proposition II.1.6 établie suivant le plan que nous venons d'ébaucher, nous la combinons avec l'inégalité de Vojta pour compter les points vérifiant $|x|^2 \geq c_3$. Ici c_3 dépend encore de la hauteur de X et il nous faut appliquer l'argument décrit en détail pour les courbes (voir proposition I.5.1) afin de supprimer cette dépendance pour pouvoir continuer la récurrence.

Finalement, cette méthode donne une borne explicite pour le cardinal de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ (voir, sans ε , le théorème 3.1 de [R2]). Pour atteindre une majoration de S dans le théorème II.1.2, encore faut-il examiner ce que deviennent les estimations par passage au quotient. On se reportera à [R2, pages 535–538] pour la démarche précise. La première étape, élémentaire, consiste à montrer que les seules sous-variétés abéliennes B qui peuvent apparaître dans le théorème vérifient $\deg B \leq (\deg X)^{m^2/4}$ où $m = \dim X + 1$. Parce que l'on désire ensuite travailler séparément avec chaque B , cela pose le problème du nombre de sous-variétés abéliennes de A de degré borné. La proposition 4.1 de [R2] fournit une solution dans laquelle l'estimation ne dépend pas de la hauteur de A . Il semble qu'une approche plus efficace de cette question consisterait à interpréter le degré de B comme la hauteur du sous-espace vectoriel de $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ associé, comme l'a suggéré C. Liebendörfer dans sa thèse [Lieb], et dénombrer ensuite des points de hauteur bornée.

2 Cas torique et semi-abélien

Certains des résultats considérés jusqu'ici dépassent en fait le cadre des variétés abéliennes. Si l'on consent à oublier les points rationnels et à faire jouer un rôle prépondérant à la structure de groupe, ils concernent une classe plus vaste de groupes algébriques commutatifs. Concrètement, nous considérons les intersections avec des ensembles du type Γ , Γ_ε et $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ sur les variétés semi-abéliennes.

Par définition, une variété semi-abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ s'inscrit dans une suite exacte de groupes algébriques commutatifs

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}}^n \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

où A_0 est une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On appelle sous-variété semi-abélienne de A tout sous-groupe algébrique connexe de A et on peut vérifier que c'est une variété semi-abélienne en elle-même. Soit à nouveau Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\overline{\mathbb{Q}})$. Le premier résultat découle des travaux de P. Vojta (voir [V2]) et M. McQuillan (voir [McQ]).

Théorème II.2.1 *Si X est un sous-schéma fermé intègre de A qui n'est pas translaté d'une sous-variété semi-abélienne de A alors $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ n'est pas dense dans X .*

Il ne semble pas que cet énoncé puisse se généraliser au-delà des variétés semi-abéliennes. Dans le cadre des groupes algébriques commutatifs, cela signifierait autoriser des facteurs \mathbb{G}_a . Or le théorème ne vaut pas pour \mathbb{G}_a^2 comme le montre l'exemple (cité dans [V2]) de la courbe C définie par l'équation de Pell $X^2 - 2Y^2 = 1$ dans $\mathbb{G}_a^2 = \text{Spec} \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ et du groupe de rang 2 (de type fini) $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ puisque $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$ est infini et C n'est pas translaté d'un sous-groupe de \mathbb{G}_a^2 .

Signalons que le cas torique, $A = \mathbb{G}_m^n$, du théorème est dû à M. Laurent et remonte à 1984 (voir [Lau]). Ce cas possède un intérêt propre en particulier en ce qui concerne le côté quantitatif car d'une part les bornes sont particulièrement simples (le tore n'ayant pas de hauteur) et en raison de liens avec des problèmes diophantiens comme les équations aux S -unités. Nous renvoyons à [R5] pour les résultats, qui améliorent ceux obtenus précédemment par J.-H. Evertse et H. P. Schlickewei par des méthodes tout à fait différentes (théorème du sous-espace — voir [Ever]).

Pour formuler les autres résultats, comme pour aborder les démonstrations, nous devons introduire des hauteurs normalisées sur les variétés semi-abéliennes. Il s'agit de combiner une hauteur de Néron-Tate sur A_0 avec la hauteur « canonique » sur \mathbb{G}_m^n qui est donnée par le plongement $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow (\mathbb{P}^1/\overline{\mathbb{Q}})^n$. La difficulté vient de ce que l'une est quadratique et l'autre homogène de degré 1 (nous dirons linéaire par abus de langage).

Relever une hauteur de Néron-Tate sur A_0 à A est immédiat : si $f: A \rightarrow A_0$ désigne le morphisme structural, nous posons pour $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$

$$h_{\text{quad}}(x) = |f(x)|^2.$$

Pour la partie linéaire, nous pouvons procéder ainsi. Nous compactifions A au-dessus de A_0 en \overline{A} de manière à étendre la compactification $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow (\mathbb{P}^1/\overline{\mathbb{Q}})^n$. Notons \mathcal{L}_{lin} le faisceau inversible correspondant au diviseur $\overline{A} \setminus A$ de \overline{A} et $h_{\mathcal{L}_{\text{lin}}}$ une hauteur associée. Pour $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$ nous posons

$$h_{\text{lin}}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} h_{\mathcal{L}_{\text{lin}}}(nx).$$

On vérifie que la limite existe, ne dépend d'aucun choix et satisfait

$$h_{\text{lin}}(nx) = |n| h_{\text{lin}}(x)$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. Finalement, nous écrivons

$$h_{\text{can}}(x) = h_{\text{lin}}(x) + h_{\text{quad}}(x)$$

et étendons les définitions abéliennes par

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + y \mid x \in \Gamma, y \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\text{can}}(y) \leq \varepsilon\}$$

et

$$\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = \{x + y \mid x \in \Gamma, y \in A(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ et } h_{\text{can}}(y) \leq \varepsilon(1 + h_{\text{can}}(x))\}.$$

Les résultats généralisent alors parfaitement ceux du paragraphe précédent.

Théorème II.2.2 *Soit X un sous-schéma fermé intègre de A .*

- (1) *Si X n'est pas le translaté d'une sous-variété semi-abélienne de A alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ n'est pas dense dans X .*
- (2) *Si $\dim \text{Stab}(X) = 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ n'est pas dense dans X .*

La première partie était connue dans le cas où A est isogène à $A_0 \times \mathbb{G}_m^n$ (B. Poonen [Poo] et S. Zhang [Z2] indépendamment); l'énoncé complet fait l'objet de [R6].

Nous dirons peu de choses sur la démonstration puisque nous avons présenté celle du cas abélien exactement sous la forme où elle se généralise. Mentionnons que l'assertion (1) entraîne l'analogue du théorème II.1.2, qu'un ensemble exceptionnel Z_X se définit sans changement et que, par suite, l'assertion (2) équivaut à la finitude de $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$.

La formulation de l'inégalité de Vojta doit tenir compte des deux parties de la hauteur. Elle s'énonce d'une part ([R6, théorème 4.1]):

Proposition II.2.3 *Il existe trois réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que si x_1, \dots, x_m sont des éléments de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant pour $1 \leq i \leq m-1$*

$$h_{\text{lin}} \left(\frac{x_i}{h_{\text{can}}(x_i)} - \frac{x_{i+1}}{h_{\text{can}}(x_{i+1})} \right) \leq \frac{1}{c_1}, \quad h_{\text{quad}} \left(\frac{x_i}{\sqrt{h_{\text{can}}(x_i)}} - \frac{x_{i+1}}{\sqrt{h_{\text{can}}(x_{i+1})}} \right) \leq \frac{1}{c_1}$$

$$h_{\text{can}}(x_{i+1}) \geq c_2^2 h_{\text{can}}(x_i) \quad \text{et} \quad h_{\text{can}}(x_1) \geq c_3$$

alors il existe i tel que $1 \leq i \leq m$ et $x_i \in Z_X(\overline{\mathbb{Q}})$.

D'autre part, elle s'exprime aussi: si $x_1, \dots, x_m \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}})$ et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors

$$\sum_{i=1}^m a_i^2 h_{\text{can}}(x_i) \leq c_1 \sum_{i=1}^{m-1} h_{\text{lin}}(a_i^2 x_i - a_{i+1}^2 x_{i+1}) + h_{\text{quad}}(a_i x_i - a_{i+1} x_{i+1})$$

pour $h_{\text{can}}(x_i)$ et a_i/a_{i+1} assez grands.

Finalement, nous utilisons toujours de manière cruciale une propriété de Bogomolov. Elle est due à S. David et P. Philippon (voir [DP3]).

Théorème II.2.4 *Il existe un réel $q > 0$ ne dépendant de X que par son degré tel que*

$$\text{Card}\{x \in (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h_{\text{can}}(x) \leq q^{-1}\} \leq q.$$

Cet énoncé se déduit de celui de [DP3] par la méthode des variétés déterminantes employée comme dans [BZ]. Ce procédé fournit une borne explicite sur q qui s'avère toutefois très mauvaise (la dépendance en le degré est loin d'être polynomiale par exemple) comparée aux bornes obtenues par S. David et P. Philippon sur les tores ou les variétés abéliennes, séparément. C'est un problème ouvert intéressant de ramener la borne sur q du cas semi-abélien au niveau de celles de ces deux cas particuliers.

En conséquence, bien que l'inégalité de Mumford et tout le procédé du décompte puissent parfaitement s'écrire dans ce cadre, il n'a pas semblé nécessaire de le faire tant qu'une borne plus performante n'est pas connue pour ce problème de Bogomolov.

3 Une inégalité de Vojta plus générale

Nous abordons enfin la démonstration d'une inégalité de Vojta, en suivant [R7]. L'idée consiste à établir un énoncé qui contienne tous les avatars rencontrés dans les pages qui précèdent, de l'inégalité originale à celle sur les variétés semi-abéliennes (proposition II.2.3) en passant par le résultat abélien (proposition II.1.4) et même — voire surtout — la version employée pour résoudre les problèmes simultanés (voir page 26). En effet, bien que l'inégalité semi-abélienne puisse se spécialiser au cas abélien et donc en l'inégalité originale sous la forme de la proposition I.4.3, cette dernière version, où intervient un endomorphisme φ , montre qu'il faut aller au-delà. De plus, dans cette recherche de généralité, nous allons nous affranchir du contexte des groupes algébriques.

Dans le cadre de la proposition I.4.3, nous avons dit que l'inégalité reflète les propriétés du morphisme

$$\begin{aligned} C \times C &\xrightarrow{\alpha} A \\ x, y &\longmapsto sx - y. \end{aligned}$$

En termes de nombres d'intersection, α est génériquement fini si et seulement si $(\alpha^* \mathcal{L})^2 \cdot C \times C > 0$. Parce que ce nombre jouit d'une propriété d'homogénéité cruciale, ceci équivaut aussi à $(\alpha^* \mathcal{L})^2 \cdot C \times C \geq s^2$ (si $s \neq 0$) ou encore à

$$(\alpha^* \mathcal{L})^2 \cdot C \times C \geq (\deg C)^{-2} (p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s^2} \otimes p_2^* \mathcal{L})^2 \cdot C \times C.$$

Cette dernière forme est particulièrement éclairante du fait qu'elle décalque l'inégalité de hauteurs que nous voulons obtenir, à savoir

$$|sx - y|^2 \geq 2^{-22} (\deg C)^{-2} (s^2 |x|^2 + |y|^2),$$

sachant que la valeur en (x, y) de la hauteur (normalisée) associée à $\alpha^* \mathcal{L}$ n'est autre que $|sx - y|^2 = |\alpha(x, y)|^2$ tandis que $s^2 |x|^2 + |y|^2$ provient exactement du faisceau $p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s^2} \otimes p_2^* \mathcal{L}$.

Ce cas simple suffit à illustrer deux principes généraux: d'une part il s'agit de transformer une comparaison de nombres d'intersection en une inégalité de hauteurs; d'autre part cette étape s'exprime uniquement en termes de faisceaux inversibles sur un schéma projectif (ici $C \times C$). Bien que, dans toutes nos applications, la définition de ces faisceaux fasse intervenir la structure de groupe algébrique, le passage de l'inégalité de nombres d'intersection à celle de hauteurs n'utilise que quelques unes de leurs propriétés. Ainsi il est possible de réduire le cœur de la preuve de toute inégalité de Vojta à un énoncé de la forme: si deux faisceaux \mathcal{M} et \mathcal{N} sur un schéma projectif vérifient une comparaison du type $\mathcal{M}^d \geq \mathcal{N}^d$ alors nous avons $h_{\mathcal{M}} \geq h_{\mathcal{N}}$. Nous omettons pour l'instant toutes les hypothèses, l'essentiel étant de faire sentir que l'intervention du groupe algébrique ambiant devra se limiter à fournir des hypothèses sur ces faisceaux et disparaître du reste de la preuve.

On comprend maintenant comment ceci peut s'appliquer pour avoir une inégalité uniforme en $\varphi \in \text{End}(A)$ dans le cadre du théorème I.8.2. La situation géométrique montre que le morphisme

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi}: C \times C &\longrightarrow A \\ x, y &\longmapsto \varphi(sx - y) \end{aligned}$$

est génériquement fini si $s \neq 0$ et $\text{rg} \varphi \geq 2$. Si l'on se restreint à un fermé convenable de l'ensemble des endomorphismes de rang au moins 2, ceci se traduit en

$$(\beta_{\varphi}^* \mathcal{L})^2 \cdot C \times C \geq \theta^{-1} s^2 \|\varphi\|^4$$

pour un réel θ indépendant de φ et s . Le second membre s'interprète comme l'auto-intersection du faisceau $\mathcal{N} = (p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s^2} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{\otimes \|\varphi\|^2}$ et ceci conduit naturellement à une inégalité de la forme

$$|\varphi(sx - y)|^2 \geq c_1^{-1} \|\varphi\|^2 (s^2 |x|^2 + |y|^2).$$

En réalité, nous devons aussi tenir compte des intersections $\beta_\varphi^* \mathcal{L} \cdot C \times \{y\}$ et $\beta_\varphi^* \mathcal{L} \cdot \{x\} \times C$ (voir par exemple [RV, page 1922]) qui permettent d'ailleurs de mieux justifier le choix de \mathcal{N} (ci-dessus $p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s^2 \|\varphi\|^4} \otimes p_1^* \mathcal{L}$ par exemple pouvait rendre compte de l'intersection avec $C \times C$).

Nous énonçons maintenant un résultat précis qui découle de celui de [R7]. Nous avons simplifié les hypothèses par souci de lisibilité. La forme ci-dessous suffit pour traiter le cas abélien (y compris les variantes uniformes de [RV] ou [R9]) alors que l'application aux tores ou aux variétés semi-abéliennes nécessite l'énoncé complet (où intervient un éclatement de X^m).

Théorème II.3.1 *Soient X un schéma projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$, intègre et de dimension non nulle, $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$ une immersion fermée et $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$. Soient $\omega \geq -1$, $m \geq 2$ et $M, t, \theta, \delta \geq 1$ des entiers. Il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ explicitement calculables à l'aide de ces entiers, de n , $\deg X$ et $h(X)$ ayant la propriété suivante. Supposons disposer d'un élément $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$, d'un faisceau \mathcal{M} sur X^m , d'une section globale $\sigma \in \Gamma(X^m, \mathcal{M})$ et d'une famille de sections globales $\Sigma \subset \Gamma(X^m, \bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes ta_i} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1})$ de sorte que*

- (1) *la famille Σ est de cardinal M et engendre le faisceau $\bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes ta_i} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$ sur X^m .*
- (2) *chaque élément de la famille $\sigma \otimes \Sigma \subset \Gamma(X^m, \bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes ta_i})$ s'écrit comme un polynôme multihomogène de multidegré ta en les coordonnées de $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^n$ (vues comme sections des $p_i^* \mathcal{L}$) et la famille de tous ces polynômes est de hauteur au plus $\delta(a_1 + \dots + a_m)$.*

Nous notons $h_{\mathcal{L}}$ la hauteur donnée par ι et $h_{\mathcal{M}}$ la hauteur sur X^m associée à \mathcal{M} donnée par $h_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^m ta_i h_{\mathcal{L}}(x_i) - h(\Sigma(x))$. Alors, si $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})^m$ est tel que σ engendre \mathcal{M} en x et que pour tout produit $Y_1 \times \dots \times Y_m$ de sous-schémas fermés intègres de X contenant x

$$\mathcal{M}^{\dim Y} \cdot Y_1 \times \dots \times Y_m \geq \theta^{-1} \prod_{i=1}^m (\deg Y_i)^{-\omega} a_i^{\dim Y_i},$$

nous avons

$$h_{\mathcal{M}}(x) \geq c_1^{-1} \sum_{i=1}^m a_i h_{\mathcal{L}}(x_i)$$

dès que $a_i \geq c_2 a_{i+1}$ (pour $1 \leq i \leq m-1$) et $h_{\mathcal{L}}(x_i) \geq c_3$ (pour $1 \leq i \leq m$).

La condition (2) correspond, dans les applications, au contrôle des formules d'addition de la variété abélienne ambiante. Simplement à titre d'exemple, l'inégalité uniforme citée plus haut s'obtient avec $\mathcal{M} = \beta_\varphi^* \mathcal{L}$ et $a = (s^2 \|\varphi\|^2, \|\varphi\|^2)$: on choisit t assez grand pour que $(p_1^* \mathcal{L}^{\otimes s^2} \otimes p_2^* \mathcal{L})^{\otimes t \|\varphi\|^2} \otimes \beta_\varphi^* \mathcal{L}^{\otimes -1}$ soit engendré par ses sections globales (à l'aide du théorème du cube) et σ une section non nulle en x prise parmi un nombre fini (de la forme $\beta_\varphi^* \tau$). De la sorte, les formules d'addition (autrement dit, les isomorphismes déduits du théorème du cube) permettent de borner la hauteur de $\sigma \otimes \Sigma$ indépendamment de x , ce qui donne δ .

Nous concluons ce chapitre en passant en revue la démonstration du théorème ci-dessus. Dans un premier temps, en suivant Faltings (voir [F3]), l'hypothèse sur les nombres d'intersection se traduit en termes de dimension d'espace de sections

globales. Rappelons que nous essayons de comparer les hauteurs des faisceaux \mathcal{M} et $\mathcal{N}_a = \bigotimes_{i=1}^m p_i^* \mathcal{L}^{\otimes a_i}$. Nous formons donc un quotient de ces faisceaux $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -\varepsilon}$ (dans $\text{Pic}(X^m) \otimes \mathbb{Q}$) ou plutôt (dans $\text{Pic}(X^m)$) $\mathcal{Q}_{\varepsilon,d} = \mathcal{M}^{\otimes d} \otimes \mathcal{N}_a^{\otimes -d\varepsilon}$ où $(d,\varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ est tel que $d\varepsilon \in \mathbb{N}$. L'hypothèse entraîne que $\mathcal{Q}_{\varepsilon,d}$ a suffisamment de sections globales pour ε petit (l'entier d tend vers l'infini).

Proposition II.3.2 *Pour $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ comme dans le théorème, si $\varepsilon \leq (2\theta \dim Y)^{-1}(tm)^{-\dim Y} \prod_{i=1}^m (\deg Y_i)^{-1-\omega}$, il existe $d_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que si $d_0 \mid d$*

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,d}) \geq \frac{d^{\dim Y}}{4\theta(\dim Y)!} \prod_{i=1}^m (\deg Y_i)^{-\omega} a_i^{\dim Y_i} + O(d^{\dim Y-1}).$$

Ensuite, nous insérons $\mathcal{Q}_{\varepsilon,d}$ dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\varepsilon,d} \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{\Sigma'} \mathcal{N}_a^{\otimes td} \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_{(\Sigma')^2} \mathcal{N}_a^{\otimes d(2t+\varepsilon)}$$

bâtie à l'aide de σ et Σ (ici Σ' est une famille finie de sections, déduite de Σ). L'hypothèse (1) assure que la suite est exacte tandis que l'hypothèse (2) permet de borner la hauteur de Ψ . De cette façon, l'espace $\Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,d})$ apparaît comme le noyau d'une application bien contrôlée ou encore, si l'on veut, comme l'espace des solutions d'un système linéaire à coefficients bornés. Par conséquent, la dimension de cet espace étant minorée par la proposition, le classique lemme de Siegel assure qu'il existe une section $s \in \Gamma(Y, \mathcal{Q}_{\varepsilon,d})$ non nulle et de petite hauteur (voir proposition 4.2 de [R7] où l'énoncé est explicite).

Le reste de l'argument s'articule autour de cette section s . Si jamais elle ne s'annule pas en x , la hauteur correspondante à $\mathcal{Q}_{\varepsilon,d}$ est minorée en x (très schématiquement : l'application de la formule du produit à $s(x)$ montre $0 \leq h(s) + h(x)$) et l'on conclut immédiatement. On ne peut espérer en général que cela arrive mais l'idée se sauve en considérant l'ordre d'annulation (pondéré) de s en x .

Ou bien cet ordre est petit c'est-à-dire plus petit que

$$\frac{\varepsilon}{4t(n+1) \max_{1 \leq i \leq m} \deg Y_i}$$

et la situation est suffisamment proche du cas $s(x) \neq 0$. Il est possible d'appliquer le raisonnement à une dérivée non nulle bien choisie de s évaluée en x et d'obtenir à nouveau une minoration de la hauteur associée à $\mathcal{Q}_{\varepsilon,d}$ et donc la conclusion du théorème.

Ou bien l'ordre d'annulation est élevé (plus grand que la borne ci-dessus) et nous avons besoin d'un lemme de zéros. Pour cette étape, E. Bombieri utilise simplement le lemme de Roth en 2 variables (X^m est $C \times C$). En dimension quelconque, le théorème du produit de Faltings convient (nous utilisons la version effective donnée dans [R4]). Celui-ci affirme que cette annulation à un ordre élevé ne peut se produire que sur un sous-produit $Y' = Y'_1 \times \cdots \times Y'_m$ de Y , contrôlé par s et Y .

Nous raisonnons donc par récurrence. Au départ, $Y = X^m$; à chaque étape, nous appliquons ce qui précède : ou bien la section construite s'annule peu et la démonstration est terminée ; ou bien elle s'annule beaucoup et nous remplaçons Y par Y' . La propriété $x \in Y$ se conserve et permet d'utiliser à chaque fois la minoration du nombre d'intersection. *In fine*, si le théorème n'est pas déjà établi, nous arrivons à $Y = \{x\}$. La hauteur de Y est contrôlée à chaque pas donc il nous suffit de choisir c_3 assez grand pour contredire la borne de ce dernier pas (ce n'est pas la seule contrainte sur c_3 : sa valeur apparaît aussi lors des estimations dans le cas où s s'annule peu en x).

Disons encore que l'hypothèse principale du théorème du produit exige un espacement des points et impose la condition $a_i \geq c_2 a_{i+1}$. La valeur de c_1 quant à elle

provient essentiellement de celle de ε dans la proposition II.3.2. Enfin, le résumé que nous venons de donner glisse bien sûr sur de nombreux détails techniques (voir toute la seconde partie de [R7]) et sur tous les calculs nécessaires pour vérifier que les estimations s'emboîtent correctement (notamment en termes de la dépendance en a).

Conclusion

Nous récapitulons les résultats évoqués dans les pages qui précèdent et passons en revue quelques uns des problèmes ouverts qu'ils suggèrent.

Ils concernent tous l'intersection d'un sous-schéma fermé intègre X d'une variété semi-abélienne A sur $\overline{\mathbb{Q}}$ avec l'un des sous-ensembles de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ suivants

$$\Gamma \subset \begin{array}{c} \Gamma_\varepsilon \\ \cap \\ \bigcup_{\text{codim} B \geq r} \Gamma_\varepsilon + B(\overline{\mathbb{Q}}) \end{array} \subset \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$$

où Γ est un sous-groupe de rang fini, ε un réel positif, r un entier et l'union concerne toutes les sous-variétés semi-abéliennes B de A de codimension au moins r . Outre la variation de cet ensemble, nous classons également les problèmes suivant la dimension de X

- courbes : $\dim X = 1$,
- dimension supérieure : $\dim X \geq 2$,

ou suivant la nature de A

- cas abélien : A est une variété abélienne,
- cas torique : $A \simeq (\mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}})^n$,
- cas général ou semi-abélien.

Signalons ici que l'on peut encore envisager de généraliser ces questions à d'autres corps que $\overline{\mathbb{Q}}$ (voir par exemple [Hru] ou les travaux de Moriwaki [Mori]) mais nous ne le faisons pas.

Commençons notre survol par l'ensemble Γ_ε (il n'y a pas lieu de distinguer le cas de Γ seul). Nous disposons d'un résultat optimal de finitude donné par la première assertion du théorème II.2.2 (ou par le théorème 1.1 de [R6]) en termes de non-densité de $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ et admettant un corollaire où l'on écrit si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^S (x_i + B_i)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$$

(voir théorème II.1.2). Les seules questions en suspens concernent donc l'aspect qualitatif. Dans les cas abéliens et toriques, des versions entièrement explicites existent (théorèmes 1.1 et 1.3 de [R5]), susceptibles d'améliorations. La plus intéressante semble être de chercher à supprimer la dépendance en la hauteur dans le cas abélien pour donner à la borne la même forme que dans le cas torique. Une formulation pourrait être la suivante.

Question 1. *Dans le cas abélien, peut-on borner S et ε_0 uniquement en fonction du rang de Γ , des dimensions de A et X , du degré d'une polarisation de A et du degré de X pour celle-ci?*

Ceci rejoint la question de B. Mazur (voir [Maz]) que nous avons évoquée et contient, avec $\Gamma = 0$, un problème de Bogomolov effectif uniforme.

Dans le cas semi-abélien, notre méthode sait fournir des bornes à partir d'une propriété de Bogomolov effective mais tout ceci n'est pas écrit car on ne sait pas obtenir une version efficace de celle-ci, proche des cas abéliens et toriques. Nous souhaiterions par exemple répondre à la

Question 2. *Dans le théorème II.2.4, peut-on choisir q polynomial en $\deg X$?*

Envisageons maintenant $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$. Là encore, la finitude est acquise dans le cadre le plus général (semi-abélien et dimension supérieure) sous la forme de la non-densité de $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon)$ comme le montre la deuxième assertion du théorème II.2.2 (ou le théorème 1.2 de [R6]). La question du décompte, en revanche, n'est résolue que pour les courbes : explicitement dans le cas torique par le théorème 1.2 de [R5] et théoriquement dans les autres cas. En dimension supérieure, le problème reste entier.

Question 3. *Peut-on trouver explicitement un réel $\varepsilon > 0$ et un entier S tels que $\text{Card}(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) \leq S$?*

Noter qu'il faut inclure une borne sur ε car, par simple finitude, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) = (X \setminus Z_X)(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$.

Notre dernier ensemble est

$$\Gamma_\varepsilon^{(r)} = \bigcup_{\text{codim} B \geq r} \Gamma_\varepsilon + B(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Les résultats deviennent rares. Dans le cas torique, E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier traitent le cas d'une courbe avec $\Gamma = 0$, $\varepsilon = 0$ et $r = 2$ c'est-à-dire qu'ils obtiennent la finitude de $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A_{\text{tors}}^{(2)}$. Dans le cas abélien, des résultats partiels font l'objet de [Via, RV, R8, R9]. Nous scindons le problème en deux étapes indépendantes : montrer qu'à hauteur bornée il n'y a qu'un nombre fini de points ; montrer que la hauteur est bornée. Le premier point est lié au problème de Lehmer abélien. Nous montrons notamment dans [R8] qu'il serait résolu de manière optimale pour $\varepsilon = 0$ en toute dimension sous la conjecture I.8.3, de S. David.

Question 4. *Démontrer la conjecture I.8.3.*

Le second point fait l'objet de [R9]. La solution est complète pour les courbes : $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon^{(2)}$ est de hauteur bornée sous l'hypothèse optimale (voir théorème I.8.2). En dimension supérieure, la géométrie du problème reste mal comprise. Nous définissons un ensemble exceptionnel $Z_X^{(r)}$ ayant la propriété merveilleuse que l'ensemble $(X(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap \Gamma_\varepsilon^{(r)}$ est de hauteur bornée mais $Z_X^{(r)}$ est peut-être trop gros.

Question 5. *Peut-on caractériser les couples (X, r) tels que $Z_X^{(r)}$ n'est pas dense dans X ?*

Une réponse partielle existe seulement pour les surfaces.

Au-delà, nous pourrions encore poser des questions semi-abéliennes mais tout est à faire dans ce cadre, y compris pour les courbes. Ensuite, ces problèmes appellent également des résultats de dénombrement, tout aussi inconnus à l'heure actuelle (une étape consisterait probablement à établir des énoncés effectifs dans la direction du problème de Lehmer).

Pour terminer, une ultime (?) généralisation serait peut-être d'étudier l'ensemble

$$\bigcup_{\text{codim} B \geq r} \mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) + B(\overline{\mathbb{Q}}).$$

Il n'est pas certain toutefois que cela présente un intérêt puisque si $\Gamma \cap B \not\subset A_{\text{tors}}$ et $\varepsilon > 0$ alors $\mathcal{C}(\Gamma, \varepsilon) + B(\overline{\mathbb{Q}}) = A(\overline{\mathbb{Q}}) \dots$

Liste de publications

- (avec F. Urfels) Approximation diophantienne de logarithmes elliptiques p -adiques. *Journal of Number Theory*. 57. 1996. p. 133–169.
- (avec S. Corteel, G. Schaeffer et H. Thomas) The number of plan corner cuts. *Advances in Applied Mathematics*. 23. 1999. p. 49–53.
- Hauteurs thêta et construction de Kodaira. *Journal of Number Theory*. 78. 1999. p. 287–311.
- Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. 330. 2000. p. 5–10.
- [R1] Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*. Série IV. 29. 2000. p. 101–151.
- [R2] Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. math.* 142. 2000. p. 513–545.
- [R3] Élimination multihomogène (chapitre 5) et Géométrie diophantienne multiprojective (chapitre 7). dans: *Introduction to algebraic independence theory* (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). Lecture Notes in Math. 1752. Springer Verlag. 2001. p. 53–81 et p. 95–131.
- [R4] Sur le théorème du produit. *J. Théor. Nombres Bordeaux*. 13. 2001. p. 287–302.
- [R5] Sur les sous-variétés des tores. *Comp. Math.* 134. 2002. p. 337–366.
- [R6] Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 36. 2003. p. 191–212.
- [RV] (avec E. Viada) Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Internat. Math. Res. Notices* 35. 2003. p. 1915–1931.
- Vojta's method in diophantine geometry, applications and related topics. in: *Diophantine problems and analytic number theory* (édité par Noriko Hirata-Kohno). RIMS Kōkyūroku. 1319. Université de Kyoto. 2003. p. 202–210.
- [R7] Inégalité de Vojta généralisée. Prépublication de l'Institut Fourier. 584. 2003.
- (avec Ch. Liebendörfer) Duality of heights over quaternion algebras. 2003.
- [R8] Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. Prépublication de l'Institut Fourier. 626. 2003.
- Une inégalité de Lojasiewicz arithmétique. Prépublication de l'Institut Fourier. 633. 2004.
- [R9] Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II. Prépublication de l'Institut Fourier. 634. 2004.

Bibliographie

- [Bom] E. Bombieri. The Mordell conjecture revisited. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 17. 1990. p. 615–640. — Erratum. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 18. 1991. p. 473.
- [BMZ] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices* 20. 1999. p. 1119–1140.
- [BZ] E. Bombieri et U. Zannier. Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 23. 1996. p. 779–792.
- [BGS] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. *J. Amer. Math. Soc.* 7. 1994. p. 903–1027.
- [CHM] L. Caporaso, J. Harris et B. Mazur. Uniformity of rational points. *J. Amer. Math. Soc.* 10. 1997. p. 1–35.
- [C-L] A. Chambert-Loir. Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 33. 2000. p. 789–821.
- [DH] S. David et M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. *J. Reine Angew. Math.* 529. 2000. p. 1–74.
- [DP1] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 28. 1999. p. 489–543. — Erratum. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 29. 2000. p. 729–731.
- [DP2] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes II. *Comment. Math. Helv.* 77. 2002. p. 639–700.
- [DP3] S. David et P. Philippon. Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 331. 2000. p. 587–592.
- [dDi] T. de Diego. Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2. *J. of Number Theory.* 67. 1997. p. 85–114.
- [Ever] J.-H. Evertse. Points on subvarieties of tori. *A Panorama in Number Theory or the View from Baker's Garden, Proc. Conf. Number Theory in honour of the 60th birthday of Prof. Alan Baker, Zurich 1999* (édité par G. Wüstholz). Cambridge Univ. Press, 2002. p. 214–230.
- [Fah] B. Fahri. Approximations diophantiennes sur les groupes algébriques commutatifs. Thèse. Université Paris VI. 23 décembre 2003.
- [F1] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche varietäten über Zahlkörpern. *Invent. math.* 73. 1983. p. 349–366. — Erratum. *Invent. math.* 75. 1984. p. 381.
- [F2] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math.* 133. 1991. p. 549–576.

- [F3] G. Faltings. The general case of S. Lang's conjecture. *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*. *Perspect. Math.* 15. Academic Press. San Diego. 1994. p. 175–182.
- [Hin] M. Hindry. Autour d'une conjecture de Serge Lang. *Invent. math.* 94. 1988. p. 575–603.
- [HS] M. Hindry et J. Silverman. *Diophantine geometry. An introduction*. G. T. M. 201. Springer-Verlag. New York. 2000.
- [Hru] E. Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.* 9. 1996. p. 667–690.
- [Lau] M. Laurent. Équations diophantiennes exponentielles. *Invent. math.* 78. 1984. p. 299–327.
- [Lieb] C. Liebendörfer. Linear equations and heights over division algebras. Thèse. Université de Bâle. 15 janvier 2002.
- [Maz] B. Mazur. Arithmetic on curves. *Bull. Amer. Math. Soc.* 14. 1986. p. 207–259.
- [McQ] M. McQuillan. Division points on semi-abelian varieties. *Invent. math.* 120. 1995. p. 143–159.
- [Mord] L. J. Mordell. On the rational solutions of indeterminate equations of the third and fourth degrees. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 21. 1922. p. 179–192.
- [Mori] A. Moriwaki. A generalization of conjectures of Bogomolov and Lang over finitely generated fields. *Duke Math. J.* 107. 2001. p. 85–102.
- [M-B] L. Moret-Bailly. Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques. dans : Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (Paris, 1988). *Astérisque* 183. 1990. p. 37–58.
- [Mum] D. Mumford. A remark on Mordell's conjecture. *Amer. J. of Math.* 87. 1965. p. 1007–1016.
- [OT] T. Ooe et J. Top. On the Mordell-Weil rank of an abelian variety over a number field. *J. Pure Appl. Algebra* 58. 1989. p. 261–265.
- [Pac] P. Pacelli. Uniform boundedness for rational points. *Duke Math. J.* 88. 1997. p. 77–102.
- [Phi] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. *J. Math. Pures Appl.* 74. 1995. p. 345–365.
- [Poo] B. Poonen. Mordell-Lang plus Bogomolov. *Invent. math.* 137. 1999. p. 413–425.
- [Ray] M. Raynaud. Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion. *Arithmetic and geometry*, Vol. I. *Progr. Math.* 35. Birkhäuser. Boston. 1983. p. 327–352.
- [R1] G. Rémond. Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série IV.* 29. 2000. p. 101–151.
- [R2] G. Rémond. Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. math.* 142. 2000. p. 513–545.
- [R3] G. Rémond. Élimination multihomogène (chapitre 5) et Géométrie diophantienne multiprojective (chapitre 7). dans : *Introduction to algebraic independence theory* (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). *Lecture Notes in Math.* 1752. Springer Verlag. 2001. p. 53–81 et p. 95–131.
- [R4] G. Rémond. Sur le théorème du produit. *J. Théor. Nombres Bordeaux.* 13. 2001. p. 287–302.
- [R5] G. Rémond. Sur les sous-variétés des tores. *Comp. Math.* 134. 2002. p. 337–366.

- [R6] G. Rémond. Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 36. 2003. p. 191–212.
- [R7] G. Rémond. Inégalité de Vojta généralisée. Prépublication de l’Institut Fourier. 584. 2003.
- [R8] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. Prépublication de l’institut Fourier. 626. 2003.
- [R9] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II. Prépublication de l’Institut Fourier. 634. 2004.
- [RV] G. Rémond et E. Viada. Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Internat. Math. Res. Notices* 35. 2003. p. 1915–1931.
- [SUZ] L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang. Équirépartition des petits points. *Invent. math.* 127. 1997. p. 337–347.
- [Ull] E. Ullmo. Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. *Ann. of Math.* 147. 1998. p. 167–179.
- [Via] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Série V.* 2. 2003. p. 47–75.
- [V1] P. Vojta. Siegel’s theorem in the compact case. *Ann. of Math.* 133. 1991. p. 509–548.
- [V2] P. Vojta. Integral points on subvarieties of semi-abelian varieties, I. *Invent. math.* 126. 1996. p. 133–181.
- [Z1] S. Zhang. Equidistribution of small points on abelian varieties. *Ann. of Math.* 147. 1998. p. 159–165.
- [Z2] S. Zhang. Distribution of almost division points. *Duke Math. J.* 103. 2000. p. 39–46.