# Un processus ponctuel associé aux maxima locaux du mouvement brownien

Christophe LEURIDAN

Prépublication de l'Institut Fourier n° 701 (2007)

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

**Résumé**

Soit $B = (B_t)_{t\in\mathbf{R}}$ un mouvement brownien symétrique, c'est-à-dire un processus tel que $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ et $(B_{-t})_{t\in\mathbf{R}_+}$ sont deux mouvements browniens indépendants. Pour $a \geq b > 0$ fixés, nous décrivons la loi de l'ensemble

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{t \in \mathbf{R} : B_t = \max_{s\in[t-a,t+b]} B_s\}.$$

Nous relions cet ensemble au fermé régénératif

$$\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : B_t = \max_{s\in[(t-a)_+,t]} B_s\},$$

et nous donnons la mesure de Lévy d'un subordinateur dont l'image fermée est $\mathcal{R}_a$.

**Mots-clés** : mouvement brownien, maximum local, processus ponctuel, renouvellement, fermé régénératif, subordinateur.

**Abstract**

Let $B = (B_t)_{t\in\mathbf{R}}$ be a symmetric brownian motion, that is to say that $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ and $(B_{-t})_{t\in\mathbf{R}_+}$ are independent brownian motions. Given $a \geq b > 0$, we give the law of the random set

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{t \in \mathbf{R} : B_t = \max_{s\in[t-a,t+b]} B_s\}.$$

We use the relation between $\mathcal{M}_{a,b}$ and the regenerative closed set

$$\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : B_t = \max_{s\in[(t-a)_+,t]} B_s\}$$

to compute the Levy measure of a subordinator whose closed range is $\mathcal{R}_a$.

**Keywords**: brownian motion, local maximum, point process, renewal process, regenerative closed set, subordinator.

**2000 Mathematics Subject Classification** : 60J65, 60G55.

# 1 Introduction

On considère un mouvement brownien symétrique $B = (B_t)_{t\in\mathbf{R}}$ : autrement dit, $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ et $(B_{-t})_{t\in\mathbf{R}_+}$ sont deux mouvements browniens indépendants. Le but de cet article est d'étudier l'ensemble $\mathcal{M}$ des instants où $(B_t)_{t\in\mathbf{R}}$ atteint un maximum local. On vérifie facilement que presque sûrement, $\mathcal{M}$ est dénombrable et dense dans $\mathbf{R}$ : il suffit par exemple de montrer qu'il y a un unique instant réalisant le maximum sur tout intervalle d'extrémités rationnelles.

Le fait qu'un instant donné soit un maximum local ne dépend que des accroissements du mouvement brownien au voisinage de cet instant. L'indépendance des accroissements du mouvement brownien suggère donc que l'ensemble $\mathcal{M}$ est sans mémoire, mais encore faut-il donner un sens à cette affirmation. Une façon serait de construire un processus de Poisson ponctuel qui prenne des valeurs précisément aux instants où $B$ atteint un maximum local.

Dans [9], Tsirelson montre que cela est possible, puisqu'on peut construire une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$ telle que l'ensemble des valeurs $\{T_n; n \in \mathbf{N}\}$ soit exactement l'ensemble des instants de $[0,1]$ où le mouvement brownien réalise un minimum local. En fait, cette propriété est partagée par de nombreux ensembles aléatoires dénombrables denses. Par ailleurs, la loi uniforme sur $[0,1]$ peut être remplacée par n'importe quelle loi à densité partout strictement positive sur $[0,1]$.

Mais la construction de Tsirelson est faite dans un espace probabilisé plus gros que celui sur lequel est défini le mouvement brownien : le produit de l'espace de Wiener par $[0,1]^\infty$. On peut donc se demander si ce type de construction est possible sans apport d'aléa extérieur.

Une idée consiste à associer à tout instant $t$ le plus grand intervalle $I_t$ contenant $t$ sur lequel $B$ reste inférieur ou égal à $B_t$. Autrement dit, $I_t = [t - U_t, t + V_t]$, où $U_t = \inf\{s > 0 : B_{t-s} > B_t\}$ et $V_t = \inf\{s > 0 : B_{t+s} > B_t\}$. L'instant $t$ est un maximum local si et seulement si $\min(U_t, V_t) > 0$. Dans ce cas, nous dirons que $U_t$ et $V_t$ sont les portées à gauche et à droite du maximum local à l'instant $t$.

Mais on vérifie facilement que les intervalles $I_s$ et $I_t$ associés à deux instants $s < t$ sont disjoints si le mouvement brownien dépasse $\max(B_s, B_t)$ pendant l'intervalle $[s,t]$ et emboîtés dans le cas contraire. Ce fait est une obstruction au fait que $(\min(U_t, V_t))_{t\in\mathbf{R}}$ soit un processus de Poisson ponctuel puisqu'il possède une mémoire.

Dans la suite, nous allons décrire la loi de l'ensemble $\mathcal{M}_{a,b} = \{t \in \mathbf{R} : U_t \geq a; V_t \geq b\}$ pour $a > 0$ et $b > 0$ fixés. Cet ensemble est formé d'instants isolés, séparés d'au moins $\min(a,b)$. Nous montrons que les durées entre les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ forment des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et nous décrirons cette loi.

Une méthode pour montrer l'indépendance et l'équidistribution des durées consiste à relier $\mathcal{M}_{a,b}$ au fermé régénératif $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : B_t = \max_{s\in[(t-a)_+,t]} B_s\}$. Inversement, nous utilisons des renseignements obtenus directement sur $\mathcal{M}_{a,b}$ pour décrire la mesure de Lévy d'un subordinateur dont l'image fermée est le fermé régénératif $\mathcal{R}_a$.

Signalons que dans [7], J. Neveu et J. Pitman ont obtenu des résultats similaires sur les extrema de profondeur supérieure ou égale à $h$ fixé, appelés « $h$-extrema » par les auteurs. Avec nos notations, si $t$ est un instant de maximum local, sa profondeur est la plus petite des quantités

$$B_t - \min_{s\in[t-U_t,t]} B_s \text{ et } B_t - \min_{s\in[t,t+V_t]} B_s.$$

Pour un minimum local, la définition est symétrique.

## 2 Calculs direct de certaines lois associées aux maxima locaux.

Pour tous réels $s < t$, notons $\rho(s,t)$ le plus petit instant de $[s,t]$ réalisant le maximum de $B$ sur $[s,t]$ et introduisons les dénivellations à gauche et à droite correspondantes :

$$G_{s,t} = B_{\rho(s,t)} - B_s \text{ et } D_{s,t} = B_{\rho(s,t)} - B_t$$

Ces variables aléatoires sont mesurables pour la tribu $\mathcal{F}_{s,t}$ engendrée par les accroissements du mouvement brownien entre $s$ et $t$. Leur utilisation est rendue commode du fait que les tribus $\mathcal{F}_{s,t}$ associées à des intervalles d'intérieurs deux à deux disjoints sont indépendantes. L'indépendance permet de montrer facilement le résultat ci-dessous.

**Proposition 1 (Comparaison des maxima locaux)** *Preque sûrement, les valeurs des maxima locaux de $B$ sont toutes différentes. Par conséquent, le maximum de $B$ sur tout segment est réalisé en au plus deux points, dont au plus un point intérieur.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tous rationnels $s < t < u < v$, l'écart entre les maxima de $B$ sur $[s,t]$ et sur $[u,v]$ est la somme de trois variables indépendantes de loi diffuse : $(-D_{s,t}) + (B_u - B_t) + G_{u,v}$.

La propriété ci-dessus montre en particulier que sur un segment fixé non réduit à un point, le maximum est atteint une seule fois et en un point intérieur (presque sûrement).

Le résultat ci-dessous, dû à Itô, constitue la brique élémentaire des calculs ultérieurs. Il figure sous une forme différente et plus générale dans [3], mais nous en redonnons une démonstration élémentaire ci-dessous.

**Proposition 2** *Soient $s < t$ deux réels. Le triplet $(\rho(s,t), G_{s,t}, D_{s,t})$ a même loi que*

$$(s\cos^2\Theta + t\sin^2\Theta,\ \sqrt{2X}\sqrt{t-s}\sin\Theta,\ \sqrt{2Y}\sqrt{t-s}\cos\Theta)$$

*où $\Theta$, $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\Theta$ de loi uniforme sur $[0,\pi/2]$, $X$ et $Y$ de loi exponentielle de paramètre 1.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on peut se limiter au cas où $s = 0$ par stationnarité des accroissements du mouvement brownien. Pour $t > 0$, notons simplement $S_t = \max\{B_s\ ; s \in [0,t]\}$ et $\rho_t = \inf\{s \in [0,t] : B_s = S_t\}$.

Décrivons d'abord la loi de $(S_t, B_t)$. En appliquant le principe de réflexion à l'instant $T_a = \inf\{t \geq 0 : S_t > a\}$, on obtient pour tous réels $a, b$ vérifiant $a \geq 0$ et $a \geq b$,

$$P[S_t > a; B_t \leq b] = P[B_t \geq 2a - b]$$

Notons $F_t$ la fonction de répartition du couple $(S_t, B_t)$ et $\Phi$ celle de $B_1$. Pour tous réels $a, b$ vérifiant $a \geq 0$ et $a \geq b$, on a donc

$$\begin{aligned} F_t(a,b) = P[S_t \leq a; B_t \leq b] &= P[B_t \leq b] - P[B_t \geq 2a - b] \\ &= \Phi(\frac{b}{\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{b-2a}{\sqrt{t}}) \\ &= \Phi(\frac{2a-b}{\sqrt{t}}) - \Phi(\frac{-b}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

Par symétrie, la fonction de répartition du couple $(S_t, B_t) = (G_{0,t}, G_{0,t} - D_{0,t})$ est aussi celle de $(S_t - B_t, -B_t) = (D_{0,t}, D_{0,t} - G_{0,t})$.

Soient $0 < r < s < t$ et $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} [S_t > x\ ; \rho_t \in [r,s]\ ;\ S_t - B_t > y] &= [G_{0,r} - D_{0,r} + G_{r,s} > x] \\ &\quad \cap\ [D_{0,r} < G_{r,s}\ ;\ D_{r,s} \geq G_{s,t}] \\ &\quad \cap\ [D_{r,s} - G_{s,t} + D_{s,t} > y] \\ &= [D_{0,r} < G_{r,s}\ ;\ D_{0,r} - G_{0,r} < G_{r,s} - x] \\ &\quad \cap\ [G_{s,t} \leq D_{r,s}\ ;\ G_{s,t} - D_{s,t} < D_{r,s} - y] \end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements des tribus $\mathcal{F}_{0,r}$, $\mathcal{F}_{r,s}$ et $\mathcal{F}_{s,t}$, on a donc

$$P[S_t > x; \rho_t \in [r,s]; S_t - B_t > y | \mathcal{F}_{r,s}] = F_r(G_{r,s}, G_{r,s} - x) F_{t-s}(D_{r,s}, D_{r,s} - y).$$

Notons $G = G_{0,1}$ et $D = D_{0,1}$. Par changement d'échelle,

$$\begin{aligned} P[S_t > x\ ; \rho_t \in [r,s]\ ; S_t - B_t > y] &= \mathbf{E}\big[F_r(\sqrt{s-r}G_{0,1}, \sqrt{s-r}G_{0,1} - x) \\ &\qquad F_{t-s}(\sqrt{s-r}D_{0,1}, \sqrt{s-r}D_{0,1} - y)\big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\Big(\Phi\Big(\frac{x+\sqrt{s-r}G}{\sqrt{r}}\Big) - \Phi\Big(\frac{x-\sqrt{s-r}G}{\sqrt{r}}\Big)\Big) \\ &\qquad \Big(\Phi\Big(\frac{y+\sqrt{s-r}D}{\sqrt{t-s}}\Big) - \Phi\Big(\frac{y-\sqrt{s-r}D}{\sqrt{t-s}}\Big)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, à dérivée bornée et comme $\mathbf{E}[GD] = 1/2$, on obtient quand $s \to r+$, par convergence dominée

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-r} P[S_t > x; \rho_t \in [r,s]; S_t - B_t > y] &\to 4\ \Phi'\Big(\frac{x}{\sqrt{r}}\Big)\Phi'\Big(\frac{y}{\sqrt{t-r}}\Big)\frac{\mathbf{E}[GD]}{\sqrt{r(t-r)}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{r(t-r)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2r}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2(t-r)}\right). \end{aligned}$$

Cela montre que $\rho_t$ suit la loi arcsinus sur l'intervalle $[0, t]$ et que conditionnellement à $\rho_t = r$, les variables aléatoires $\frac{S_t^2}{2r}$ et $\frac{(S_t - B_t)^2}{2(t-r)}$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

**Corollaire 3** *Soient $s < t$ deux réels. Quels que soient $\alpha, \beta \geq 0$,*

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha G_{s,t}^2 + \beta D_{s,t}^2}{2}\Big)\Big] = \frac{1}{\alpha+\beta+\alpha\beta}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta}}\Big).$$

Démonstration. Utilisons l'identité en loi de la proposition. En conditionnant par rapport à $\Theta$, en en effectuant le changement de variable $t = \tan\theta$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha G_{0,1}^2 + \beta D_{0,1}^2}{2}\Big)\Big] &= \mathbf{E}\big[\exp(-\alpha X \sin^2\Theta)\ \exp(-\beta Y \cos^2\Theta)\big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\frac{1}{1+\alpha\sin^2\Theta} \times \frac{1}{1+\beta\cos^2\Theta}\Big] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\alpha\sin^2\theta)(1+\beta\cos^2\theta)} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{\alpha t^2}{1+t^2})(1+\frac{\beta}{1+t^2})} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(1+t^2)dt}{\big(1+(1+\alpha)t^2\big)\big((1+\beta)+t^2\big)}
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\frac{\alpha}{1+(1+\alpha)t^2} + \frac{\beta}{(1+\beta)+t^2} = \frac{(\alpha+\beta+\alpha\beta)(1+t^2)}{\big(1+(1+\alpha)t^2\big)\big(1+\beta+t^2\big)}.$$

# 3 Application à l'étude de $\mathcal{M}_{a,b}$

## 3.1 Fonction de corrélation à un et deux points

Soient $a \geq b > 0$. Nous allons décrire la mesure de comptage $N_{a,b}$ associée à $\mathcal{M}_{a,b}$ : pour tout borélien $A$ de $\mathbf{R}$, $N_{a,b}(A) = \mathrm{Card}(\mathcal{M}_{a,b} \cap A)$. Commençons par quelques remarques simples.

**Remarque 4 (Propriétés simples de $N_{a,b}$)**

1. *Deux points de $\mathcal{M}_{a,b}$ ne peuvent pas être à une distance inférieure à $b$. Par conséquent, si le diamètre de $A$ est inférieur à $b$, $N_{a,b}(A)$ vaut 0 ou 1, suivant que le maximum de $B$ sur $A$ ait ou non des portées supérieures ou égales à $a$ et $b$.*
2. *Comme la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ est invariante par translation, la mesure $A \mapsto \mathbf{E}[N_{a,b}(A)]$ est un multiple de la mesure de Lebesgue.*
3. *La variable aléatoire $N_{a,b}(A)$ ne dépend que des accroissements du mouvement brownien sur l'ensemble $A+[-a,b]$. A cause de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien, les variables aléatoires comptant les points de $\mathcal{M}_{a,b}$ dans des parties distantes d'au moins $a+b$ sont indépendantes.*

Nous allons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 5** *Quels que soient les réels $s < t$,*

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt)] = \frac{dt}{\pi\sqrt{ab}}$$

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] = \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}}\ h_{a,b}(t-s)dt$$

*avec*

$$h_{a,b}(r) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & r \leq b \\ \frac{1}{\pi r}\sqrt{\frac{r-b}{b}} & \text{si} & b \leq r \leq a \\ \frac{1}{\pi r}\left(\sqrt{\frac{r-b}{b}} + \sqrt{\frac{r-a}{a}}\right) & \text{si} & a \leq r \leq a+b \\ \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} & \text{si} & r \geq a+b \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $\epsilon \in ]0, b[$, l'intervalle $[t, t+\epsilon]$ contient au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ et

$$\rho(t-a, t+b+\epsilon) \in [t, t+\epsilon] \Longrightarrow N_{a,b}([t, t+\epsilon]) = 1 \Longrightarrow \rho(t-a+\epsilon, t+b) \in [t, t+\epsilon].$$

Ces implications fournissent un encadrement de $N_{a,b}([t, t+\epsilon])$, Mais comme cet encadrement est lourd à manipuler, nous écrirons de façon heuristique

$$N_{a,b}(dt) = 1 \Longleftrightarrow \rho(t-a, t+b) \in dt.$$

d'où

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt)] = \frac{dt}{\pi\sqrt{ab}}.$$

Soient $s < t$ deux réels et $r = t - s$. Les cas non couverts par les remarques précédentes sont ceux où $b \leq r \leq a + b$.

Si $b \leq t - s \leq a$, alors $s - a \leq t - a \leq s \leq s + b \leq t \leq t + b$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] &= P[\rho(s-a, s+b) \in ds\ ;\ \rho(t-a, t+b) \in dt] \\ &= P[\rho(s-a, s+b) \in ds\ ;\ D_{s-a,s+b} < G_{s+b,t+b}\ ; \\ &\qquad \rho(s+b, t+b) \in dt] \end{aligned}$$

Conditionnellement à $(\rho(s-a, s+b), \rho(s+b, t+b)) = (s, t)$ les variables aléatoires $Y = D^2_{s-a,s+b}/2b$ et $X = G^2_{s+b,t+b}/2(r-b)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(1)$ et la probabilité pour que $(r-b)X > bY$ vaut donc $(r-b)/r$. Donc

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] = \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}}\ \frac{dt}{\pi\sqrt{(r-b)b}}\ \frac{r-b}{r} = \frac{ds}{\pi\sqrt{ab}}\ \frac{1}{\pi r}\sqrt{\frac{r-b}{b}}dt.$$

Si $a \leq t - s \leq a + b$, alors $s - a \leq s \leq t - a \leq s + b \leq t \leq t + b$. En conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t-a,s+b}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] &= P[\rho(s-a, s+b) \in ds\ ;\ \rho(t-a, t+b) \in dt] \\ &= P[\rho(s-a, t-a) \in ds\ ;\ D_{s-a,t-a} > G_{t-a,s+b}\ ; \\ &\qquad D_{t-a,s+b} < G_{s+b,t+b}\ ;\ \rho(s+b, t+b) \in dt] \\ &= \frac{ds}{\pi\sqrt{a(r-a)}} \times \frac{dt}{\pi\sqrt{b(r-b)}} \\ &\qquad \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{G^2_{t-a,s+b}}{2(r-a)} - \frac{D^2_{t-a,s+b}}{2(r-b)}\Big)\Big] \end{aligned}$$

Mais par changement d'échelle,

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{G^2_{t-a,s+b}}{2(r-a)}-\frac{D^2_{t-a,s+b}}{2(r-b)}\Big)\Big] \quad = \quad \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha G^2_{0,1}+\beta D^2_{0,1}}{2}\Big)\Big]$$

avec

$$\alpha=\frac{a+b-r}{r-a}, \qquad \beta=\frac{a+b-r}{r-b}.$$

Comme

$$1+\alpha=\frac{b}{r-a}, \qquad 1+\beta=\frac{a}{r-b},$$

$$\alpha+\beta+\alpha\beta=(1+\alpha)(1+\beta)-1=\frac{ab-(r-a)(r-b)}{(r-a)(r-b)}=\frac{r(a+b-r)}{(r-a)(r-b)},$$

on a donc d'après le corollaire

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\alpha G^2_{0,1}+\beta D^2_{0,1}}{2}\Big)\Big] \quad &= \quad \frac{(r-a)(r-b)}{r(a+b-r)}\Big(\frac{a+b-r}{\sqrt{b(r-a)}}+\frac{a+b-r}{\sqrt{a(r-b)}}\Big)\\ &= \quad \frac{\sqrt{(r-a)(r-b)}}{r\sqrt{ab}}(\sqrt{a(r-b)}+\sqrt{b(r-a)}),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Remarque 6 (Etude du maximum de la fonction $h_{a,b}$)**

*Si $a \le 4b$, la fonction $h_{a,b}$ est majorée par sa limite en $+\infty$. Autrement dit, la probabilité pour qu'il y ait un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ au voisinage d'un instant $t$ sachant que $s \in \mathcal{M}_{a,b}$ est maximum pour $|t-s| \ge a+b$ : les points de $\mathcal{M}_{a,b}$ « se repoussent ».*

*En revanche, si $a > 4b$, la fonction $h_{a,b}$ possède un maximum global strict en $2b$ : la probabilité pour qu'il y ait un point de $\mathcal{M}_{a,b}$ au voisinage d'un instant $t$ sachant que $s \in \mathcal{M}_{a,b}$ est maximum pour $|t-s| = 2b$.*

Démonstration. On vérifie facilement que la fonction $r \mapsto \sqrt{a(r-b)}+\sqrt{b(r-a)}$ est concave sur $[a,+\infty[$, que sa valeur en $a+b$ est $a+b$ et que sa dérivée en $a+b$ vaut 1. Par conséquent, pour tout $r \in [a,+\infty[$, $\sqrt{a(r-b)}+\sqrt{b(r-a)} \le r$, d'où $h_{a,b}(r) \le 1/(\pi\sqrt{ab})$.

Par ailleurs, on vérifie facilement que la fonction $r \mapsto r^{-1}\sqrt{(r-b)}$ est strictement croissante sur $[b,2b]$, strictement décroissante sur $[2b,+\infty[$, si bien que le maximum de $\pi\sqrt{b}h_{a,b}$ sur $[b,a]$ est majoré par $1/2\sqrt{b}$, avec égalité lorsque $a \ge 2b$. Pour que ce maximum excède $1/\sqrt{a}$, il faut et il suffit que $a > 4b$.

## 3.2 Fonction de corrélation à $n$ points

Une démonstration identique a celle du théorème 5, mais beaucoup plus lourde permet de montrer le résultat suivant.

**Théorème 7** *Quels que soient les réels $t_1 < \ldots < t_n$,*

$$\mathbf{E}[N_{a,b}(dt_1)\cdots N_{a,b}(dt_n)] = f_n(t_1,\ldots,t_n)\ dt_1\cdots dt_n$$

*avec*

$$f_n(t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \prod_{k=1}^{n-1} h_{a,b}(t_{k+1}-t_k).$$

Le processus ponctuel $\mathcal{M}_{a,b}$ possède donc des fonctions de corrélation : les fonctions $f_n(t_1,\dots,t_n)$ étendues à $\mathbf{R}^n$ par symétrie. Mais à la différence d'autres processus, comme l'ensemble des zéros d'une série entière à coefficients indépendants de loi $\mathcal{N}(0,1)$ étudié dans [8], il n'est pas déterminantal : on ne peut pas trouver d'application symétrique $K$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ tel que les fonctions de corrélation soient données par

$$f_n(t_1,\dots,t_n) = \det\big(K(t_i,t_j)\big)_{1\le i,j\le n}.$$

**Remarque 8** *Le processus ponctuel $\mathcal{M}_{a,b}$ n'est pas déterminantal*

Démonstration. En effet, si une telle application $K$ existait, elle devrait vérifier pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$K(t,t) = f_1(t) = c \;\text{ avec }\; c = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}}$$

et pour tout $s,t \in \mathbf{R}$

$$c^2 - K(s,t)^2 = f_2(s,t)$$

Mais $f_n(t_1,\dots,t_n) > 0$ si et seulement si $t_1,\dots,t_n$ sont à distance $> b$ les uns des autres. On aurait donc $K(0,b) = \xi c$, $K(b,2b) = \eta c$, $K(0,2b) = \zeta c$ avec $|\xi| = |\eta| = 1$ et $|\zeta| < 1$, d'où

$$f_3(0,b,2b) = c^3 \begin{vmatrix} 1 & \xi & \zeta \\ \xi & 1 & \eta \\ \zeta & \eta & 1 \end{vmatrix} = -c^3(1 - 2\xi\eta\zeta + \zeta^2) < 0,$$

ce qui est absurde.

## 4 Indépendance et loi des durées entre les points de $\mathcal{M}_{a,b}$

La forme des fonctions de corrélation, et plus précisément le fait que la fonction de corrélation à $n$ points se factorise en $f_n(t_1,\dots,t_n) = c\, h(t_2-t_1)\cdots h(t_n-t_{n-1})$ pour $t_1 < \dots < t_n$ permet de montrer que les durées successives entre les points de $\mathcal{M}_{a,b}$ sont indépendantes et de même loi. Dans la partie 6, nous retrouverons ce résultat en reliant l'ensemble $\mathcal{M}_{a,b}$ à un subordinateur pour utiliser le caractère poissonien des sauts.

**Proposition 9** *Soient $a \ge b > 0$. Notons $T_1 < T_2 < \dots$ les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$.*

- *Les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sont indépendantes.*
- *Les durées $T_n - T_{n-1}$ possèdent une densité commune donnée par*

$$g_{a,b}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} h_{a,b}^{*n}(r)dr$$

*où $h_{a,b}$ est la fonction donnée dans le théorème 5.*

– *La variable aléatoire* $T_1$ *possède une densité donnée par*

$$f_{a,b}(t) = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(t)}{\pi\sqrt{ab}}\Big(1 - \int_0^t g_{a,b}(r)dr\Big).$$

Le passage des fonctions de corrélation à la loi des $n$-uplets $(T_1, \dots, T_n)$ se fait par des arguments classiques figurant par exemple dans [4] au chapitre 5, section 4 « moment measures and product densities », notament l'exemple 5.4(b). Voyons ci-dessous une démonstration directe, inspirée d'idées qui m'ont été suggérées par J. Brossard.

Démonstration. Dans tout la démonstration, nous omettrons les indices $a, b$ et nous poserons $c = 1/(\pi\sqrt{ab})$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $D_n = \{(t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}^n : t_1 < \dots < t_n\}$. A l'aide du théorème des classes monotones, on vérifie que pour tout borélien $C \subset D_n$,

$$\mathbf{E}[\mathrm{Card}(\mathcal{M}^n_{a,b} \cap C)] = \int_C f_n(t_1, \dots, t_n)\ dt_1 \cdots dt_n.$$

Calculons la loi de $(T_1, T_2)$ ; un calcul semblable fournit la loi de $(T_1, \dots, T_n)$, la seule différence étant la longueur des formules).

Soient $I_1 = [a_1, b_1]$ et $I_2 = [a_2, b_2]$ des intervalles de longueur $< b$ dont les bornes vérifient $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. Notons $J_1 = ]0, a_1[$ et $J_2 = ]b_1, a_2[$. Comme $I_1$ et $I_2$ contiennent au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{[T_1 \in I_1\ ; T_2 \in I_2]} &= \mathbf{I}_{[N(J_1)=0\ ;\ N(I_1)=1\ ;\ N(J_2)=0\ ;\ N(I_2)=1]} \\
&= (1-1)^{N(J_1)} N(I_1) (1-1)^{N(J_2)} N(I_2) \\
&= \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} \binom{N(J_1)}{k} N(I_1) \binom{N(J_2)}{l} N(I_2) \\
&= \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} \mathrm{Card}(\mathcal{M}^{k+l+2} \cap C_{k,l}),
\end{aligned}$$

avec $C_{k,l} = D_{k+l+2} \cap J_1^k \times I_1 \times J_2^l \times I_2$. En passant aux espérances, on obtient donc

$$P[T_1 \in I_1\ ; T_2 \in I_2] = \sum_{k,l \in \mathbf{N}} (-1)^{k+l} e_{k,l}$$

avec

$$\begin{aligned}
e_{k,l} &= \mathbf{E}[\mathrm{Card}(\mathcal{M}^{k+l+2} \cap C_{k,l}] \\
&= \int_{C_{k,l}} f_{k+l+2}(u_1, \dots, u_k, t_1, v_1, \dots, v_l, t_2)\ du_1 \cdots du_k\ dt_1\ dv_1 \cdots dv_l\ dt_2 \\
&= \int_{I_1 \times I_2} \Big( \int_{0 < u_1 < \dots < u_k < a_1} c\ h(u_2 - u_1) \cdots h(u_k - u_{k-1}) h(t_1 - u_k)\ du_1 \cdots du_k \Big) \\
&\quad \Big( \int_{b_1 < v_1 < \dots < v_l < a_2} h(v_1 - t_1) h(v_2 - v_1) \cdots h(v_l - v_{l-1}) h(t_2 - v_l)\ dv_1 \cdots dv_l \Big) dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Comme le support de $h$ est contenu dans $[b, +\infty[$ et comme les intervalles $I_1$ et $I_2$ sont de longueur $< b$, on ne change pas les intégrales ci-dessus en remplaçant les domaines d'intégration donnés par les inégalités

$$0 < u_1 < \dots < u_k < a_1 \quad \text{et} \quad b_1 < v_1 < \dots < v_l < a_2$$

par les domaines légèrement plus gros définis par

$$0 < u_1 < \ldots < u_k < t_1 \quad \text{et} \quad t_1 < v_1 < \ldots < v_l < t_2.$$

Les intégrales obtenues s'interprètent comme des produits de convolution et on trouve

$$e_{k,l} \quad = \quad \int_{I_1 \times I_2} (c\ \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k})(t_1)\ h^{*(l+1)}(t_2 - t_1)\ dt_1\ dt_2.$$

Ainsi,

$$P[T_1 \in I_1\,; T_2 \in I_2] = \int_{I_1 \times I_2} \Big( \sum_{k \in \mathbf{N}} (-1)^k\, c\, \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k}(t_1) \Big) \Big( \sum_{l \in \mathbf{N}} (-1)^l\, h^{*(l+1)}(t_2 - t_1) \Big)\, dt_1\, dt_2,$$

ce qui montre que les variables aléatoires $T_1$ et $T_2 - T_1$ sont indépendantes, que $T_2 - T_1$ admet comme densité

$$g = \sum_{l \in \mathbf{N}} (-1)^l\ h^{*(l+1)} = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} (-1)^{k-1}\ h^{*k}$$

et que $T_1$ admet comme densité

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} (-1)^k\ c\ \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * h^{*k} = c\ (\mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} - \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * g).$$

Remarquons que les interversions des sommes avec les espérances ou avec les intégrales ne posent pas de problème : toutes les sommes se ramènent à des sommes finies du fait que $N(J) \leq \mathrm{Ent}(L/b) + 1$ si $J$ est un intervalle de longueur $L$ et grâce au fait que $h$ est à support dans $[b, +\infty[$.

La proposition ci-dessus décrit la loi des instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ après l'instant 0. Par stationnarité, on peut remplacer 0 par n'importe quel instant fixé, ce qui détermine complètement la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$.

Il est intéressant de disposer d'une description « bilatérale » donnant la loi des instants successifs de part et d'autre de 0. Le théorème ci-dessous montre que ces instants forment un processus de renouvellement stationnaire, comme le processus des $h$-extrema introduit par J. Neveu et J. Pitman dans [7]. Mais la loi des durées entre les points successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ est plus compliquée que la loi des durées entre les $h$-extrema successifs, qui a pour transformée de Laplace $\theta \mapsto 1/\mathrm{ch}(h\sqrt{2\theta})$.

**Théorème 10 (Description bilatérale de la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$)**
*Notons $\ldots < T_{-1} < T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$ les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ avec $T_0 \leq 0 < T_1$. Alors*

- *Les durées $\ldots, T_{-1} - T_{-2}, T_0 - T_{-1}, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ sont indépendantes, de même loi et forment une suite indépendante du couple $(T_0, T_1)$.*
- *La durée $T_2 - T_1$ possède une densité donnée par*

$$g_{a,b}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} h_{a,b}^{*n}(r)$$

*où $h_{a,b}$ est la fonction donnée dans le théorème 5.*

– *La variable* $(T_0, T_1)$ *possède une densité donnée par*

$$f_{a,b}(t_0, t_1) = \frac{\mathbf{I}_{t_0<0<t_1}}{\pi\sqrt{ab}} g_{a,b}(t_1 - t_0).$$

Démonstration. Soient $I_{-n+1}, \dots, I_0, I_1, \dots, I_n$ des intervalles de $\mathbf{R}$, non enchevétrés, rangés dans cet ordre tels que 0 majore $I_0$ et minore $I_1$. Notons $c$ la borne inférieure de $I_{-n}$ et supposons que $I_{-n}$ est de longueur $< b$. Dans ce cas, $I_{-n}$ contient au plus un point de $\mathcal{M}_{a,b}$, si bien que l'événement

$$[\forall k \in [-n+1 \dots n], T_k \in I_k].$$

signifie que $T_{-n+1}, \dots, T_n$ sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$ après $c$. Par stationnarité de $\mathcal{M}_{a,b}$, cet événement a pour probabilité

$$P[\forall k \in [1 \dots 2n], T_k \in J_k] = \int_{J_1 \times \cdots \times J_{2n}} f_{a,b}(s_1) g_{a,b}(s_2 - s_1) \cdots g_{a,b}(s_{2n} - s_{2n-1}) ds_1 \cdots ds_{2n}$$

avec $J_k = I_{k-n} - c$ pour tout $k \in [1 \dots 2n]$. Mais $J_1 \subset [0, b]$, d'où $f_{a,b}(s_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}}$ pour tout $s_1 \in J_1$. En effectuant le changement de variables $s_k = t_{k-n} - c$, on obtient donc

$$P[\forall k \in [-n+1 \dots n], T_k \in I_k] = \int_{I_{-n+1} \times \cdots \times I_n} \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} \prod_{|k| \leq n+1} g_{a,b}(t_{k+1} - t_k) dt_1 \cdots dt_{2n}.$$

Comme $g_{a,b}$ est nulle sur $\mathbf{R}_-$, on en déduit que $(T_{-n+1}, \dots, T_n)$ admet pour densité

$$(t_{-n+1}, \dots, t_n) \mapsto \frac{\mathbf{I}_{t_0<0<t_1}}{\pi\sqrt{ab}} \prod_{|k| \leq n+1} g_{a,b}(t_{k+1} - t_k),$$

d'où le résultat.

**Remarque.** L'invariance de la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ par translation permet de déduire facilement la densité de $(T_0, T_1)$ de celle de $T_1$. En effet, pour $t_0 < 0 < t_1$,

$$P[T_0 \leq t_0; T_1 > t_1] = P[\mathcal{M}_{a,b} \cap ]t_0, t_1] = \emptyset] = P[\mathcal{M}_{a,b} \cap ]0, t_1 - t_0] = \emptyset] = P[T_1 > t_1 - t_0].$$

Dans la suite, nous allons démontrer autrement l'indépendance des durées entre les points successifs de $\mathcal{M}_{a,b}$. Pour cela, nous allons nous intéresser à l'ensemble $\mathcal{M}_{a,0} = \{t \in \mathbf{R} : U_t \geq a\}$ des instants qui sont des records depuis une durée au moins égale à $a$. L'étude de cet ensemble qu'on pourrait qualifier de « fermé stationnaire régénératif » se ramène à celle du fermé régénératif $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : U_t \geq \min(t, a)\}$.

# 5 Le fermé régénératif $\mathcal{R}_a$

Dans cette partie, nous notons $A_t^a = \max\{B_s \,; s \in [(t-a)_+, t]\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, si bien que $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_t\}$. Pour ne pas alourdir les notations, nous omettrons souvent l'indice $a$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Proposition 11** *Le fermé $\mathcal{R}_a$ est régénératif dans la filtration naturelle de $(B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, notée $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in\mathbf{R}_+}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{R}_a$ est l'ensemble des zéros de $(A_t - B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$, on en déduit que $\mathcal{R}_a$ est prévisible (donc progressif) dans la filtration naturelle de $B$.

Soient $r > 0$ et $D_r = \inf(\mathcal{R}_a \cap ]r, +\infty[)$. Notons $B'_t = B_{D_r+t} - B_{D_r}$, $A'_t = \max\{B'_s\,; s \in [(t-a)_+, t]\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et $\mathcal{R}'_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A'_t = B'_t\}$. Alors pour tout $r \geq 0$,

$$D_r + t \in \mathcal{R}_a \Longleftrightarrow B_{D_r+t} = \max\{B_s\,; s \in [(D_r+t-a)_+, D_r+t]\}$$

Mais le maximum de $B$ sur l'intervalle $[(D_r+t-a)_+, D_r+t]$ est aussi le maximum de $B$ sur l'intervalle $[D_r + (t-a)_+, D_r+t]$. En effet, si $t \leq a$, alors $(D_r - a)_+ \leq (D_r + t - a)_+ \leq D_r$ donc $B_{D_r} = \max\{B_s\,; s \in [(D_r+t-a)_+, D_r]\}$ ; si $t \geq a$, il n'y a rien à prouver. Donc

$$D_r + t \in \mathcal{R}_a \Longleftrightarrow B'_t = \max\{B'_s\,; s \in [(t-a)_+, +t]\}$$

ce qui montre que $(\mathcal{R}_a - D_r)_+ = \mathcal{R}'_a$ est indépendant de $\mathcal{F}^B_{D_r}$ et de même loi que $\mathcal{R}_a$.

**Proposition 12** *(Propriétés du processus $(A_t^a)_{t\in\mathbf{R}_+}$)*

1. *Le processus $(A_t^a)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est continu et à variation localement bornée.*
2. *La décomposition $(A_t^a)_{t\in\mathbf{R}_+}$ en somme d'un processus croissant et d'un processus décroissant s'écrit*

$$A_t^a = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s^a = B_s]} dA_s^a + \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s^a = B_{s-a}]} dA_s^a.$$

3. *Le processus $L^a = \int_0^\cdot \mathbf{I}_{[A_s^a = B_s]} dA_s^a$ est le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $(A_t^a - B_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$.*

Démonstration. La démonstration comporte plusieurs étapes.

La continuité du processus $(A_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est évidente.

L'ensemble des instants $t$ tels que $A_t > B_t$ est un ouvert de $\mathbf{R}_+$ et le processus $(A_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est décroissant sur chaque composante connexe de cet ouvert. En effet, si $A_{t_0} > B_{t_0}$, alors par continuité de $B$, $A_t = \max\{B_s\ ;\ s \in [(t-a)_+, t_0]\}$ au voisinage de $t_0$. De même, l'ensemble des instants $t$ tels que $A_t > B_{(t-a)_+}$ est un ouvert de $\mathbf{R}_+$ et le processus $(A_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est croissant sur chaque composante connexe de cet ouvert.

Définissons une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $T_0 = 0$ et

$$T_{2n+1} = \inf\{t > T_{2n} : A_t = B_{(t-a)_+}\}.$$

$$T_{2n+2} = \inf\{t \geq T_{2n+1} : A_t = B_t\}.$$

D'après les remarques précédentes, le processus $A$ est croissant sur chaque intervalle $[T_{2n}, T_{2n+1}]$, et décroissant sur chaque intervalle $[T_{2n+1}, T_{2n+2}]$. Par ailleurs, presque sûrement sur l'événement $[T_{2n} < \infty]$, pour tout $t \in ]T_{2n}, T_{2n}+a]$

$$A_t \geq \max\{B_s\ ;\ s \in [T_{2n}, t]\} > B_{T_{2n}} = A_{T_{2n}} \geq B_{(t-a)_+}$$

ce qui entraîne que $T_{2n+1} \geq T_{2n} + a$. Par conséquent $T_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Ainsi, le processus $A$ est monotone par morceaux.

L'intersection des fermés $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_t\}$ et $\{s \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_{(t-a)_+}\}$ est au plus dénombrable : elle est contenue dans l'ensemble des instants $T_n$ et même dans l'ensemble des instants de la forme $T_{2n}$, puisque l'égalité $A_{T_{2n+1}} = B_{T_{2n+1}}$ entraîne $T_{2n+2} = T_{2n+1}$. Comme le processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est constant sur tout intervalle où $A_t$ est différent de $B_t$ et $B_{t-a}$, il se décompose sous la forme

$$A_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s = B_s]} dA_s + \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s = B_{s-a}]} dA_s.$$

Le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $(A_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ est donné par la formule de Tanaka

$$A_t - B_t = A_0 - B_0 + \int_0^t \mathrm{sgn}(A_s - B_s) d(A_s - B_s) + L_t,$$

avec la convention $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Comme pour tout $s > 0$, $P[A_s = B_s] = 0$, l'ensemble des $s \in \mathbf{R}_+$ tels que $A_s = B_s$ est presque sûrement de mesure nulle. En utilisant la décomposition du processus $(A_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ démontrée plus haut, on obtient

$$A_t - B_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s = B_{(s-a)_+}]} dA_s - B_t + L_t,$$

d'où par différence,

$$L_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_s = B_s]} dA_s,$$

ce qui termine la démonstration.

**Remarque 13** *Presque sûrement, l'intersection des fermés* $\{t \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_t\}$ *et* $\{s \in \mathbf{R}_+ : A_t^a = B_{(t-a)_+}\}$ *est réduite à* $\{0\}$.

Bien que ce résultat ne soit pas utile pour la suite, nous donnons une démonstration, qui utilise la fragmentation en intervalles associée à l'excursion brownienne, (voir [2]).

Démonstration. Grâce à la propriété de Markov, il suffit de montrer que presque sûrement, $T_2$ n'appartient pas à $\{s \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_{(t-a)_+}\}$.

Notons $\epsilon$ la première excursion de longueur $\geq a$ du mouvement brownien réfléchi $(S_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$, $\Lambda$ sa longueur et $\mathbf{e}$ l'excursion brownienne de longueur 1 obtenue par changement d'échelle à partir de $\epsilon$. Les variables aléatoires $\Lambda$ et $\mathbf{e}$ sont indépendantes, et $P[\Lambda > x] = \sqrt{a/x}$ pour tout $x \geq a$. En particulier $\Lambda > a$ presque sûrement.

L'excursion $\epsilon$ débute à l'instant $T_1 - a$ et finit après l'instant $T_2$. Plus précisément, regardons la fragmentation en intervalles associée à l'excursion $\epsilon$ : pour tout $h > 0$, on note $F_h$ la collection des intervalles d'excursions de $(S_t - B_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ au-dessus de $h$ contenues dans l'excursion $\epsilon$. Alors $T_2$ est la fin du premier intervalle de longueur $> a$ au moment où celui-ci se casse en deux intervalles de longueur $\leq a$. Pour que $A_{T_2} = B_{T_2 - a}$, il faudrait que la fragmentation associée à l'excursion $\mathbf{e}$ produise un intervalle de longueur exactement égale à $a/\Lambda$.

Mais si l'on choisit $U$ uniformément dans $[0,1]$ et indépendamment de $\mathbf{e}$, on sait que la longueur de l'intervalle contenant $U$ au cours de la fragmentation évolue à un changement de temps près comme $e^{-\xi}$, où $\xi$ est un subordinateur. Le subordinateur $\xi$ ne dépend que de $\mathbf{e}$ et de $U$ et est donc indépendant de $\Lambda$. Comme il est sans dérive, $P[\exists t \in \mathbf{R}_+ : e^{-\xi_t} = a/\Lambda] = 0$, d'où $P[B_{T_2} = B_{T_2-a}] = 0$.

On sait que tout fermé régénératif parfait est l'image fermée d'un subordinateur, unique à changement de temps linéaire près : voir le théorème 2.1 de [1], démontré dans l'article [6] de B. Maisonneuve. Une façon d'obtenir le subordinateur est de construire un temps local associé au fermé régénératif et de prendre son inverse. Nous allons voir que le temps local $L^a$ fait l'affaire, bien que qu'il soit défini comme temps local de la semimartingale $A^a - B$.

**Proposition 14** *L'inverse continu à droite du processus $L^a = \int_0^t \mathbf{I}_{[A^a_s = B_s]} dA^a_s$, défini par $\sigma^a_l = \inf\{t \geq 0 : L^a_t > l\}$ est un subordinateur dont l'image fermée est $\mathcal{R}_a$.*

Démonstration. L'image fermée de $\sigma^a$ est égale au support de la mesure de Stieljes associée à $L$, qui est inclus dans $\mathcal{R}_a = \{t \in \mathbf{R}_+ : A_t = B_t\}$. A l'aide de la propriété forte de Markov, on montre que pour tout rationnel $r > 0$, l'instant $D_r = \inf(\mathcal{R}_a \cap ]r, +\infty[)$ est (presque sûrement) un instant de croissance des processus $A$ et $L$, donc appartient à l'image de $\sigma^a$. Comme $\mathcal{R}_a$ est d'intérieur vide, tout instant de $\mathcal{R}_a$ peut être approché par un instant de la forme $D_r$, si bien que $\mathcal{R}_a$ est contenu dans l'image fermée de $\sigma^a$.

Comme $L_t \geq A_t \geq B_t$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et comme presque sûrement, les trajectoires browniennes ne sont pas bornées, le processus croissant $L$ tend vers $\infty$, si bien que les temps d'arrêt $\sigma^a_l$ sont finis presque sûrement. Fixons $l > 0$ et notons pour $t \geq 0$

$$B'_t = B_{\sigma^a_l + t} - B_{\sigma^a_l},$$

$$A'_t = \max\{B'_s\ ; s \in [(t-a)_+, t]\}$$

$$L'_t = \int_0^t \mathbf{I}_{[A'_s = B'_s]} dA'_s.$$

Comme dans la proposition 1, on montre que pour tout $t \geq 0$, $A_{\sigma^a_l + t} = B_{\sigma^a_l} + A'_t$ grâce à l'égalité $A_{\sigma^a_l} = B_{\sigma^a_l}$. On en déduit que

$$L_{\sigma^a_l + t} - A_{\sigma^a_l} = \int_0^t \mathbf{I}_{[A_{\sigma^a_l + s} = B_{\sigma^a_l + s}]} dA_{\sigma^a_l + s} = \int_0^t \mathbf{I}_{[A'_s = B'_s]} dA'_s = L'_t.$$

Par conséquent, le processus $\sigma^a_{l+\cdot} - \sigma^a_l$ est l'inverse continu à droite de $L'$. Ce processus est donc indépendant de $\mathcal{F}^B_{\sigma^a_l}$ et a même loi que $\sigma^a$.

Nous décrirons plus loin la mesure de Lévy du subordinateur $\sigma^a$. Donnons déjà un résultat immédiat.

**Proposition 15** *Soit $\nu_a$ la mesure de Lévy du subordinateur $\sigma^a$. Pour tout $b \in ]0, a]$,*

$$\nu_a[b, \infty[ = \sqrt{\frac{2}{\pi b}}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que le processus $A$ coïncide avec le processus $S$ défini par $S_t = \max\{B_s\ ; s \in [0,t]\}$ jusqu'à l'instant $T_1 = \inf\{t \geq a : A_t = B_{t-a}\}$, qui correspond au premier palier de longueur $\geq a$ des deux processus. Leurs inverses continus à droite coïncident donc jusqu'au premier saut de taille $\geq a$, qui a lieu au même moment pour les deux. Donc les mesures de Lévy de ces deux subordinateurs donnent la même mesure à l'intervalle $[b,+\infty[$ pour tout $b \in ]0,a]$, puisque le premier saut de hauteur $\geq b$ d'un subordinateur de mesure de Lévy $\nu$ se produit au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\nu[b,+\infty[$.

## 6 Lien entre $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{M}_{a,b}$ pour $a \geq b > 0$

Supposons que $a \geq b > 0$. Sur l'événement presque sûr où les maxima locaux sont à des hauteurs toutes différentes (voir proposition 1), on vérifie facilement l'équivalence suivante, valable pour tout $t > a$ :

$$t \in \mathcal{M}_{a,b} \Longleftrightarrow \mathcal{R}_a \cap [t, t+b[= \{t\}.$$

Par conséquent la trace de $\mathcal{M}_{a,b}$ sur $]a,+\infty[$ est l'ensemble des débuts des intervalles de longueur $\geq b$ dans l'ouvert $\mathcal{R}_a^c \cap\ ]a,+\infty[$.

Ces intervalles correspondent aux sauts de hauteur $\geq b$ du subordinateur $\sigma^a$ après le franchissement de $a$. Plus précisément, les éléments de $\mathcal{M}_{a,b} \cap ]a,+\infty[$ sont les instants $T'_n = \sigma^a_{(R_n)-}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ où $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite définie par $R_0 = \inf\{l \geq 0 : \sigma^a_l > a\}$ et $R_n = \inf\{l > R_{n-1} : \Delta\sigma^a_l \geq b\}$. Comme le processus des sauts $(\Delta\sigma^a_l)_{l\geq 0}$ est un processus de Poisson ponctuel, on en déduit que les durées $T'_2 - T'_1, T'_3 - T'_2, \ldots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, indépendante de $T'_1$.

Soit $\nu_a$ la mesure de Lévy du subordinateur $\sigma^a$. On peut exprimer la transformée de Laplace de $T'_2 - T'_1$ à l'aide $\nu_a$ en écrivant

$$T'_2 - T'_1 = \lim_{\epsilon \to 0}\ \Delta\sigma^a_{R_1} + \sum_{R_1 < l < R_2} \Delta\sigma^a_l \mathbf{I}_{[\Delta\sigma^a_l \geq \epsilon]}.$$

En effet :
- le saut $\Delta\sigma^a_{R_1}$ a pour loi $\nu_a(\cdot|[b,\infty[)$ ;
- les sauts successifs de hauteurs $\geq \epsilon$ après $T_{a,0}$ ont pour loi $\nu_a(\cdot|[\epsilon,\infty[)$ ;
- le nombre de ces sauts jusqu'au premier saut de hauteur $\geq b$ suit une loi géométrique de paramètre $\nu_a[b,\infty[/\nu_a[\epsilon,\infty[$ ;
- toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

Donc pour tout $\theta \geq 0$, $\exp[-\theta(T'_2 - T'_1)]$ est la limite quand $\epsilon \to 0$ de

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}_+^*} e^{-\theta x}\nu_a(dx|[b,\infty[) \quad &\times \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_a[b,\infty[}{\nu_a[\epsilon,\infty[}\Big(\frac{\nu_a[\epsilon,b\ [}{\nu_a[\epsilon,\infty[}\Big)^{n-1}\Big(\int_{\mathbf{R}_+^*} e^{-\theta x}\nu_a(dx|[\epsilon,b[)\Big)^{n-1} \\
&= \int_{[b,\infty[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)\frac{1}{\nu_a[\epsilon,\infty[}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\int_{[\epsilon,b[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)}{\nu_a[\epsilon,\infty[}\Big)^{n-1} \\
&= \frac{\int_{[b,\infty[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)}{\nu_a[\epsilon,\infty[ - \int_{[\epsilon,b[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)}.
\end{aligned}$$

Par stationnarité des accroissements de $B$, la loi de $\mathcal{M}_{a,b}$ est invariante par translation si bien que la suite $(T'_n - a)_{n\geq 1}$ a même loi que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ où $T_1 < T_2 < \ldots$ sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$. On peut donc énoncer le résultat suivant.

**Proposition 16** *Soient $a \geq b > 0$. Notons $T_1 < T_2 < \ldots$ les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$.*

- *Les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ sont indépendantes.*
- *Les durées $T_n - T_{n-1}$ ont même loi, et leur transformée de Laplace est donnée par*

$$\mathbf{E}[e^{-\theta(T_2-T_1)}] = \frac{\int_{[b,\infty[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)}{\int_{\mathbf{R}_+^*}(1-\mathbf{I}_{[x<b]}e^{-\theta x})\nu_a(dx)}$$

*où $\nu_a$ est la mesure de Lévy du subordinateur $\sigma^a$.*

**Une autre démonstration de la proposition 9.**

Nous venons de redémontrer l'indépendance des variables $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ et l'équidistribution des durées $T_n - T_{n-1}$, qui constitue la partie difficile de la proposition 9. En effet, une fois ce point établi, on déduit facilement le reste de cette proposition à partir du théorème 5 en remarquant que si $\mu_{a,b}$ est la loi de $T_1$ et $\nu_{a,b}$ la loi de $T_2 - T_1$, alors pour tout $t > s > 0$

$$\frac{ds}{\pi\sqrt{ab}} = \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)] = \sum_{m=1}^{\infty} P[T_m \in ds] = \sum_{m=1}^{\infty}(\mu_{a,b} * \nu_{a,b}^{*(m-1)})(ds)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{ds}{\pi\sqrt{ab}}h_{a,b}(t-s)dt = \mathbf{E}[N_{a,b}(ds)N_{a,b}(dt)] &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P[T_m \in ds\ ;\ T_{m+n} \in dt] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_{a,b} * \nu_{a,b}^{*(m-1)})(ds)\ \nu_{a,b}^{*n}(dt-s)\end{aligned}$$

d'où

$$h_{a,b}(r)dr = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_{a,b}^{*n}(dr)$$

On en déduit les égalités suivantes pour les transformées de Laplace

$$\frac{1}{\pi\sqrt{ab}\theta} = \frac{\mathcal{L}\mu_{a,b}(\theta)}{1-\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}$$

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\theta) = \frac{\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}{1-\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta) = \frac{\mathcal{L}h_{a,b}(\theta)}{1+\mathcal{L}h_{a,b}(\theta)}.$$

$$\mathcal{L}\mu_{a,b}(\theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}\theta}(1-\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)).$$

Soit $\lambda_+$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}_+$. Par injectivité de la transformation de Laplace,

$$\nu_{a,b}(dr) = \big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n h_{a,b}^{*n}(r)\big)\ dr.$$

$$\mu_{a,b} = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}}(\lambda_+ - \lambda_+ * \nu_{a,b}).$$

Pour justifier le calcul de la transformée de Laplace de

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}h_{a,b}^{*n},$$

on utilise le fait que $h_{a,b}$ est à support dans $\mathbf{R}_+$ et est majorée par une constante $C$. En effet, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $r \in \mathbf{R}_+$,

$$h_{a,b}^{*n}(r) \leq C^n \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_{a,b}^{*n}(r) \leq Ce^{Cr}$$

Cette majoration permet d'utiliser le théorème de Fubini et d'écrire pour $\theta > C$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta r}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}h_{a,b}^{*n}(r)\Big)dr = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\mathcal{L}h_{a,b})^n(\theta) = \mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta).$$

# 7 Description de la mesure de Lévy du subordinateur $\sigma^a$

Dans toute cette partie, on étudie la fonction $G_a$ définie par $G_a(r) = \nu_a]r,\infty[$ pour $r > 0$ et $G_a(r) = 0$ pour $r \leq 0$.

## 7.1 Equations de convolution vérifiées par $G_a$

En utilisant les égalités ci-dessus et la proposition 16, on obtient lorsque $a \geq b > 0$,

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\theta) = \frac{\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)}{1-\mathcal{L}\nu_{a,b}(\theta)} = \frac{\int_{[b,\infty[} e^{-\theta x}\nu_a(dx)}{\int_0^{\infty}(1-e^{-\theta x})\nu_a(dx)}.$$

Comme

$$\int_0^{\infty}(1-e^{-\theta x})\ \nu_a(dx) = \int_0^{\infty} \theta\ e^{-\theta r}\ G_a(r)\ dr = \theta\ \mathcal{L}G_a(\theta),$$

l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\theta)\ \mathcal{L}G_a(\theta) = \frac{1}{\theta}\int_{[b,\infty[} e^{-\theta x}\ \nu_a(dx),$$

soit en termes de convolution :

$$h_{a,b} * G_a = \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+} * (\mathbf{I}_{[b,\infty[}\nu_a).$$

Pour tout $x \geq 0$, on a donc

$$\int_0^x h_{a,b}(y)\ G_a(x-y)\ dy = G_a(b) - G_a(x \vee b). \tag{1}$$

Comme $h_{a,b}(y) = 0$ pour $y \leq b$, cette égalité donne la valeur de $G_a(x)$ pour $x \geq b$ en fonction de $G_a(b)$ et des valeurs $G_a(z)$ pour $z \in [0, x-b]$. Comme $G_a(x) = \sqrt{2/\pi x}$ pour tout $x \in [0,a]$, $G_a$ est connue *a fortiori* sur $[0,b]$, et la relation (1) permet de calculer par récurrence la valeur de $G_a$ sur les intervalles de la forme $[nb,(n+1)b]$ avec $n \in \mathbf{N}$. Les formules deviennent vite compliquées même si elles se simplifient un peu dans le cas où $b = a$.

Un autre cas particulier plus intéressant est le cas limite où $b \to 0$. En effet, pour tout $b \leq a$, $\sqrt{b}G_a(b) = \sqrt{2\pi}$ et pour tout $y > 0$, $\pi\sqrt{b}h_{a,b}(r) \to (y \wedge a)^{-1/2}$ quand $b \to 0$. En multipliant par $\pi\sqrt{b}$ l'égalité 1 et en faisant tendre $b$ vers 0, on obtient donc par convergence dominée

$$\int_0^x (y \wedge a)^{-1/2}\ G_a(x-y)\ dy = \sqrt{2\pi}.$$

Cette égalité fournit une expression simple de la transformée de Laplace de $G_a$.

### 7.2 Expressions de la transformée de Laplace de $G_a$ et applications

**Théorème 17** *La transformée de Laplace de $G_a$ est donnée par*

$$\mathcal{L}G_a(\theta) \times \int_0^\infty (r \wedge a)^{-1/2}\ e^{-\theta r} dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (r \wedge a)^{-1/2}\ e^{-\theta r} dr &= \int_0^\infty a^{-1/2}\ e^{-\theta r} dr + \int_0^a (r^{-1/2} - a^{-1/2})\ e^{-\theta r} dr \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta} + \int_0^a \frac{r^{-3/2}}{2}\ \frac{1-e^{-\theta r}}{\theta} dr. \\ &= \frac{a^{-1/2}}{\theta}\Big(1 + \int_0^1 \frac{t^{-3/2}}{2}(1-e^{-\theta a t})\ dt\Big).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\ G_a(r)\ dr = \sqrt{2\pi a}\ \Big(1 + \int_0^1 \frac{t^{-3/2}}{2}(1-e^{-\theta a t})\ dt\Big)^{-1}$$

En développant en série $1 - e^{-\theta a t}$ et en intégrant terme à terme, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\theta r}\ G_a(r)\ dr = \sqrt{2\pi a}\ \Big(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\theta a)^n}{n!(2n-1)}\Big)^{-1}.$$

On reconnaît une fonction hypergéométrique dans le membre de droite. Rappelons que fonction hypergéométrique ${}_1F_1(a,b,\cdot)$ est définie par :

$${}_1F_1(a,b,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!},$$

en notant $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$. On vérifie immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial x}\ {}_1F_1(a,b,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\frac{x^n}{n!} = \frac{a}{b}\ {}_1F_1(a+1,b+1,x).$$

En particulier,

$${}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)_n}{(1/2)_n}\frac{x^n}{n!} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!(2n-1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ {}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};x) = -\ {}_1F_1(\frac{1}{2};\frac{3}{2};x).$$

On en déduit par prolongement analytique, l'égalité

$$\int_0^\infty e^{\theta r}\ G_a(r)\ dr = \sqrt{2\pi a}\ \Big({}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\theta a)\Big)^{-1}$$

pour tout réel $\theta$ tel que $\theta a < \rho$, où $\rho$ est l'unique zéro dans $\mathbf{R}_+$ de la fonction ${}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\cdot)$. De plus, quand $\varepsilon \to 0+$,

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon r}e^{\rho r/a}\ G_a(r)\ dr = \sqrt{2\pi a}\ \Big({}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\rho - a\varepsilon)\Big)^{-1} \sim \frac{\sqrt{2\pi a}}{\lambda a\varepsilon}.$$

avec $\lambda = {}_1F_1(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\rho)$. A l'aide du théorème taubérien de Hardy ou de Karamata (voir [5] au chapitre XIII), on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 18** *Notons $\rho$ l'unique zéro dans $\mathbf{R}_+$ de la fonction ${}_1F_1(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\cdot)$ et $\lambda = {}_1F_1(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\rho)$. Alors quand $x \to +\infty$,*

$$\int_0^x e^{\rho r/a}\ G_a(r)\ dr \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda\sqrt{a}}\ x.$$

On peut s'attendre à ce que la queue $G_a$ soit suffisamment régulière pour que $e^{\rho r/a}\ G_a(r)$ ait une limite quand $r \to +\infty$, ce qui conduit à la conjecture suivante sur le comportement asymptotique de la queue de $\nu_a$.

**Conjecture.** Avec les mêmes notations que ci-dessus,

$$G_a(r) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda\sqrt{a}}\ e^{-\rho r/a}.$$

**Remarque.** Si $a \geq b > 0$ et si $T_1 < T_2 < \ldots$ sont les instants successifs de $\mathcal{M}_{a,b} \cap \mathbf{R}_+^*$, on peut conjecturer de même que la variable aléatoire $T_2 - T_1$ a une queue (et une densité) à décroissance exponentielle. En effet, d'après la proposition 16, on a pour tout $\theta > 0$,

$$1 - \mathbf{E}[e^{-\theta(T_2-T_1)}] = \frac{\int_{[0,\infty[}(1-e^{-\theta x})\nu_a(dx)}{\int_{\mathbf{R}_+^*}(1-\mathbf{I}_{[x<b]}e^{-\theta x})\nu_a(dx)} = \frac{\sqrt{2\pi}\ \theta\mathcal{L}G_a(\theta)}{2b^{-1/2} + \int_{[0,b]}(1-e^{-\theta x})x^{-3/2}dx}$$

Cette formule s'étend par prolongement analytique à tout $\theta > -\rho/a$, et

$$\mathbf{E}[e^{(\frac{\rho}{a}-\varepsilon)(T_2-T_1)}] \sim c/\varepsilon \quad \text{quand} \quad \epsilon \to 0+.$$

### 7.3 Expression de $G_a$ sous forme de série

La transformée de Laplace de $G_a$ peut être réécrite comme suit.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}G_a(\theta) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta}\Big(\int_0^\infty r^{-1/2}\, e^{-\theta r}dr + \int_a^\infty (a^{-1/2} - r^{-1/2})\, e^{-\theta r}dr\Big)^{-1} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\theta}\Big(\sqrt{\frac{\pi}{\theta}} + \frac{1}{2\theta}\int_a^\infty r^{-3/2}e^{-\theta r}dr\Big)^{-1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\theta}}\Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\int_a^\infty r^{-3/2}e^{-\theta r}dr\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour tout $\theta$ suffisamment grand, on a donc

$$\mathcal{L}G_a(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\theta}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\int_a^\infty r^{-3/2}e^{-\theta r}dr\Big)^n.$$

Remarquons que l'application

$$\theta \mapsto \Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}}\int_a^\infty r^{-3/2}e^{-\theta r}dr\Big)^n$$

est la transformée de Laplace du produit de convolution de $r \mapsto (2\pi)^{-1}\mathbf{I}_{[r>0]}r^{-1/2}$ avec $r \mapsto \mathbf{I}_{[r>a]}r^{-3/2}$. Mais pour $r > a$,

$$\int_a^r \frac{dy}{(r-y)^{1/2}y^{3/2}} = \int_a^r \sqrt{\frac{y}{r-y}}\,\frac{dy}{y^2} = \int_{a/(r-a)}^\infty \sqrt{z}\,\frac{dz}{rz^2} = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{r-a}{a}},$$

grâce au changement de variable $z = y/(r-y)$ d'où $1/z = r/y - 1$. On déduit des calculs précédents une expression de $G_a$.

**Théorème 19** *Notons $u$ et $h_{\infty,a}$ les applications définies par*

$$u(r) = \mathbf{I}_{[r>0]}\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \quad \textit{et} \quad h_{\infty,a}(r) = \frac{\mathbf{I}_{[r>a]}}{\pi r}\sqrt{\frac{r-a}{a}}.$$

*Alors*

$$G_a = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(u * h_{\infty,a}^{*n})$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u * h_{\infty,a}^{*n}$ est à support dans $[na, +\infty[$. Pour calculer $G_a$ sur un intervalle $[Na, (N+1)a]$, avec $N \in \mathbf{N}$, on peut donc se contenter de faire varier $n$ de 0 à $N$.

Calculons par exemple $G_a$ sur l'intervalle $[a, 2a]$. Pour tout $r \in [a, +\infty[$,

$$u * h_{\infty,a}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\,\frac{1}{\pi}\int_a^r \sqrt{\frac{x-a}{r-x}}\,\frac{dx}{x}.$$

Le changement de variable

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{r-x}}, \quad \text{soit} \quad x = \frac{rt^2+a}{t^2+1},$$

$$\frac{dx}{x} = \Big(\frac{2rt}{rt^2+a} - \frac{2t}{t^2+1}\Big)dt = \Big(\frac{1}{t^2+1} - \frac{a}{rt^2+a}\Big)\frac{2dt}{t},$$

montre que

$$u * h_{\infty,a}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big(\frac{1}{t^2+1} - \frac{a}{rt^2+a}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\ \Big(1 - \sqrt{\frac{a}{r}}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} - \sqrt{\frac{2}{\pi r}}.$$

Pour tout $r \in [a, 2a]$, on a ainsi

$$G_a(r) = u(r) - (u * h_{\infty,a})(r) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi r}} - \sqrt{\frac{2}{\pi a}}.$$

## Références

[1] Bertoin J., *Subordinators : examples and applications*, Lectures on Probability Theory and Statistics (Ecole d'été de Saint-Flour), Lecture Notes in Mathematics 1717 (1999), p. 1-91.

[2] Bertoin J., *Self-similar fragmentations*, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics **38**-3, (2002), p. 319-340.

[3] Csáki E., Földes A., Salminen P., *On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilité et Statistiques **23**-2 (1987), p. 179-194.

[4] Daley D. J., Vere-Jones, D., *An introduction to the theory of point processes - Vol.1 ; elementary theory and methods*, Probability and its applications, Springer (2003).

[5] Feller W., *An introduction to probability theory and its applications*, Volume II, Wiley and Sons, (1966).

[6] Maisonneuve B., *Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs*, Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Mathematics **191**, Springer (1971), p. 147-169.

[7] Neveu J., Pitman J., *Renewal property of the extrema and tree property of the excurion of a one-dimensional brownian motion.* Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Mathematics **1372**, Springer (1980), p. 239-247.

[8] Peres Y., Virág B., *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, Acta Mathematica**194**-1, Springer (2005), p. 1-35.

[9] Tsirelson B., *Brownian local minima, random dense countable sets and random equivalence classes.* Electronic Journal of Probability **11** (2006), p. 162-198.

Christophe LEURIDAN
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
Christophe.Leuridan@ujf-grenoble.fr