Conjecture de Zilber-Pink pour les courbes tracées sur des tores

Guillaume Maurin

Prépublication de l'Institut Fourier n° 696 (2007)
http ://www.fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé

Nous démontrons la conjecture A de Bombieri, Masser et Zannier, cas particulier de conjectures proposées indépendamment par Zilber et Pink. Si C est une courbe algébrique tracée sur un tore multiplicatif $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^g$ au-dessus de $\bar{\mathbb{Q}}$, il s'agit de montrer la finitude de l'ensemble des points $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ soumis à deux équations indépendantes de la forme $x_1^{\alpha_1} \cdots x_g^{\alpha_g} = 1$, pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_g \in \mathbb{Z}$, et ceci sous l'hypothèse minimale : C n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de A. Nous déduisons le résultat d'une inégalité de hauteur sur $C \times C$ uniformisant les inégalités de Vojta disponibles dans chacun des tores quotients $\{A/B \mid \mathrm{codim}(B) = 2\}$. Ainsi, grâce à l'inégalité de Vojta généralisée de Rémond, la preuve se réduit finalement à la minoration de certains nombres d'intersections qui, dans notre cas, proviennent de toute une famille de surfaces obtenues par éclatements d'une compactification de $C \times C$.

Abstract

We study the intersection of an algebraic curve C lying in a multiplicative torus over $\bar{\mathbb{Q}}$ with the union of all algebraic subgroups of codimension 2. Finiteness of this set has already been proved by Bombieri, Masser and Zannier under the assumption that C is not contained in a translate of a proper subtorus. Following this result, the question of the minimal hypothesis implying finiteness has been raised by these authors, giving rise to the conjecture : finiteness holds precisely for the curves C which are not contained in a proper subgroup. We prove here this statement which is also a special case of more general conjectures stated independently by Zilber and Pink. Our proof takes its inspiration from an article by Rémond and Viada concerning the Zilber-Pink conjecture for curves lying in a power of an elliptic curve. Hence, it relies on a uniform version of the Vojta inequality proven *via* the generalized Vojta inequality of Rémond. The main task is to establish a lower bound for some intersection numbers, here on a whole family of surfaces obtained by blowing up a compactification of $C \times C$.

Mots-clés : Hauteurs, tore multiplicatif, nombre d'intersection.

2000 Mathematics Subject Classification : 11G50, 11G35, 11G10.

1 Introduction

Soient $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^g$ un tore multiplicatif sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et C une courbe algébrique tracée sur A. L'objectif de cet article est d'étudier l'ensemble suivant :

$$C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\mathrm{codim}\,(H)=2} H(\bar{\mathbb{Q}}),$$

où l'union porte sur tous les sous-groupes algébriques H de A satisfaisant la condition de codimension. Plus précisément, nous allons caractériser les courbes C pour lesquelles cet ensemble est fini. Ce n'est pas le cas de celles qui sont contenues dans un sous-groupe algébrique propre de A (voir le corollaire 2.2) et la finitude nécessite donc une certaine transversalité de C vis-à-vis des sous-groupes. Notons enfin que la codimension choisie est optimale, au sens où l'intersection de C avec la réunion des sous-groupes propres de A est toujours infinie (voir lemme 2.1).

Définition 1.1. Nous dirons qu'une courbe tracée sur le tore est :

(i) *transverse*, si elle n'est pas contenue dans le translaté d'un sous-tore propre de A.

(ii) *faiblement transverse*, si elle n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de A.

Ces conditions ne sont pas équivalentes, mais, bien entendu, la condition (i) implique (ii) car les composantes irréductibles d'un sous-groupe algébrique de A sont les translatés d'un sous-tore par certains points de torsion. Pour simplifier les notations, nous posons désormais

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\mathrm{codim}\,(H)=2} H(\bar{\mathbb{Q}}).$$

Les premiers résultats (1999) sont dus à Bombieri, Masser et Zannier qui démontrent dans [BMZ1] le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit C une courbe transverse tracée sur A. Alors l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est fini.*

Comme le suggèrent déjà les auteurs dans ce premier article, l'hypothèse qui figure dans cet énoncé n'est pas optimale. Ainsi, la caractérisation des courbes C pour lesquelles $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est fini restait ouverte. Comme nous l'avons déjà suggéré, une telle courbe vérifie nécessairement l'hypothèse faible de transversalité et le résultat suivant résoud donc le problème.

Théorème 1.2. *Soit C une courbe faiblement transverse tracée sur A. Alors l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est fini.*

C'est précisément l'énoncé conjecturé récemment par Bombieri, Masser et Zannier dans un article où ils montrent l'équivalence de l'énoncé avec une conjecture de Zhang non publiée (2006, voir [BMZ3, Conjecture A]). Notons que le théorème 1.1 a été sensiblement généralisé par ses auteurs qui démontrent dans [BMZ2] sa validité sur tout corps algébriquement clos K de caractéristique nulle (en particulier sur $\mathbb{C}$). Leur méthode ne semble pas s'appliquer directement à notre théorème 1.2 pour obtenir une telle extension et la question reste ouverte, cet article ne traitant que du cas $K = \bar{\mathbb{Q}}$.

Notre résultat s'inscrit aussi au sein de conjectures qui dépassent largement le simple cas des courbes tracées sur un tore. D'abord, Zilber généralise la situation en remplaçant le tore multiplicatif par une variété semi-abélienne et notre courbe par une variété de dimension quelconque (2002, voir [Z, conj. 2]). Dans cette perspective, on dispose aussi des conjectures proposées par Bombieri, Masser et Zannier pour les sous-variétés des tores multiplicatifs sur $\mathbb{C}$ (Torsion openness conjecture et Torsion finiteness conjecture), énoncés dont la conjonction est équivalente au cas torique de la conjecture de Zilber sur $\mathbb{C}$ (2006, *cf.* [BMZ4, partie 5]). Enfin, Pink généralise encore le problème en l'inscrivant dans le cadre des variétés de Shimura mixtes (2005, voir [P]).

En ce qui concerne notre théorème 1.2, le résultat est déjà connu pour les cas de petite dimension $g \leq 5$ démontrés dans [BMZ3]. De plus, Rémond et Viada ont résolu le problème si l'on remplace le tore multiplicatif par une puissance de courbe elliptique à multiplications complexes (2003, voir [RV]).

Leur preuve repose sur une inégalité de hauteur. Cette inégalité de Vojta uniforme est encore le point crucial de notre démonstration. Bien qu'elle ne soit valable que pour les courbes transverses, elle démontre dans ce cas-là un énoncé plus fort que le théorème 1.1 en assurant la finitude d'une famille d'ensembles qui s'obtiennent en généralisant la construction de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$. Si S est une partie de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, nous posons

$$E(C,S) = C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\operatorname{codim}(B)=2} S \cdot B(\bar{\mathbb{Q}}),$$

où l'union porte cette fois sur tous les sous-tores B satisfaisant la condition de codimension. Pour simplifier l'écriture, nous appellerons parfois cet ensemble $E(S)$. Par exemple, si Γ désigne le groupe $A(\bar{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$ des points de torsion du tore, alors $E(C,\Gamma) = C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$. Avec cette notation et en rappelant que le rang d'un groupe abélien Γ est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, nous obtenons le théorème annoncé par l'intermédiaire du résultat suivant.

Théorème 1.3. *Soit C une courbe transverse tracée sur A. Alors, pour tout sous-groupe de rang fini Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, l'ensemble $E(C,\Gamma)$ est fini.*

En effet, il se trouve que cet énoncé est équivalent au théorème 1.2 (voir par exemple les théorèmes 5.3 et 5.5 de [P] pour une preuve de ceci dans le cas plus général où l'on considère une sous-variété de variété semi-abélienne) ; c'est donc sous cette forme que nous allons démontrer la conjecture.

Enfin, en tirant parti d'une extension récente du théorème 1.1, nous allons en fait obtenir un résultat un peu plus puissant. Cette avancée est due au travail de Philipp Habegger qui généralise le résultat de Bombieri, Masser et Zannier en y introduisant un épaississement au sens de la hauteur, objet associé à une partie S de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ par la formule $S_\epsilon = \{xy \mid x \in S,\ y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h(y) \leq \epsilon\}$ pour un réel $\epsilon > 0$, où h désigne la hauteur des points fermés du tore introduite plus loin. Avec cette notion d'épaississement, Habegger démontre le

Théorème 1.4. *Soit C une courbe transverse tracée sur A. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ pour lequel l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_\epsilon$ est fini.*

Grâce à ce résultat, nous démontrerons ici la généralisation suivante du théorème 1.3.

Théorème 1.5. *Soit C une courbe transverse tracée sur le tore multiplicatif A. Pour tout sous-groupe de rang fini Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $E(C, \Gamma_\epsilon)$ soit fini.*

Pour illustrer la nature arithmétique de cet énoncé, rappelons que le groupe des unités U_K de tout corps de nombres K est un sous-groupe de type fini de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ (voir par exemple [S, 4.4 thm. 1]). Introduisons ensuite le groupe $(U_K)_{\text{div}}$ formé par les racines des unités de K, autrement dit les nombres $x \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$ vérifiant $x^n \in U_K$, pour un entier $n > 0$; ce groupe est de rang fini. Enfin, fixons une courbe transverse tracée sur A ainsi qu'un corps de nombres K ; alors, en considérant $\Gamma = (U_K)_{\text{div}}^g$, notre résultat se spécialise sous la forme suivante. Pour tout réel $\epsilon > 0$ assez petit, seul un nombre fini de points de la courbe se décomposent sous la forme γxy, où γ est un point dont les coordonnées sont racines d'unités de K, x un point fermé du tore soumis à deux équations indépendantes de la forme $x_1^{\alpha_1} \dots x_g^{\alpha_g} = 1$, pour des $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, et $y \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ un point vérifiant $h(y) \leq \epsilon$.

Comme nous l'avons déjà dit, la preuve du théorème 1.5 suit les grandes lignes de l'article [RV] et repose encore sur une inégalité de hauteur. Pour donner au lecteur une idée de son contenu, considérons une courbe transverse C tracée sur A, un sous-tore B de A satisfaisant $\operatorname{codim}(B) = 2$ ainsi que la projection $\varphi : A \to A/B$. Alors l'adhérence de $\varphi(C)$ dans le tore multiplicatif A/B est encore une courbe transverse, donc ses points sont soumis à une inégalité de Vojta ¡¡classique¿¿ (voir [R1, th. 3.1]). On obtient ainsi un énoncé de la forme suivante : il existe une constante $c_B > 0$ telle que, si s est un entier assez grand et $x, y \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ sont deux points dont les images ont une hauteur assez grande, alors

$$h(\varphi(x)^s \varphi(y)^{-1}) \geq \frac{1}{c_B}(sh(\varphi(x)) + h(\varphi(y))).$$

Ceci permet d'obtenir la finitude de chaque ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\epsilon B$ lorsque ϵ est assez petit, ce qui n'est pas encore suffisant pour démontrer le théorème 1.5. Notre inégalité améliore déjà ce résultat naïf en uniformisant l'hypothèse de hauteur portant sur les points x et y : l'inégalité sera satisfaite dès lors que $h(x)$ et $h(y)$ sont plus grands qu'une constante indépendante du choix de B. D'autre part, elle explicite la dépendance en B de la constante c_B à travers une quantité $\|\varphi\|$ qui mesure la taille des exposants nécessaires pour écrire des équations de B (voir notre théorème 7.2). En ce sens, elle est uniforme vis-à-vis des sous-tores de codimension 2 et c'est précisément cette uniformité qui permet de borner la hauteur sur les ensembles $E(C, \Gamma_\epsilon)$ pour un ϵ assez petit.

Dans un premier temps (parties 4, 5 et 6), nous allons minorer les nombres d'intersection de faisceaux inversibles définis sur une famille de surfaces obtenues par éclatements d'une compactification de $C \times C$. Pour des raisons techniques, nous nous limiterons au cas d'une courbe C dont l'adhérence dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ est lisse. Ceci nous permettra dans la partie suivante d'appliquer l'inégalité de Vojta généralisée de Rémond (voir [R2]) à ces courbes pour obtenir notre inégalité de Vojta uniforme. Dans cette première étape de la preuve, nous nous éloignons des méthodes de [RV] en raison de la différence fondamentale entre les cas toriques et abéliens lors des applications de [R2]. Soulignons d'ailleurs que les calculs d'intersection sont ici assez explicites en comparaison du cas abélien. Cependant, une fois notre inégalité acquise, les arguments de l'article [RV] s'appliquent à l'identique pour en déduire une majoration de la hauteur sur l'ensemble $E(\Gamma_\epsilon)$ lorsque ϵ est assez petit et lorsque C satisfait notre hypothèse de lissité (partie 8). Nous démontrons ensuite un résultat qui permet de se ramener au cas d'une courbe satisfaisant cette hypothèse pour établir la finitude des ensembles $E(\Gamma_\epsilon)$ (partie 9). Enfin, dans la dernière partie de l'article, nous empruntons le résultat de Philipp Habegger mentionné plus haut pour déduire la finitude de $E(\Gamma_\epsilon)$ de l'existence d'une borne sur la hauteur de ses points. Ceci achèvera la preuve de notre théorème 1.5 et, pour conclure, nous déduirons de ce dernier le théorème 1.2.

2 Notations et préliminaires

Pour commencer précisons la notion de hauteur que nous allons employer. Si K est un corps de nombres, alors à chacune de ses places v correspond une unique valeur absolue $|\cdot|_v$ sur K dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est usuelle, au sens où, $|p|_v$ appartient à $\{\frac{1}{p}, 1, p\}$, pour tout nombre premier p. On note K_v le complété de K pour la valeur absolue ainsi associée à v et on définit alors la hauteur d'un point rationnel $x = (x_0 : \ldots : x_N)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^N_K$ par la formule,

$$h(x_0 : \ldots : x_N) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log(\max_i |x_i|_v),$$

où la somme porte sur toutes les places v du corps K. Cette quantité ne dépend pas du choix d'un corps de nombres K parmi ceux qui contiennent le système de coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_N)$ du point x. Elle ne dépend pas non plus du choix des coordonnées et définit donc une fonction $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_+$. Enfin, nous définissons la hauteur d'un point fermé $x = (x_1, \ldots, x_g)$ du tore A par la formule $h(x) = \sum_{i=1}^g h(1 : x_i)$. Le choix de cette hauteur est motivé par son comportement vis-à-vis de la structure de groupe sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Ainsi, on peut montrer facilement qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire $h(xy) \leq h(x) + h(y)$ ainsi que la relation $h(x^a) = |a|h(x)$ pour tous points x et y de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout entier $a \in \mathbb{Z}$. De plus, $h(x) = 0$ si et seulement si x est un point de torsion, de sorte que h induit une norme $|\cdot|$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, ce qui nous conduit à noter aussi $|x|$ la hauteur $h(x)$ d'un point fermé du tore.

Nous justifions maintenant les assertions d'optimalité de l'introduction.

Lemme 2.1. *Soit C une courbe tracée sur le tore multiplicatif $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^g$. Alors l'ensemble*

$$C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\operatorname{codim}(H)=1} H(\bar{\mathbb{Q}})$$

obtenu en intersectant notre courbe avec la réunion de tous les sous-groupes propres de A est un ensemble infini.

Démonstration. D'abord, quitte à permuter les coordonnées du tore, on peut supposer que l'image de C dans la projection p de A sur son premier facteur est infinie. Dans ces conditions, $p(C)$ est dense dans le tore 1-dimensionnel $B = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. De plus, d'après le théorème de Chevalley (voir [H, II. ex. 3.19]), $p(C)$ est une partie constructible de B. Puis, par irréductibilité, toute partie constructible dense de B contient un ouvert non vide (voir [H, II. ex. 3.18(b)]), de sorte que $p(C)$ est ouvert dans B. Comme ce dernier contient une infinité de points de torsion, c'est encore le cas de $p(C)$ et $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap (B(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{g-1})$ est infini. Enfin, $B(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{g-1} = \bigcup_{|H|<\infty} H \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{g-1}$, où l'union porte sur tous les sous-groupes algébriques finis de B. Ainsi, $B(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{g-1}$ est contenu dans $\bigcup_{\mathrm{codim}(H)=1} H(\bar{\mathbb{Q}})$, donc l'intersection de C avec ce dernier est infinie. □

On déduit immédiatement de ceci le résultat suivant.

Corollaire 2.2. *Soit C une courbe tracée sur le tore A. Si C est inclus dans un sous-groupe algébrique propre de A, alors $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est infini.*

Démonstration. Par irréductibilité, C est contenue dans le translaté d'un sous-tore propre B par un point de torsion ζ. Quitte à translater C par ζ^{-1}, ce qui n'affecte pas le cardinal de l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$, on peut supposer que $C \subset B$. Dans ces conditions, $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est égal à l'intersection de $C(\bar{\mathbb{Q}})$ avec la réunion des sous-groupes algébriques propres de B qui est infinie par le lemme précédent. □

Introduisons maintenant le contexte géométrique auquel nous appliquons l'inégalité de Vojta généralisée. Comme il s'agit d'un résultat de nature projective, sa mise en pratique dans le cas torique nécessite une certaine compactification.

Nous commençons par plonger le tore A dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ en appliquant à chacun de ses facteurs l'immersion ouverte $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{Q}}} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qui identifie tout nombre algébrique $x \neq 0$ au point $(1 : x)$ de la droite projective. Pour plonger le tore dans un espace projectif, nous composons ceci avec le morphisme de Segre $\imath : (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, où $n = 2^g - 1$. Remarquons que cette immersion du tore est cohérente avec le choix de hauteur que nous y avons fait, au sens où la hauteur d'un point de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ est égale à celle de son image dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Soient maintenant $\{W_\beta \mid \beta \in \{0,1\}^g\}$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$; alors, le morphisme de Segre $\imath$ se décrit simplement, en disant qu'un système de coordonnées homogènes $(w_\beta)_\beta$ de l'image d'un point fermé $((t_0^{(1)} : t_1^{(1)}), \ldots, (t_0^{(g)} : t_1^{(g)}))$ est donné par $w_\beta = \prod_{j=1}^g t_{\beta_j}^{(j)}$. Enfin, en identifiant A à son image dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et en notant W_0 la coordonnée associée à l'indice $(0, \ldots, 0)$ de $\{0,1\}^g$, on voit qu'en particulier

$$\frac{W_\beta}{W_0}(x) = \prod_{\beta_j = 1} x_j$$

pour tout point x de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Ainsi donc, lorsque $\beta_j = \delta_{i,j}$ pour $j = 1, \ldots, g$, on aura $(W_\beta/W_0)(x) = x_i$ sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$, ce qui nous conduit alors à noter plutôt W_i la coordonnée W_β. Enfin, revenons à notre courbe C tracée sur A et notons X la structure réduite de sous-schéma sur son adhérence dans $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

Pour motiver la construction qui suit, nous commençons par décrire l'inégalité de hauteur que nous souhaitons obtenir. Introduisons d'abord l'ensemble $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ des morphismes de groupes algébriques $A \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$. Si φ nous y est donné, alors, en notant $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_g^{\gamma_g}$ pour les multi-indices $\gamma \in \mathbb{Z}^g$, il existe a et b dans $\mathbb{Z}^g$ tels que

$\varphi(x) = (x^a, x^b)$ sur les points fermés du tore. Nous identifions alors φ à la matrice à coefficients entiers

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_g \\ b_1 & \dots & b_g \end{pmatrix}$$

et définissons sa norme en posant d'abord $\|\gamma\| = \sum_{i=1}^{g} |\gamma_i|$, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^g$, puis $\|\varphi\| = \|a\| + \|b\|$. Enfin, en notant $\langle a, b\rangle$ le produit scalaire des lignes composant notre matrice, nous posons

$$\Phi = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2) \mid \|a\| = \|b\| > 0 \text{ et } \langle a, b\rangle = 0\}.$$

Considérons enfin un élément φ de $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ ainsi qu'un entier s strictement positif. Nous associons à ces données le morphisme $\beta : C \times C \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ défini sur les points fermés par $\beta(x, y) = \varphi(x)^s \varphi(y)^{-1}$. Avec ces notations, notre inégalité est une comparaison des quantités $h \circ \beta(x, y)$ et $\|\varphi\|(sh(x) + h(y))$ sur $(C \times C)(\bar{\mathbb{Q}})$ lorsque φ parcourt Φ (voir le théorème 7.2). Ceci suggère déjà que le morphisme β est au cœur du problème et la compactification annoncée consiste à lever les indéterminations de l'application rationnelle correspondante $X \times X \cdots \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$

Pour ce faire, nous considérons le graphe G du morphisme β, sous-schéma fermé intègre de $C \times C \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ que nous plongeons dans le schéma projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \times (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2$ au moyen des immersions décrites plus haut. Appelons $\mathcal{X}$ la structure réduite de sous-schéma sur l'adhérence de G dans $\mathbb{P}$. Alors, la projection de $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ induit un morphisme propre $\pi : \mathcal{X} \to X \times X$, qui est birationnel vu qu'il donne un isomorphisme $G \to C \times C$. D'autre part, la projection de $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2$ induit un morphisme $\tilde{\beta} : \mathcal{X} \to (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2$ qui prolonge β lorsqu'on identifie G à $C \times C$. Ainsi, comme la hauteur h définie sur $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2$ par son plongement de Segre coïncide avec celle de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ sur les points du tore, $h \circ \tilde{\beta}$ prolonge naturellement $h \circ \beta$ à la surface $\mathcal{X}$.

Enfin, en appelant p_j les projections de $\mathbb{P}$ sur ses facteurs $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, ainsi que q_j ses projections sur les droites projectives, on pose, pour tout choix d'entiers γ_1, γ_2 et δ_1, δ_2 dans $\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2) = p_1^*(\mathcal{O}(\gamma_1)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}(\gamma_2)) \otimes q_1^*(\mathcal{O}(\delta_1)) \otimes q_2^*(\mathcal{O}(\delta_2))$$

et l'on note $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)$ la restriction au sous-schéma fermé $\mathcal{X}$ du faisceau précédent. Avec ces notations, la hauteur $h \circ \tilde{\beta}$ est une hauteur de Weil associée au faisceau inversible $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(0, 0, 1, 1)$ qui fera donc, dans un premier temps, l'objet de toutes nos attentions.

Pour conclure, noter bien que notre construction produit les objets β, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{M}$ pour tout choix de paramètres $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$. Aussi, lorsque nous ferons varier ces paramètres, nous préciserons les notations en écrivant plutôt $\beta_{s,\varphi}$, $\mathcal{X}_{s,\varphi}$ et $\mathcal{M}_{s,\varphi}$.

3 Principe des calculs d'intersection

Ici, nous présentons brièvement le résultat qui fera l'objet des parties 4, 5 et 6 pour donner au lecteur une idée des principales étapes de sa preuve. Nous étudierons la géométrie de la surface $\mathcal{X}$ au-dessus de $X \times X$ pour vérifier une minoration de certains nombres d'intersection. Ceci constitue la principale hypothèse à remplir pour appliquer l'inégalité de Vojta généralisée et nécessitera donc des efforts conséquents. Précisément, notre objectif consiste à démontrer le

Théorème 3.1. *Si X est non singulière, alors il existe une constante $c > 0$ satisfaisant la condition suivante. Soit $Y = Y_1 \times Y_2$ un produit de sous-variétés de X qui rencontre $C \times C$; si l'on note $\mathcal{Y}_{s,\varphi}$ l'adhérence de $Y \cap (C \times C)$ dans $\mathcal{X}_{s,\varphi}$, alors, pour tout entier $s > 0$ et tout morphisme $\varphi \in \Phi$, on a*

$$(\dagger) \qquad \mathcal{M}_{s,\varphi}^{\cdot \dim(Y)} \cdot \mathcal{Y}_{s,\varphi} \geq c s^{\dim(Y_1)} \|\varphi\|^{\dim(Y)}.$$

Comme nous allons le voir, tout consiste à faire apparaître de manière précise la dépendance du nombre d'intersection en ses paramètres. Ensuite, en exploitant la nature de cette dépendance, nous pourrons déduire les minorations (†) d'un argument de compacité.

Cette démarche rencontre d'emblée un obstacle de taille : comment comparer des quantités qui proviennent de toute une famille de variétés différentes ? Dans notre cas, les variétés $\mathcal{X}_{s,\varphi}$ sont toutes birationnelles à $X \times X$, de sorte qu'une partie du calcul se ramène à l'intersection de faisceaux inversibles définis sur une même surface. En effet, en posant $\Omega = (C \times X) \cup (X \times C)$ et $\widetilde{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$, nous montrons que π induit un isomorphisme $\widetilde{\Omega} \to \Omega$ (cf. lemme 4.2). Ainsi, en faisant varier ses paramètres, la projection du faisceau $\mathcal{M}|_{\widetilde{\Omega}}$ sur Ω va décrire toute une famille de faisceaux inversibles sur la même surface. Cette famille s'exprime géométriquement par combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de diviseurs du type $[P_i \times C]$ et $[C \times P_i]$, où les points $P_1, \ldots, P_N$ forment une énumération de $X \setminus C$. Ceci suffira pour obtenir les minorations (†) dans le cas où $\mathcal{Y}$ est une courbe, car $\mathcal{Y}$ est alors forcément contenu dans $\widetilde{\Omega}$.

En revanche, dans le cas où $\mathcal{Y}$ est une surface, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ et le problème n'est plus aussi simple. En effet, notons $[D]$ la classe de cycles associée à un diviseur de Cartier D représentant $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}$ (classe indépendante du choix d'un représentant). Alors, lorsque $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, notre objectif consiste à minorer le degré de la classe d'intersection $D \cdot [D]$. Mais, comme le support de la classe de cycles $[D]$ n'est pas contenu dans $\widetilde{\Omega}$, on ne peut plus se contenter de travailler avec la projection de $\mathcal{M}|_{\widetilde{\Omega}}$ sur Ω. Nous allons donc devoir introduire un nouvel ingrédient à base de diviseurs supportés par les fibres des points $P_{i,j} = (P_i, P_j)$, ce qui nécessite une description précise du comportement de la surface $\mathcal{X}$ au-dessus de ces points. Dans cette perspective, nous allons démontrer que $\mathcal{X}$ est un éclatement de la surface $X \times X$ en déterminant explicitement l'un des idéaux $\mathcal{I}$ de $X \times X$ qui définit cet éclatement (cf. proposition 4.3). Enfin, la non-singularité de $X \times X$ assure que le faisceau inversible $\pi_*(\mathcal{M}|_{\widetilde{\Omega}})$ provient, par restriction, d'un diviseur de Cartier Δ sur $X \times X$ bien défini modulo l'équivalence linéaire. Alors, en soustrayant à l'auto-intersection du diviseur Δ les multiplicités des fibres de l'idéal $\mathcal{I}$ dans les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X \times X, P_{i,j}}$, nous obtiendrons le nombre d'intersection global. Ainsi, nous parviendrons finalement à mener l'ensemble du calcul sur $X \times X$, ce qui nous permettra de comparer les nombres $\mathcal{M}_{s,\varphi}^{\cdot 2} \cdot \mathcal{X}_{s,\varphi}$ pour en déduire les minorations (†).

4 Préparation géométrique

Nous préparons dans cette partie les calculs d'intersection qui vont suivrent ; comme nous l'avons vu, ceux-ci nécessitent quelques résultats préliminaires sur la géométrie de l'éclatement $\pi : \mathcal{X} \to X \times X$. Nous commençons par le

Lemme 4.1. *Pour tout paramètre $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ dont les composantes a et b sont non nulles, les morphismes $q_i : \mathcal{X}_{s,\varphi} \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ induits par les projections de $\mathbb{P}$ sur ses facteurs $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont surjectifs.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant par exemple que q_1 n'est pas surjectif. Comme notre morphisme est propre et que $\mathcal{X}$ est irréductible, l'image est un point fermé P et ce point doit appartenir au tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. En effet, $q_1(\mathcal{X})$ étant réduite à P, ce dernier est aussi l'image de G, graphe du morphisme β. Or, la restriction de notre projection q_1 au graphe s'identifie au morphisme $C \times C \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ donné par $x^{sa}y^{-a}$ sur les points fermés. Ceci donne une équation sur $C \times C$, $x_1^{sa_1} \cdots x_g^{sa_g} = \lambda y^{a_1} \cdots y^{a_g}$ où le nombre λ de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ s'obtient en écrivant P sous la forme $(1 : \lambda)$. Mais alors, en fixant un point arbitraire $y \in C(\bar{\mathbb{Q}})$, on en déduit une équation sur C qui impose $a = 0$ par transversalité, ce qui est absurde. □

Ce premier résultat montre déjà que les diviseurs de Cartier $q_i^*[0]$ sont bien définis sur $\mathcal{X}_{s,\varphi}$ lorsque les lignes de la matrice associée à φ sont non nulles. Nous nous plaçons désormais sous cette hypothèse. Ainsi, en posant $D = q_1^*[0] + q_2^*[0]$, les faisceaux inversibles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ sont isomorphes ; nous dirons que le diviseur de Cartier D *représente* le faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}$. Le lemme suivant va nous permettre de décrire précisément la restriction de ce diviseur à $\widetilde{\Omega}$

Lemme 4.2. *Si la courbe X est non singulière, alors le morphisme $\beta : C \times C \to \mathbb{G}_m^2$ s'étend de manière unique en un morphisme $r : \Omega \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et $\widetilde{\Omega}$ est isomorphe au graphe de r. En particulier, π est un isomorphisme au-dessus de Ω.*

Démonstration. D'abord, comme X est non singulière, on sait d'après [H, I. 6.8] que le morphisme $C \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ donné sur les points $y \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ par y^{-a} s'étend en un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$. On introduit ensuite le morphisme produit $g : C \times X \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ défini sur les points par $g(x, y) = (x^{sa}, f(y))$. Puis, on étend la multiplication de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ en un morphisme $m : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ en recollant les multiplications $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \to \mathbb{A}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ le long du tore, ce qui revient à poser pour tout nombre algébrique $x \neq 0$, $m(x, 0) = 0$ et $m(x, \infty) = \infty$. Il ne reste alors plus qu'à composer

$$C \times X \xrightarrow{g} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{m} \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}},$$

pour obtenir un prolongement de la fonction $x^{sa}y^{-a}$ à $C \times X$. Symétriquement, on peut aussi l'étendre à $X \times C$ et on recolle les deux flèches ainsi obtenues le long de $C \times C$ pour construire un morphisme $r_1 : \Omega \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qui prolonge la première composante de β. De même, on prolonge sa seconde composante en un morphisme $r_2 : \Omega \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ et, en vertu de [H, II. ex. 4.2], $r = (r_1, r_2)$ est l'unique prolongement de β à Ω.

On en déduit que $\widetilde{\Omega}$ est le graphe du morphisme r. En effet, les morphismes $\widetilde{\Omega} \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ donnés par $r \circ \pi$ et $q_1 \times q_2$ prolongent tous deux $\beta \circ \pi$ à $\widetilde{\Omega}$. Ils sont donc égaux et, par suite, les points fermés de $\widetilde{\Omega}$ sont donnés par $(x, y, r(x, y))$ pour un point (x, y) parcourant $\Omega(\bar{\mathbb{Q}})$. Enfin, comme $\widetilde{\Omega} = \mathcal{X} \cap (\Omega \times (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2)$ est un sous-schéma fermé réduit de $\Omega \times (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^2$, il s'agit bien du graphe de r. □

Pour exploiter ce résultat, notons d'abord que le diagramme commutatif qu'il fournit

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Omega} & \longrightarrow & \Omega \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} & \end{array}$$

montre que les diviseurs de Cartier $D|_{\widetilde{\Omega}}$ et $r_1^*[0] + r_2^*[0]$ se correspondent dans l'isomorphisme $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$. Introduisons maintenant le groupe $\mathrm{Div}(\Omega)$ des classes de diviseurs de Cartier et le groupe de Chow $A_1\Omega$. Alors, comme la surface Ω est non singulière, elle est localement factorielle (cf. [M, th. 20.3]) et le morphisme $\mathrm{Div}(\Omega) \to A_1\Omega$ est un isomorphisme par application de [H, II. 6.11]. Cette remarque nous permet de remplacer les diviseurs $r_i^*[0]$ par les cycles associés aux sous-schémas $r_i^{-1}(0)$. Maintenant, si ρ désigne la fonction rationnelle sur Ω définie par le morphisme dominant $r_i : \Omega \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$, alors on a

$$[r_i^{-1}(0)] = \sum_{\mathrm{ord}_V(\rho) > 0} \mathrm{ord}_V(\rho) \cdot [V],$$

où la somme porte sur toutes les courbes V tracées sur Ω et vérifiant $\rho \in \mathfrak{m}_{\Omega,V}$. Or, une telle courbe V est nécessairement du type $P_j \times C$ ou $C \times P_j$. En effet, la fonction rationnelle ρ n'est autre que $x^{sa}y^{-a}$ ou $x^{sb}y^{-b}$ suivant la composante de r dont elle provient, donc elle n'a ni zéros ni pôles sur $C \times C$. Autrement dit, pour tous les points P de $C \times C$, ρ est une unité de l'anneau local $\mathcal{O}_{\Omega,P}$. Enfin, si V n'est pas l'une des courbes données, alors son intersection avec $C \times C$ contient encore son point générique, donc ρ ne s'annule pas le long de V.

Pour achever notre calcul, il ne reste plus qu'à développer $\mathrm{ord}_V(\rho)$ en utilisant l'additivité des ordres d'annulation. Si par exemple $\rho = x^{sa}y^{-a}$, alors, comme les fonctions y_i sont régulières et sans zéros sur le voisinage $X \times C$ de $P_j \times C$ dans Ω, on a $\mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(y_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, g$. Par suite, on trouve

$$\mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(\rho) = \sum_{i=1}^{g} sa_i \mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(x_i) = \Lambda_j(sa),$$

en notant Λ_j la forme linéaire $(\mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(x_1), \ldots, \mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(x_g))$ sur $\mathbb{Z}^g$. Comme $\mathrm{ord}_{[P_j \times C]}(x_i) = \mathrm{ord}_{[C \times P_j]}(y_i)$, on obtient symétriquement $\mathrm{ord}_{[C \times P_j]}(\rho) = \Lambda_j(-a)$, ce qui donne finalement les décompositions

$$r_1^*[0] = \sum_j s\Lambda_j^+(a)[P_j \times C] + \Lambda_j^-(a)[C \times P_j] \;\text{ et }\; r_2^*[0] = \sum_j s\Lambda_j^+(b)[P_j \times C] + \Lambda_j^-(b)[C \times P_j],$$

en notant Λ_j^+ et Λ_j^- les parties positives et négatives des fonctions Λ_j, c'est-à-dire $\Lambda_j^+ = \max(\Lambda_j, 0)$ et $\Lambda_j^- = \max(-\Lambda_j, 0)$.

Remarque 4.1. Notons au passage qu'étant donné un vecteur γ de $\mathbb{Z}^g$ la classe de cycles $\sum_{j=1}^N \Lambda_j(\gamma)\cdot[P_j]$ est rationnellement équivalente à 0, car associée à la fonction rationnelle $x_1^{\gamma_1}\dots x_g^{\gamma_g}$ de $K(X)$. Par suite, son degré $\sum_{j=1}^N \Lambda_j(\gamma)$ est nul et, comme ceci vaut pour tout vecteur γ de $\mathbb{Z}^g$, on en déduit que $\sum_{j=1}^N \Lambda_j = 0$.

Pour finir, les morphismes $p_i : \mathcal{X} \to X$ induits par les projections de $\mathbb{P}$ sur ses facteurs $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sont surjectifs. Les diviseurs de Cartier $p_1^*[P_j]$ et $p_2^*[P_j]$ sont donc bien définis et leurs restrictions à $\widetilde{\Omega}$ correspondent respectivement aux cycles $[P_j \times C]$ et $[C \times P_j]$ dans l'isomorphisme $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$.

Définition 4.1. On appelle Δ le diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}$ défini comme somme des diviseurs

$$\Delta_a = \sum_j s\Lambda_j^+(a)p_1^*[P_j] + \Lambda_j^-(a)p_2^*[P_j] \text{ et } \Delta_b = \sum_j s\Lambda_j^+(b)p_1^*[P_j] + \Lambda_j^-(b)p_2^*[P_j]$$

et V le diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}$ défini par la relation $D = \Delta + V$.

Enfin, notons que $D|_{\widetilde{\Omega}} = \Delta|_{\widetilde{\Omega}}$ par construction du diviseur Δ ; par suite, le support de V est contenu dans $\mathcal{X}\setminus\widetilde{\Omega}$, réunion des fibres $\pi^{-1}(P_{i,j})$ en notant $P_{i,j}$ le point (P_i, P_j) de $X \times X$.

Maintenant, en nous appuyant sur le lemme 4.2, nous allons donner une description complète de la surface $\mathcal{X}$ au-dessus de $X \times X$. D'abord, comme les surfaces $\mathcal{X}$ et $X \times X$ sont projectives et que le morphisme projectif $\pi : \mathcal{X} \to X \times X$ est birationnel, on sait d'après [H, II. 7.17] que $\mathcal{X}$ est l'éclatement de la surface $X \times X$ le long d'un certain sous-schéma fermé. En outre, vu que π est un isomorphisme au-dessus de Ω, on peut supposer que le support du sous-schéma ne contient qu'un nombre fini de points appartenant tous à l'ensemble des $P_{i,j}$. Ainsi, pour déterminer la nature de la surface $\mathcal{X}$ au-dessus de $X \times X$, il suffit de se placer dans un voisinage U de chaque point $P = P_{i,j}$ assez petit pour que $U \setminus \{P\} \subset \Omega$ et d'y donner l'une des structures de sous-schéma sur $\{P\}$ définissant l'éclatement local $\pi^{-1}(U) \to U$.

Pour définir l'une de ces structures, on se livre à la construction suivante. Fixons d'abord $U = \operatorname{Spec} R$ un voisinage affine ¡¡produit¿¿ du point P, au sens où $R = A \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} B$ pour des anneaux A et B dont les spectres donnent respectivement des voisinages U_1 et U_2 des points P_i et P_j sur X. Ensuite, comme X est une courbe non singulière, ses anneaux locaux aux points P_i et P_j sont de valuation discrète et l'on peut supposer qu'il existe des éléments $\xi \in A$ et $\eta \in B$ uniformisant ces derniers. Alors $x^{sa}y^{-a}$, vue comme un élément du corps des fonctions $K(U) = K(X) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} K(X)$, diffère de $\xi^{s\Lambda_i(a)} \otimes \eta^{-\Lambda_j(a)}$ par une fonction rationnelle du type $u \otimes v$ où u et v sont respectivement des unités dans les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,P_i}$ et $\mathcal{O}_{X,P_j}$. Ainsi, quitte à restreindre nos voisinages U_1 et U_2, il existe une fonction régulière w sur U qui ne s'y annule pas et vérifie $x^{sa}y^{-a} = w\xi^{s\Lambda_i(a)} \otimes \eta^{-\Lambda_j(a)}$. Introduisons maintenant les fonctions $s_a = \xi^{s\Lambda_i^-(a)} \otimes \eta^{\Lambda_j^+(a)}$ et $t_a = w\xi^{s\Lambda_i^+(a)} \otimes \eta^{\Lambda_j^-(a)}$. Comme ce couple de fonctions régulières sur U engendre le faisceau structural sur $U \setminus \{P\}$, elles définissent un morphisme $U \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qui coïncide avec r_1 par construction. Enfin, le même raisonnement s'applique en remplaçant a

par b et produit un couple (s_b, t_b) de fonctions régulières sur U. Nous posons alors $S = (s_a s_b, s_a t_b, t_a s_b, t_a t_b)$ et obtenons ainsi une famille de fonctions régulières sur U engendrant le faisceau structural sur $U \setminus \{P\}$ et telle que le morphisme correspondant $S : U \setminus \{P\} \to \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$ coïncide avec la composée

$$U \setminus \{P\} \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}.$$

Pour finir, appelons $I_{i,j}$ l'idéal de l'anneau R engendré par la famille S. Alors, comme le support de $R/I_{i,j}$ est contenu dans $\{P\}$, le faisceau d'idéaux associé à $I_{i,j}$ se recolle au faisceau structural de $X \times X \setminus \{P\}$ le long de $U \setminus \{P\}$ pour définir un faisceau d'idéaux global sur $X \times X$ que nous notons $\mathcal{I}_{i,j}$. Considérons finalement $\mathcal{I} = \bigotimes_{i,j} \mathcal{I}_{i,j}$.

Proposition 4.3. *Chacun des points $P_{i,j}$ possède un voisinage U au-dessus duquel la surface $\pi^{-1}(U)$ munie de sa projection $\pi^{-1}(U) \to U$ est isomorphe à l'éclatement de U le long de l'idéal $\mathcal{I}|_U$. De plus, le faisceau inversible $\mathcal{M}|_{\pi^{-1}(U)}$ correspond dans cet isomorphisme à l'opposé du diviseur exceptionnel, c'est-à-dire à l'idéal inversible $\pi^{-1}(\mathcal{I}|_U) \cdot \mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}$.*

Démonstration. Nous choisissons $U = \operatorname{Spec}(R)$ le voisinage construit précédemment et considérons l'éclatement de U le long de l'idéal $I = \Gamma(U, \mathcal{I})$. On obtient ainsi une surface $\widetilde{U} = \operatorname{Proj}(G)$, en notant G l'anneau gradué $\bigoplus_{d \geq 0} I^d$, munie d'un morphisme projectif et birationnel $p : \widetilde{U} \to U$. Considérons maintenant le sous-faisceau de $p^*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{\widetilde{U}}$ engendré par la famille $\widetilde{S} = \{p^*s \mid s \in S\}$. D'après [H, II. 7.17.3], ce faisceau est inversible et, comme les sections globales de $\widetilde{S}$ l'engendrent sur $\widetilde{U}$, elles définissent un morphisme $\widetilde{S} : \widetilde{U} \to \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qui prolonge l'application rationnelle $S : U \cdots \to \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Ceci va nous permettre d'identifier $\widetilde{U}$ et $\pi^{-1}(U)$ au-dessus de U.

Considérons le morphisme gradué $R[T_0, \ldots, T_3] \to G$ obtenu par évaluation des coordonnées T_i sur les éléments de la famille S. Alors, ce morphisme, étant surjectif, donne une immersion fermée f de $\widetilde{U}$ dans $\mathbb{P}^3_R = U \times \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$. De plus, en composant f avec les projections de $U \times \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$ sur ses facteurs, on obtient respectivement la projection $\widetilde{U} \to U$ et le morphisme $\widetilde{S} : \widetilde{U} \to \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Par suite, $f(\widetilde{U})$ contient comme ouvert le graphe Γ de l'application rationnelle $U \cdots \xrightarrow{S} \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Or, G est intègre car c'est le cas de l'anneau R, donc $\widetilde{U}$ est intègre. Ainsi, par irréductibilité, $f(\widetilde{U})$ est l'adhérence de Γ dans $U \times \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$, ce qui montre déjà que $f(\widetilde{U}) = \pi^{-1}(U)$. Enfin, le schéma $\widetilde{U}$ étant réduit, on en conclut que f induit un isomorphisme $g : \widetilde{U} \to \pi^{-1}(U)$ au-dessus de U, c'est-à-dire tel que $\pi \circ g = p$.

Pour finir, montrons que $g^*(\mathcal{M}|_{\pi^{-1}(U)})$ est égal à l'idéal inversible $p^{-1}(\mathcal{I}|_U) \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{U}}$ de $\widetilde{U}$. Notons d'abord que la preuve de [H, II. 7.13(a)] montre en fait que ce dernier est égal au faisceau $\mathcal{O}_{\widetilde{U}}(1)$ de $\widetilde{U} = \operatorname{Proj} G$. Puis, comme $\mathcal{M}|_{\pi^{-1}(U)}$ est par définition même la restriction du faisceau $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}^3_R$ au sous-schéma fermé $\pi^{-1}(U)$, on a bien $g^*(\mathcal{M}|_{\pi^{-1}(U)}) = \mathcal{O}_{\widetilde{U}}(1)$ par application de [H, II. 5.12(c)]. □

Remarque 4.2. Notons que la construction donnée montre qu'on peut choisir U de la forme $U_1 \times U_2$ dans l'énoncé précédent. Alors, quitte à restreindre les voisinages U_1 et U_2, on pourra supposer que $U \setminus \{P\}$ est contenu dans Ω et que les faisceaux $\mathcal{O}_X([P_i])|_{U_1}$ et

$\mathcal{O}_X([P_j])|_{U_2}$ sont triviaux. Or, dans ces conditions, $\Delta|_{\pi^{-1}(U)}$ est linéairement équivalent à 0, de sorte que les restrictions à l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ des faisceaux $\mathcal{M}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(V)$ sont isomorphes.

Enfin, remarquons que la proposition 4.3 montre en particulier que les fibres $\pi^{-1}(P)$ qui ne sont pas réduites à un point sont purement 1-dimensionnelles. En effet, P est alors forcément l'un des $P_{i,j}$ et la fibre est le support du sous-schéma localement principal associé à l'idéal inversible $\pi^{-1}\mathcal{I}_{i,j} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

5 Calculs d'intersection dans le cas des courbes

Nous donnons ici une démonstration des minorations (†) du théorème 3.1 dans le cas des courbes. En restreignant notre attention aux morphismes φ correspondants aux matrices à lignes non nulles, les faisceaux inversibles $\mathcal{M}|_{\widetilde{\Omega}}$ sont représentés par les diviseurs effectifs $\Delta|_{\widetilde{\Omega}}$. D'autre part, $\dim \mathcal{Y} = 1$ force $Y = \{x\} \times X$ ou $X \times \{x\}$ pour un point fermé x de C car Y rencontre $C \times C$. Par suite, $\mathcal{Y}$ est contenu dans $\widetilde{\Omega}$, donc on peut restreindre le faisceau $\mathcal{M}$ à cet ouvert avant d'intersecter avec $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} = \deg \Delta \cdot [\mathcal{Y}]$.

Supposons par exemple que $Y = \{x\} \times X$ pour un point $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors, comme les supports du diviseur effectif $p_1^*[P_j]$ et du cycle $[\mathcal{Y}]$ sont disjoints, on a déjà $p_1^*[P_j] \cdot [\mathcal{Y}] = 0$. D'autre part, si l'on appelle $\jmath$ l'immersion de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{X}$, alors $p_2^*[P_j] \cdot [\mathcal{Y}]$ est la classe de cycles sur $\mathcal{Y}$ associée au faisceau inversible $(p_2 \circ \jmath)^* \mathcal{O}_X([P_j])$. Comme $p_2 \circ \jmath : \mathcal{Y} \to X$ est un isomorphisme, on en déduit que $p_2^*[P_j] \cdot [\mathcal{Y}]$ est de degré 1. Finalement, on a donc

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j^-(a) + \Lambda_j^-(b),$$

expression indépendante du point $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ paramétrant le schéma $Y = \{x\} \times X$. Dans le cas où $Y = X \times \{x\}$, on obtient de la même manière

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} = s \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j^+(a) + \Lambda_j^+(b)$$

et, là encore, le nombre d'intersection est indépendant du point x. Maintenant, en identifiant $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ à $\mathrm{Mat}_{2\times g}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g$, considérons, pour tout entier $s > 0$, la fonction f_s qui fait correspondre à un morphisme $\varphi \in (\mathbb{Z}^g \setminus \{0\})^2$ le nombre d'intersection $\mathcal{M}_{s,\varphi} \cdot \mathcal{Y}_{s,\varphi}$. Avec ces notations, nos calculs montrent que $f_s = s^{\dim(Y_1)} f_1$, pour tout entier $s > 0$ et, d'autre part, que f_1 est la somme des parties positives d'une suite de formes linéaires $F_1, \ldots, F_{2N}$. Prolongeons f_1 à $\mathbb{Q}^g \times \mathbb{Q}^g$ en prolongeant chaque forme linéaire F_j et considérons l'ensemble $E = \{\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \mid \varphi \in \Phi\}$. Alors il suffit de montrer que la constante $c = \inf_E f_1$ est strictement positive pour obtenir (†), car

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{Y} = f_s(\varphi) = s^{\dim(Y_1)} \|\varphi\| f_1 \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right) \geq c s^{\dim(Y_1)} \|\varphi\|.$$

Ceci commence par le résultat suivant.

Lemme 5.1. *Pour toute matrice non nulle $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times g}(\mathbb{Z})$, on a $\mathcal{M}_{1,\varphi}\cdot\mathcal{Y}_{1,\varphi} > 0$.*

Démonstration. Considérons le morphisme $r : \Omega \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Alors, la restriction de r au sous-schéma fermé Y est propre et nous introduisons l'image fermée $Z = r(Y)_{\text{réd}}$ de Y dans ce morphisme. Nous allons montrer que le morphisme $Y \to Z$ induit par r est fini, ce qui entraînera facilement la non-nullité du nombre d'intersection $\mathcal{M}\cdot\mathcal{Y}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que Z est de dimension nulle. Alors, comme Y est irréductible, Z est un point fermé $P = (P^{(1)}, P^{(2)})$ de $\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ qui provient du tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ car, $r(Y)$ étant réduite au point P, celui-ci est aussi l'image de $Y \cap (C \times C)$. Si par exemple $Y = X \times \{y\}$, alors ceci donne deux équations sur la courbe C, $x_1^{a_1}\cdots x_g^{a_g} = \lambda_a y_1^{a_1}\cdots y_g^{a_g}$ et $x_1^{b_1}\cdots x_g^{b_g} = \lambda_b y_1^{b_1}\cdots y_g^{b_g}$ où les nombres λ_a et λ_b de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ s'obtiennent en écrivant $P^{(1)} = (1 : \lambda_a)$ et $P^{(2)} = (1 : \lambda_b)$. Mais, vu qu'on suppose C transverse, on en déduit que $a = b = 0$, donc $\varphi = 0$. Par suite, il suffit de supposer $\varphi \neq 0$ pour que Z soit une courbe et, dans ces conditions, la non-singularité de la courbe projective $Y = X \times \{y\}$ permet d'appliquer [H, II. prop. 6.8] pour obtenir la finitude du morphisme $Y \to Z$. Notons maintenant, comme précédemment, qu'en vertu de l'inclusion $\mathcal{Y} \subset \widetilde{\Omega}$, on a $\mathcal{M}\cdot\mathcal{Y} = \deg\, c_1(r^*\mathcal{O}(1,1)) \cap [Y]$. De plus, comme le degré se conserve lorsqu'on pousse en avant la classe de cycles par un morphisme propre, on déduit de la formule de projection [F, 2.5(c)] que

$$\deg\, c_1(r^*\mathcal{O}(1,1)) \cap [Y] = \deg\, c_1(\mathcal{O}(1,1)) \cap r_*[Y].$$

Enfin, en notant δ le degré de l'extension $K(Z) \to K(Y)$ donnée par le morphisme fini $Y \to Z$, on a $r_*[Y] = \delta\cdot[Z]$. Donc, finalement

$$\deg\, c_1(\mathcal{O}(1,1)) \cap r_*[Y] = \delta \deg(Z) > 0.$$

□

Remarque 5.1. Ce dernier résultat implique en particulier l'injectivité de l'application linéaire $\Lambda : \mathbb{Q}^g \to \mathbb{Q}^N$ donnée par $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N)$. En effet, il suffit de montrer que, pour tout vecteur γ de $\mathbb{Z}^g$, la relation $\Lambda(\gamma) = 0$ entraîne $\gamma = 0$. Or, si l'on suppose γ non nul, alors la matrice $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times g}(\mathbb{Z})$ dont les deux lignes sont égales à γ appartient à $(\mathbb{Z}^g \setminus \{0\})^2$, de sorte que la relation $\Lambda(\gamma) = 0$ implique l'annulation du nombre d'intersection $\mathcal{M}_{1,\varphi}\cdot\mathcal{Y}_{1,\varphi} = f_1(\varphi)$. Enfin, ceci force $\varphi = 0$ d'après le résultat précédent, ce qui est absurde.

Nous déduisons immédiatement du lemme précédent la non-annulation de f_1 sur $(\mathbb{Q}^g \setminus \{0\})^2$. Prolongeons maintenant f_1 à $\mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$ en prolongeant chaque forme linéaire F_j et considérons l'adhérence $\bar{E}$ de E dans cet espace. Comme nous avons imposé $\|a\| = \|b\|$ pour les morphismes de la famille Φ, on voit qu'en notant S la sphère unité de $\mathbb{R}^g$, $\bar{E}$ est situé sur $\frac{1}{2}(S \times S)$. En particulier $\bar{E}$ est compact, donc l'infimum de f_1 sur $\bar{E}$ est atteint en un certain point x et $f_1(x) \leq c$. Ainsi, pour montrer que c est strictement positive, il ne reste plus qu'à montrer que notre fonction ne s'annule pas sur $\bar{E}$.

Proposition 5.2. *Le prolongement $f_1 : \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur $(\mathbb{R}^g \setminus \{0\})^2$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant donné un vecteur x de $(\mathbb{R}^g \setminus \{0\})^2$ tel que $f_1(x) = 0$. Dans ces conditions $F_j^+(x) = 0$ pour $j = 1, \ldots, 2N$, donc on a par exemple $F_1(x) = \ldots = F_k(x) = 0$ et $F_{k+1}(x), \ldots, F_{2N}(x) < 0$. Ainsi, x fait partie du sous-espace vectoriel $H = \bigcap_{j=1}^k \operatorname{Ker} F_j$ dans lequel les points à coordonnées dans $\mathbb{Q}$ sont denses vu que les équations $F_j = 0$ de H sont à coefficients entiers. D'autre part, les inégalités $F_{k+1} < 0, \ldots, F_{2N} < 0$ sont encore valables sur tout un voisinage U de x. Mais alors, $U \cap (\mathbb{R}^g \setminus \{0\})^2 \cap H$ est un voisinage de x dans H sur lequel la fonction f_1 est identiquement nulle. Ainsi, grâce au lemme précédent, $U \cap (\mathbb{R}^g \setminus \{0\})^2 \cap H$ ne peut contenir aucun point à coordonnées rationnelles. Enfin, ceci est absurde au vu de leur densité dans H. □

Corollaire 5.3. *Si l'on suppose X non singulière, alors il existe une constante $c > 0$ qui vérifie les minorations (†) pour toutes les courbes Y des familles $(\{x\} \times X)_{x \in C(\bar{\mathbb{Q}})}$ et $(X \times \{x\})_{x \in C(\bar{\mathbb{Q}})}$.*

Démonstration. Si par exemple $Y = \{x\} \times X$, alors la fonction correspondante f_1 est indépendante du point x. Ainsi, la constante $c' = \inf_E f_1$, qui est strictement positive d'après le résultat précédent, vérifie les minorations (†) pour toutes les courbes de la famille $(\{x\} \times X)_{x \in C(\bar{\mathbb{Q}})}$. De même, il existe une constante $c'' > 0$ qui vérifie ces minorations pour toutes les courbes de la famille $(X \times \{x\})_{x \in C(\bar{\mathbb{Q}})}$, de sorte qu'en posant $c = \min(c', c'')$ nous obtenons finalement une constante indépendante de Y. □

6 Calculs d'intersection dans le cas des surfaces

On s'attaque maintenant à la minoration (†) du théorème 3.1 dans le cas des surfaces, en supposant désormais $Y = X \times X$. Introduisons d'abord la partie W de $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ formée par les morphismes correspondants aux matrices de rang maximal ; W contient Φ et le choix d'un paramètre $\varphi \in W$ garantit que les lignes de la matrice correspondante sont non nulles, ce qui assure la validité des résultats démontrés en préliminaire.

En représentant le faisceau inversible $\mathcal{M}$ par le diviseur de Cartier $D = \Delta + V$, notre objectif est maintenant de minorer le degré de la classe d'intersection $D \cdot [D]$, classe de cycles qui se développe sous la forme

$$D \cdot [D] = \Delta \cdot [\Delta] + V \cdot [V],$$

car $V \cdot [\Delta] = \Delta \cdot [V] = 0$. En effet, on a d'abord $V \cdot [\Delta] = \Delta \cdot [V]$ par commutativité des classes d'intersection (voir [F, th. 2.4]) et il suffit de montrer par exemple que $\Delta \cdot [V] = 0$. Considérons alors $\imath : Z \hookrightarrow \mathcal{X}$ l'une des sous-variétés de $\mathcal{X}$ qui apparaissent dans le cycle $[V]$. Alors Z est une composante irréductible d'une fibre purement 1-dimensionnelle $\pi^{-1}(P)$ et $\Delta \cdot [Z]$ est la classe de cycles sur Z associée à son faisceau inversible $\imath^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\Delta)$. Mais alors, comme le diviseur Δ est linéairement équivalent à 0 au voisinage de $\pi^{-1}(P)$, le faisceau $\imath^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\Delta)$ est trivial et $\Delta \cdot [Z] = 0$, ce qui prouve que $\Delta \cdot [V] = 0$.

Pour décrire le degré de l'intersection $V \cdot [V]$ nous utiliserons la notion suivante de multiplicité (voir [M, §14]). Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien de dimension d et $\mathfrak{q}$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire, au sens où $V(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{m}\}$. Alors la limite $e(\mathfrak{q}, R) =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} \mathrm{long}_R(R/\mathfrak{q}^n)$ est un entier bien défini que l'on appelle multiplicité de l'idéal $\mathfrak{q}$ dans l'anneau R.

Remarque 6.1. En premier lieu, nous complétons cette définition par la formule suivante :

$$(*) \qquad e(\mathfrak{q}, R) = \lim_{n\to\infty} \frac{(d-1)!}{n^{d-1}} \mathrm{long}_R(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}),$$

qui se déduit, tout comme l'existence des limites précédentes, du fait qu'en décomposant le polynôme de Hilbert-Samuel de l'anneau gradué $\bigoplus_{d\geq 0} \mathfrak{q}^d/\mathfrak{q}^{d+1}$ sur la base de $\mathbb{Q}[T]$ formée des coefficients binomiaux, $e(\mathfrak{q}, R)$ est le coefficient ¡¡dominant¿¿ (voir [M, §13]).

D'autre part, soient R un anneau noethérien, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R et supposons que R contient un relèvement k du corps résiduel $R/\mathfrak{m}$, autrement dit un corps k se projettant sur $R/\mathfrak{m}$ dans la réduction modulo $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R, alors $\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ est de longueur finie sur R pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'on a la formule

$$(**) \qquad \mathrm{long}_R\,(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}) = \dim_k \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}.$$

En effet, $\mathfrak{q}$ annule le R-module $\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$; ainsi, si l'on se donne une suite de composition $\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1} = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = (0)$, alors chacun de ses facteurs M_i/M_{i+1} est isomorphe au quotient de $R/\mathfrak{q}$ par l'un de ses idéaux maximaux. On en déduit que tous les M_i/M_{i+1} sont isomorphes à $R/\mathfrak{m}$ et notre filtration de $\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ est aussi une suite de composition pour la structure de k-espace vectoriel.

Pour finir, nous prolongeons la notion de multiplicité en posant $e(\mathfrak{q}, R) = 0$ lorsque $\mathfrak{q} = R$. Avec cette convention, notre résultat prend la forme suivante.

Lemme 6.1. *Introduisons, pour tout point fermé P de la surface $X \times X$, la multiplicité $e(P) = e(\mathcal{I}_P, \mathcal{O}_{X\times X,P})$ de la fibre $\mathcal{I}_P$ dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X\times X,P}$. Alors, pour tout paramètre $\varphi \in W$, on a*

$$\deg V \cdot [V] = -\sum_{i,j} e(P_{i,j}).$$

Démonstration. Nous commençons par décomposer $V = \sum_{i,j} V^{i,j}$ où $V^{i,j}$ est un diviseur de Cartier à support dans la fibre $\pi^{-1}(P_{i,j})$. Alors, comme l'intersection de deux diviseurs de Cartier à supports disjoints est nulle, on a $V \cdot [V] = \sum_{i,j} V^{i,j} \cdot [V^{i,j}]$ et il ne reste plus qu'à déterminer le degré de chaque terme $\gamma = V^{i,j} \cdot [V^{i,j}]$, c'est-à-dire $f_*(\gamma)$ en notant f le morphisme propre $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{Q}}$. En outre, comme le 0-cycle γ est supporté par la fibre du point $P = P_{i,j}$, son degré est aussi donné par $g_*(\gamma)$ en notant cette fois g le morphisme propre $\pi^{-1}(P) \to \mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{Q}}$. Ceci montre que le calcul du degré peut se faire localement au-dessus du point P, au sens où il est donné par la quantité $g_*(V^{i,j}|_{\pi^{-1}(U)} \cdot [V^{i,j}|_{\pi^{-1}(U)}])$, pour tout voisinage U du point P sur la surface $X \times X$.

En particulier, choisissons pour U le voisinage du point P donné par la proposition 4.3. Alors, $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ est un éclatement de U et le faisceau inversible $\mathcal{M}|_{\widetilde{U}}$ est représenté par l'opposé du diviseur exceptionnel, de sorte qu'en notant Z le sous-schéma de $\widetilde{U}$ défini par ce dernier, on a $[D|_{\widetilde{U}}] = -[Z]$. D'autre part, la remarque 4.2 montre qu'on peut supposer que $U = \mathrm{Spec}\,R$ est un voisinage affine de la forme $U_1 \times U_2$ pour des voisinages U_1 et U_2 des composantes de P assez petits pour que les faisceaux $\mathcal{O}_X([P_i])|_{U_1}$ et $\mathcal{O}_X([P_j])|_{U_2}$ soient triviaux et que $U \setminus \{P\} \subset \Omega$. Dans ces conditions, $V|_{\widetilde{U}} = V^{i,j}|_{\widetilde{U}}$ et $\Delta|_{\widetilde{U}}$ est linéairement équivalent à 0. Ainsi, le diviseur $V^{i,j}|_{\widetilde{U}}$ est linéairement équivalent à $D|_{\widetilde{U}}$ et

$$\begin{aligned}\deg\,(V^{i,j}\cdot[V^{i,j}]) &= g_*(V^{i,j}|_{\widetilde{U}}\cdot[V^{i,j}|_{\widetilde{U}}])\\ &= g_*(D|_{\widetilde{U}}\cdot[D|_{\widetilde{U}}])\\ &= -\deg\, D\cdot[Z].\end{aligned}$$

Notons que lorsque Z est de dimension nulle, il est réduit à un point fermé $\imath$: $\operatorname{Spec}\bar{\mathbb{Q}} \to \mathcal{X}$ et le faisceau $\imath^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ est donc trivial. Dans ces conditions, la classe d'intersection $D\cdot[Z]$ est nulle, de sorte que $\deg\,(V^{i,j}\cdot[V^{i,j}]) = 0$. D'autre part, la fibre de l'idéal $\mathcal{I}$ au point P coïncide avec l'anneau local $\mathcal{O}_{X\times X,P}$, donc, par la convention ici adoptée, $e(P) = 0$ et on a $\deg\,(V^{i,j}\cdot[V^{i,j}]) = e(P)$. Nous pouvons désormais supposer que Z est de dimension 1. Maintenant, $\mathcal{M}|_Z$ est très ample car la composée

$$Z \xrightarrow{q_1\times q_2} \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}\times\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^3_{\bar{\mathbb{Q}}}$$

est une immersion fermée $\jmath$ dans laquelle $\mathcal{M}|_Z = \jmath^*\mathcal{O}(1)$. On peut donc introduire le polynôme de Hilbert F du faisceau cohérent $\mathcal{O}_Z$ relativement au faisceau très ample $\mathcal{M}|_Z$ et, en notant $\deg\,(\mathcal{M}|_Z)$ son coefficient dominant, on a

$$\deg\, D\cdot[Z] = \deg\,(\mathcal{M}|_Z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}F(n),$$

car Z est de dimension 1 (voir [F, exemple 2.5.2.(d)]). Enfin, $\mathcal{M}|_Z$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_Z(1)$ de $Z = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{d\geq 0}(I^d/I^{d+1}))$, avec $I = \Gamma(U,\mathcal{I})$. Par conséquent, $F(n) = \dim_{\bar{\mathbb{Q}}}\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z(n))$ pourvu que l'entier n soit suffisament grand et, quitte à prendre n encore plus grand, $\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z(n)) = I^n/I^{n+1}$ d'après [H, II. ex. 5.9(b)]. Finalement, on obtient donc

$$\deg\,(\mathcal{M}|_Z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} I^n/I^{n+1},$$

ce qui nous amène à la multiplicité $e(P)$ annoncée.

En effet, appelons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R représentant le point P ; alors I est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire et la formule $(**)$ de la remarque 6.1 nous donne $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} I^n/I^{n+1} = \operatorname{long}_R(I^n/I^{n+1})$. De plus, comme le support de I^n/I^{n+1} est réduit à $\mathfrak{m}$, ses localisations en les autres idéaux premiers de R sont nulles et une application de [F, A.1.2] montre que $\operatorname{long}_R(I^n/I^{n+1}) = \operatorname{long}_{R_\mathfrak{m}}(I^n_\mathfrak{m}/I^{n+1}_\mathfrak{m})$. Ainsi, en combinant les deux dernières égalités, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\deg\,(\mathcal{M}|_Z) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{long}_{R_\mathfrak{m}}(I^n_\mathfrak{m}/I^{n+1}_\mathfrak{m})\\ &= e(I_\mathfrak{m},R_\mathfrak{m}),\end{aligned}$$

grâce à la formule $(*)$ de notre remarque 6.1, et ceci termine la preuve. □

On s'attaque maintenant au calcul de multiplicité en fixant d'abord un point $P = P_{i,j}$ et en notant respectivement A et B les anneaux locaux de X aux points P_i et P_j.

Comme la courbe X est non singulière, ces anneaux sont de valuation discrète et l'on s'y donne des uniformisantes $\xi \in A$ et $\eta \in B$. Appelons ensuite R l'anneau local $\mathcal{O}_{X\times X,P}$, localisation de $A\otimes B$ en l'idéal $(\xi\otimes 1, 1\otimes\eta)$, et posons $I=\mathcal{I}_P$. Alors, en exploitant la régularité du système de paramètres $(\xi\otimes 1, 1\otimes\eta)$ de R, nous allons nous ramener au cas d'un idéal monomial dans l'anneau de polynômes $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$. Rappelons déjà que notre idéal I se décompose $I=I_a\cdot I_b$ en posant $I_a=(\xi^{s\Lambda_i^-(a)}\otimes\eta^{\Lambda_j^+(a)}, \xi^{s\Lambda_i^+(a)}\otimes\eta^{\Lambda_j^-(a)})$ et $I_b=(\xi^{s\Lambda_i^-(b)}\otimes\eta^{\Lambda_j^+(b)}, \xi^{s\Lambda_i^+(b)}\otimes\eta^{\Lambda_j^-(b)})$.

On distingue maintenant plusieurs cas. Supposons d'abord que les applications rationnelles r_a et r_b ne se prolongent pas au point P, ce qui revient à dire que $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a)>0$ et $\Lambda_i(b)\Lambda_j(b)>0$. Pour simplifier les notations, posons $c=|s\Lambda_i(a)|$, $d=|\Lambda_j(a)|$, $e=|s\Lambda_i(b)|$ et $f=|\Lambda_j(b)|$. Alors on a $I=(\xi^c\otimes 1, 1\otimes\eta^d)(\xi^e\otimes 1, 1\otimes\eta^f)=(\xi^{c+e}\otimes 1, \xi^c\otimes\eta^f, \xi^e\otimes\eta^d, 1\otimes\eta^{d+f})$. Soient maintenant J l'idéal de $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ engendré par les monômes $\{X^{c+e}, X^cY^f, X^eY^d, Y^{d+f}\}$ et $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_{X\times X,P}$. Si N est un entier suffisamment grand, I^n contient $\mathfrak{m}^N$ et, par application de [M, th. 14.4], le système régulier de paramètres $(\xi\otimes 1, 1\otimes\eta)$ nous donne un isomorphisme $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/(X,Y)^N\to R/\mathfrak{m}^N$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} R/I^n &\simeq \frac{R/\mathfrak{m}^N}{I^n/\mathfrak{m}^N} \\ &\simeq \frac{\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/(X,Y)^N}{J^n/(X,Y)^N} \\ &\simeq \bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/J^n\,. \end{aligned}$$

Comme l'idéal J se décompose $(X^c,Y^d)(X^e,Y^f)$, on voit que sa puissance n-ième est engendrée par les monômes $X^{\lambda c+\mu e}\,Y^{(n-\lambda)d+(n-\mu)f}$, pour $0\le\lambda,\,\mu\le n$. Si nous représentons ces monômes sur un dessin, ils forment un quadrillage du parallélogramme de sommets $(X^{n(c+e)}, X^{nc}Y^{nf}, X^{ne}Y^{nd},\, Y^{n(d+e)})$. Soit $\mathfrak{M}=X^\gamma Y^\delta$ le sommet le plus proche de l'origine dans la paire $\{X^{nc}Y^{nf}, X^{ne}Y^{nd}\}$, au sens où $\mathfrak{M}$ minimise la quantité $\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$. Alors l'ensemble formé par les monômes qui n'appartiennent pas à J^n contient deux triangles adjacents T_n et T_n' dont les sommets sont donnés par les familles $(X^{n(c+e)},1,\mathfrak{M})$ et $(1,\mathfrak{M},Y^{n(d+f)})$. De plus, le cardinal de l'ensemble formé par les monômes qui n'appartiennent pas à J^n et qui ne font pas partie de l'un de ces triangles croît linéairement avec l'entier n. Ainsi, en notant E_n l'ensemble des points à coordonnées entières de $T_n\cup T_n'$, on a $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}}\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/J^n=\operatorname{Card}E_n+O(n)$. Enfin, la somme des aires de nos triangles est donnée par $\frac{1}{2}n(c+e)\delta+\frac{1}{2}n(d+f)\gamma=\frac{1}{2}n^2(cd+ef+2\min(cf,de))$. Bien entendu, cette quantité ne correspond pas exactement au cardinal de l'ensemble E_n, car l'aire de nos triangles diffère *a priori* du nombre de points à coordonnées entières qu'ils contiennent. Néanmoins, on voit facilement que la différence entre ces deux quantités est encore dominée par n lorsque celui-ci tend vers l'infini, donc $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}}\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/J^n=\frac{1}{2}n^2(cd+ef+2\min(cf,de))+O(n)$. Ainsi, en remplaçant les entiers c,d,e et f par leurs valeurs respectives, on obtient lorsque $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a)$ et $\Lambda_i(b)\Lambda_j(b)$ sont strictement positifs :

$$e(I,R)=s\Lambda_i(a)\Lambda_j(a)+s\Lambda_i(b)\Lambda_j(b)+2s\min\{|\Lambda_i(a)\Lambda_j(b)|,|\Lambda_j(a)\Lambda_i(b)|\}.$$

On se penche maintenant sur le cas où l'un des facteurs I_a ou I_b de l'idéal I est trivial. Ceci correspond géométriquement au cas où l'une des applications rationnelles r_a ou r_b se prolonge régulièrement au point P, soit encore, en termes des formes linéaires Λ_i et Λ_j, $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a) \leq 0$ ou $\Lambda_i(b)\Lambda_j(b) \leq 0$. Bien entendu, nous supposons ici que la fibre $\pi^{-1}(P)$ est de dimension 1, ce qui exclut le cas trivial où r se prolonge régulièrement au point P. Ainsi donc, si l'on a par exemple $\Lambda_i(b)\Lambda_j(b) \leq 0$, alors $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a) > 0$ et $I = (\xi^c \otimes 1, 1 \otimes \eta^d)$. Comme précédemment, on se ramène alors au cas de l'idéal $J = (X^c, Y^d)$ dans l'anneau de polynômes $\bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ et on voit facilement que $\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\mathbb{Q}}[X,Y]/J^n = cd \cdot n^2/2 + O(n)$. Ainsi, dans le cas où $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a) > 0$ et $\Lambda_i(b)\Lambda_j(b) \leq 0$, on obtient simplement :

$$e(I,R) = s\Lambda_i(a)\Lambda_j(a),$$

et symétriquement en intervertissant a et b.

Nous rassemblons maintenant les résultats obtenus dans les différents cas (y compris lorsque la fibre $\pi^{-1}(P)$ est réduite à un point).

Lemme 6.2. *Considérons les formes quadratiques $Q_{i,j} = \Lambda_i\Lambda_j$ et les formes bilinéaires $B_{i,j}(a,b) = \Lambda_i(a)\Lambda_j(b)$, ainsi que l'ensemble*

$$\{\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2) \mid Q_{i,j}(a) > 0 \text{ et } Q_{i,j}(b) > 0\}$$

et son indicatrice $\chi_{i,j}$. Alors, pour tout choix d'un paramètre φ dans l'ensemble W et tout entier $s > 0$, on a

$$\frac{1}{s} \cdot e(P_{i,j}) = Q_{i,j}^+(a) + Q_{i,j}^+(b) + 2\min\{|B_{i,j}(a,b)|, |B_{i,j}(b,a)|\} \cdot \chi_{i,j}(\varphi).$$

Pour conclure le calcul du nombre d'intersection de $\mathcal{M}$, il ne reste alors plus qu'à déterminer le degré de l'auto-intersection $\Delta \cdot [\Delta]$. Pour ce faire, on remarque déjà que $p_\kappa^*[P_i] \cdot p_\kappa^*[P_j] = 0$ pour $\kappa = 1, 2$ et toute paire d'indices i et j. En effet, le cas $i \neq j$ est trivial car les supports des diviseurs sont disjoints et on se débarrasse facilement du cas $i = j$ par application de la formule de projection. Ensuite, remarquons que $\pi_*(p_2^*[P_j]) = [X \times P_j]$. En effet, ces 1-cycles coïncident sur l'ouvert Ω, donc ils diffèrent par un 1-cycle à support dans $(X \times X) \setminus \Omega$ et, comme ce dernier est de dimension nulle, ils sont forcément égaux. D'autre part $p_1^*[P_i] = \pi^*[P_i \times X]$, donc la formule de projection montre que $\pi_*(p_1^*[P_i] \cdot p_2^*[P_j]) = [P_i \times X] \cdot [X \times P_j] = [P_{i,j}]$ est de degré 1. Ainsi, on voit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} \cdot \deg(\Delta \cdot [\Delta]) &= 2\sum_{i,j} (\Lambda_i^+(a) + \Lambda_i^+(b))(\Lambda_j^-(a) + \Lambda_j^-(b)) \\
&= \sum_{i,j} (\Lambda_i^+(a) + \Lambda_i^+(b))(\Lambda_j^-(a) + \Lambda_j^-(b)) + \\
&\qquad (\Lambda_j^+(a) + \Lambda_j^+(b))(\Lambda_i^-(a) + \Lambda_i^-(b)) \\
&= \sum_{i,j} Q_{i,j}^-(a) + Q_{i,j}^-(b) + B_{i,j}^-(a,b) + B_{i,j}^-(b,a).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à rassembler les morceaux pour obtenir une expression du nombre d'intersection. Cependant, cette première formule n'est pas assez pertinente pour en déduire les minorations (†) ; nous allons la simplifier pour atteindre l'expression suivante.

Proposition 6.3. *Pour tout paramètre $\varphi \in W$ et tout entier $s > 0$ on a*

$$(\ddagger)\quad \frac{1}{s}\mathcal{M}_{s,\varphi}^{\cdot 2}\cdot\mathcal{X}_{s,\varphi} = \sum_{Q_{i,j}(a)>0} |\Lambda_i(a)\Lambda_j(b) - \Lambda_j(a)\Lambda_i(b)| + \frac{1}{2}\sum_{Q_{i,j}(a)=0} |\Lambda_i(a)\Lambda_j(b) - \Lambda_j(a)\Lambda_i(b)|.$$

Démonstration. En premier lieu, le lemme 6.1 nous donne la formule $\frac{1}{s}\mathcal{M}^{\cdot 2}\cdot\mathcal{X} = \frac{1}{s}\deg\Delta\cdot[\Delta] - \frac{1}{s}\sum_{i,j} e(P_{i,j})$. Puis, en utilisant la relation $\sum_{i,j} Q_{i,j} = 0$ qui se déduit facilement de la remarque 4.1, on a $\sum_{i,j} Q_{i,j}^+ - Q_{i,j}^- = 0$ et la quantité $\frac{1}{s}\mathcal{M}^{\cdot 2}\cdot\mathcal{X}$ prend la forme suivante,

$$\sum_{i,j} B_{i,j}^-(a,b) + B_{i,j}^-(b,a) - 2\min\{|B_{i,j}(a,b)|, |B_{i,j}(b,a)|\}\cdot\chi_{i,j}(\varphi).$$

Pour simplifier cette expression, notons déjà que $\sum_{i=1}^N \Lambda_i^+ = \sum_{i=1}^N \Lambda_i^- = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N |\Lambda_i|$ car, en soustrayant le second membre au premier, on obtient $\sum_{i=1}^N \Lambda_i = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} B_{i,j}^-(a,b) &= \left(\sum_i \Lambda_i^-(a)\right)\sum_j \Lambda_j^+(b) + \left(\sum_i \Lambda_i^+(a)\right)\sum_j \Lambda_j^-(b) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} |\Lambda_i(a)\Lambda_j(b)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} |B_{i,j}(a,b)|.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule suivante

$$(*)\qquad \frac{1}{s}\mathcal{M}^{\cdot 2}\cdot\mathcal{X} = \sum_{i,j}\frac{1}{2}(|B_{i,j}(a,b)|+|B_{i,j}(b,a)|) - 2\min\{|B_{i,j}(a,b)|, |B_{i,j}(b,a)|\}\cdot\chi_{i,j}(\varphi).$$

Si l'on pose maintenant $x = B_{i,j}(a,b)$, $y = B_{i,j}(b,a)$ et qu'on introduit les indicatrices respectives χ_1 et χ_2 des ensembles $\{a \in \mathbb{Z}^g \mid Q_{i,j}(a) > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid xy > 0\}$, alors on a $\chi_{i,j}(\varphi) = \chi_1(a)\chi_2(x,y)$. D'autre part, $-2\min\{|x|,|y|\}\chi_2(x,y) = |x-y| - |x| - |y|$, donc

$$-2\min\{|x|,|y|\}\chi_{i,j}(\varphi) = (|x-y| - |x| - |y|)\chi_1(a).$$

Introduisons ensuite la fonction $\chi' : \mathbb{Z}^g \to \mathbb{Q}$ définie par $\chi'(a) = \frac{1}{2}(1 + \epsilon(Q_{i,j}(a))$ où $\epsilon : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ désigne le signe d'un entier relatif prolongé en 0 par $\epsilon(0) = 0$. Alors, $(|x-y| - |x| - |y|)\chi_1(a) = (|x-y| - |x| - |y|)\chi'(a)$ car χ_1 et χ' coïncident lorsque $Q_{i,j}(a) \neq 0$ et $Q_{i,j}(a) = 0$ entraîne que x ou y est nul, donc que $|x-y| - |x| - |y| = 0$. Finalement, on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(|x| + |y|) - 2\min\{|x|,|y|\}\chi_{i,j}(\varphi) &= \frac{1}{2}(|x| + |y|) + (|x-y| - |x| - |y|)\chi'(a) \\
&= |x-y|\chi'(a) - \frac{1}{2}x\epsilon(xQ_{i,j}(a)) - \frac{1}{2}y\epsilon(yQ_{i,j}(a)),
\end{aligned}$$

car $|\gamma| = \epsilon(\gamma)\gamma$ et $\epsilon(\gamma\delta) = \epsilon(\gamma)\epsilon(\delta)$ pour tous $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. Grâce à ce dernier calcul et comme $\gamma\epsilon(\gamma^2) = \gamma$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}$, la formule $(*)$ se réecrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\mathcal{M}^{\cdot 2} \cdot \mathcal{X} &= \sum_{i,j} |\Lambda_i(a)\Lambda_j(b) - \Lambda_j(a)\Lambda_i(b)|\chi'(a) - \left(\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i(a)\right) \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j(b)\epsilon(\Lambda_j(a)\Lambda_j(b)) \\ &= \sum_{i,j} |\Lambda_i(a)\Lambda_j(b) - \Lambda_j(a)\Lambda_i(b)|\chi'(a),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Enfin, pour tout entier $s > 0$ fixé, nous considérons la fonction f_s qui fait correspondre à un paramètre $\varphi \in W$ le nombre d'intersection $\mathcal{M}_{s,\varphi}^{\cdot 2} \cdot \mathcal{X}_{s,\varphi}$. Alors, en prolongeant chaque forme linéaire Λ_i à l'espace $\mathbb{R}^g$, la formule (‡) nous permet de prolonger chaque fonction f_s à l'espace $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_\mathrm{m}^2) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$. D'autre part, cette même formule montre que les prolongements ainsi obtenus satisfont $f_s = sf_1$, pour tout entier $s > 0$, et elle donne aussi l'homogénéité $f_1(\lambda\varphi) = \lambda^2 f_1(\varphi)$ pour tout élément $\varphi \in \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$ et tout nombre réel λ. Ainsi, en considérant de nouveau l'ensemble $E = \{\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\}_{\varphi\in\Phi}$, la constante $c = \inf_E f_1$ vérifie

$$\mathcal{M}_{s,\varphi}^{\cdot 2} \cdot \mathcal{X}_{s,\varphi} = f_s(\varphi) = s\|\varphi\|^2 f_1\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) \geq cs\|\varphi\|^2,$$

pour tout paramètre $\varphi \in \Phi$ et tout entier $s > 0$; il ne reste plus qu'à montrer que $c > 0$.

Théorème 6.4. *En supposant X non singulière, il existe une constante $c > 0$ qui vérifie les minorations* (†) *pour $Y = X \times X$.*

Démonstration. Soit $W_\mathbb{R}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$ formé des couples (a, b) dont les composantes a et b sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^g$. Nous allons montrer que notre prolongement $f_1 : \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g \to \mathbb{R}$ est à valeurs strictement positives sur $W_\mathbb{R}$; par compacité, il existe un point x de l'adhérence $\bar{E}$ tel que $f_1(x) = \inf_{\bar{E}} f_1 \leq c$ et, comme $\bar{E} \subset W_\mathbb{R}$, ceci montrera que c est strictement positive.

En contraposant, tout revient donc à démontrer que les composantes d'un couple (a, b) où la fonction f_1 s'annule sont colinéaires. Pour ce faire, notons d'abord qu'il suffit de montrer que c'est le cas des vecteurs $\Lambda(a)$ et $\Lambda(b)$ de $\mathbb{R}^N$. En effet, d'après notre remarque 5.1, l'application linéaire $\Lambda : \mathbb{R}^g \to \mathbb{R}^N$ est injective, de sorte que la colinéarité de $\Lambda(a)$ et $\Lambda(b)$ entraîne celle de a et b. Maintenant, d'après la formule (‡) qui définit notre prolongement f_1, l'annulation de f_1 en un point (a, b) implique celle des mineurs maximaux de la matrice $\begin{pmatrix}\Lambda_1(a) & \dots & \Lambda_N(a) \\ \Lambda_1(b) & \dots & \Lambda_N(b)\end{pmatrix}$ pour les paires d'indices i et j de $\{1, \dots, N\}$ telles que $\Lambda_i(a)\Lambda_j(a) \geq 0$. Quitte à réordonner nos formes linéaires, on peut supposer que $\Lambda_1(a), \dots, \Lambda_r(a) \geq 0$ et $\Lambda_{r+1}(a), \dots, \Lambda_N(a) < 0$, pour un certain r qui appartient *a priori* à l'ensemble $\{0, \dots N\}$. On exclut d'emblée le cas $r = 0$ qui est absurde car, d'après notre remarque 4.1, la somme des $\Lambda_i(a)$ est nulle, ce qui est impossible si tous ces nombres sont strictement négatifs. De plus, si jamais $r = N$, alors $\Lambda_i(a) \geq 0$, pour $i = 1, \dots N$, et l'annulation de la somme de ces nombres force l'annulation de chacun d'entre eux. Ainsi, dans le cas où $r = N$, on a $\Lambda(a) = 0$, de sorte que $\Lambda(a)$ et $\Lambda(b)$ sont trivialement colinéaires.

Nous pouvons désormais supposer que $1 \leq r < N$; si maintenant $\Lambda_1(a) = \dots = \Lambda_r(a) = 0$, on en déduit que $\sum_{i>r} \Lambda_i(a) = \sum_{i=1}^N \Lambda_i(a) = 0$, ce qui est absurde car $\Lambda_i(a) < 0$ pour $i > r$. Ainsi, la première ligne de la matrice $\begin{pmatrix} \Lambda_1(a) & \dots & \Lambda_r(a) \\ \Lambda_1(b) & \dots & \Lambda_r(b) \end{pmatrix}$ est non nulle. D'autre part, comme tous ses mineurs maximaux sont nuls, ses lignes sont linéairement dépendantes et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$(\Lambda_1(b), \dots, \Lambda_r(b)) = \lambda(\Lambda_1(a), \dots, \Lambda_r(a)).$$

Pour les mêmes raisons, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\Lambda_{r+1}(b), \dots, \Lambda_N(b)) = \mu(\Lambda_{r+1}(a), \dots, \Lambda_N(a))$$

et il ne reste plus qu'à montrer que $\lambda = \mu$. En appliquant ces deux dernières formules à l'équation $\sum_{i=1}^r \Lambda_i(b) = -\sum_{i>r} \Lambda_i(b)$, on obtient

$$(*) \qquad \lambda \sum_{i=1}^r \Lambda_i(a) = -\mu \sum_{i>r} \Lambda_i(a).$$

Enfin, on a aussi $\sum_{i=1}^r \Lambda_i(a) = -\sum_{i>r} \Lambda_i(a)$ et, comme $r < N$, ce nombre est non nul ; en divisant $(*)$ par ce dernier, on obtient finalement $\lambda = \mu$ et les vecteurs $\Lambda(a)$ et $\Lambda(b)$ sont colinéaires. □

7 Inégalité de Vojta uniforme

Nous appliquons ici l'inégalité de Vojta généralisée à l'éclatement $\mathcal{X} \to X \times X$. Maintenant que les minorations (†) sont démontrées, il ne reste plus qu'à décrire certaines injections j_1 et j_2 entre faisceaux inversibles sur $\mathcal{X}$ (voir [R2]). Pour commencer, posons

$$\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, 0, 0) \text{ et } \mathcal{P} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, 1, 1)$$

et remarquons que $\mathcal{P}$ est très ample sur $\mathbb{P}$. En effet, appliquons aux facteurs $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de $\mathbb{P}$ des morphismes de Veronese de degrés respectifs $s\|\varphi\|$ et $\|\varphi\|$. Alors, en composant ceci avec un morphisme de Segre, on obtient une immersion fermée $\iota : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ telle que $\iota^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{P}$.

Nous introduisons maintenant une première injection qui consiste à plonger $\mathcal{P}$ dans une puissance tensorielle de $\mathcal{N}$. La construction s'appuie sur le résultat suivant.

Lemme 7.1. *Le faisceau inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, -1, -1)$ possède une section globale non nulle s qui l'engendre sur G.*

Démonstration. Nous commençons par définir des monômes en les coordonnées de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}} \times \mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ obtenus en homogénéisant les ¡¡numérateurs¿¿ et ¡¡dénominateurs¿¿ des fonctions rationnelles $x^{sa}y^{-a}$ et $x^{sb}y^{-b}$ par rapport à chaque groupe de variables. Rappelons que $\|a\| = \sum_{i=1}^{g} |a_i|$ et introduisons les notations suivantes : $a^+ = \sum_{a_i>0} |a_i|$ et $a^- = \sum_{a_i<0} |a_i|$. Puis, considérons les monômes de bidegré $(s\|a\|, \|a\|)$ suivants :

$$\sigma_a = (W_0^{(1)})^{sa^-}(W_0^{(2)})^{a^+}\left(\prod_{a_i>0}(W_i^{(1)})^{s|a_i|}\right)\left(\prod_{a_i<0}(W_i^{(2)})^{|a_i|}\right)$$

et

$$\tau_a = (W_0^{(1)})^{sa^+}(W_0^{(2)})^{a^-}\left(\prod_{a_i<0}(W_i^{(1)})^{s|a_i|}\right)\left(\prod_{a_i>0}(W_i^{(2)})^{|a_i|}\right).$$

Enfin, nous définissons de même σ_b et τ_b de bidegré $(s\|b\|, \|b\|)$ en remplaçant a par b dans les expressions précédentes. Avec ces notations, nous aurons $\sigma_a/\tau_a = x^{sa}y^{-a}$ et $\sigma_b/\tau_b = x^{sb}y^{-b}$ sur $G(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors, comme on a aussi $T_1^{(1)}/T_0^{(1)} = x^{sa}y^{-a}$ et $T_1^{(2)}/T_0^{(2)} = x^{sb}y^{-b}$ sur ces points, on voit que nos monômes vérifient les relations

$$(*) \qquad T_0^{(1)}\sigma_a = T_1^{(1)}\tau_a \qquad \text{et} \qquad T_0^{(1)}\sigma_a = T_1^{(1)}\tau_a$$

sur $G(\bar{\mathbb{Q}})$, donc sur $\mathcal{X}$. Ceci nous conduit à considérer, pour tout indice $\omega \in \{0,1\}^2$, la section $s_\omega = \sigma_a^{\omega_1}\,\tau_a^{1-\omega_1}\,\sigma_b^{\omega_2}\,\tau_b^{1-\omega_2}\,(T_{\omega_1}^{(1)})^{-1}\,(T_{\omega_2}^{(2)})^{-1}$ définie sur l'ouvert $U_\omega = (\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}})^2 \times D_+(T_{\omega_1}^{(1)}) \times D_+(T_{\omega_2}^{(2)})$. Ainsi, nous obtenons une section s_ω du faisceau $\mathcal{L}$ sur chacun des ouverts U_ω d'un recouvrement de $\mathcal{X}$ et ceci se recolle en une section globale s grâce aux relations $(*)$. Il ne reste plus qu'à montrer que s engendre $\mathcal{L}$ sur G, ce qui découle simplement du fait que les coordonnées $W_0, \ldots, W_g$ ne s'annulent en aucun de ses points fermés. □

Maintenant, par intégrité du schéma $\mathcal{X}$, la section s définit une injection du faisceau structural $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ dans $\mathcal{O}_\mathcal{X}(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, -1, -1)$ qui est un isomorphisme au-dessus de G. On tensorise alors ce morphisme par le faisceau $\mathcal{P}$ pour obtenir notre injection $j_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{N}^{\otimes 2}$. Ensuite, si l'on tire en arrière les coordonnées de $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ au moyen de ι^*, on obtient simplement les monômes multihomogènes $\mathfrak{m}$ de multidegré $(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, 1, 1)$. Un tel monôme s'écrit sous la forme $\mathfrak{m} = (W^{(1)})^\alpha (W^{(2)})^\beta T_{\omega_1}^{(1)} T_{\omega_2}^{(2)}$, où les multi-indices α et β de $\mathbb{N}^{n+1}$ vérifient $|\alpha| = s\|\varphi\|$, $|\beta| = \|\varphi\|$ et où $\omega_1, \omega_2 \in \{0,1\}$. Mais alors, comme $s = s_\omega$ sur l'ouvert dense G, on en déduit que

$$j_1(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \otimes s = (W^{(1)})^\alpha (W^{(2)})^\beta \otimes \sigma_a^{\omega_1}\tau_a^{1-\omega_1}\sigma_b^{\omega_2}\tau_b^{1-\omega_2}.$$

Ainsi, $j_1(\mathfrak{m})$ est un monôme multihomogène sans coefficient de bidegré $(2s\|\varphi\|, 2\|\varphi\|)$ en les coordonnées des facteurs $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$ de $\mathbb{P}$. Ceci montre que notre injection j_1 remplit la condition requise pour appliquer l'inégalité de Vojta généralisée.

Ensuite, comme $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\mathcal{X}(0,0,1,1)$, on voit que $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$ est trivialement isomorphe à $\mathcal{N}$ par une flèche qu'on notera j_2. Maintenant, si l'on introduit l'ensemble Σ des monômes de $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$, c'est-à-dire ceux de multidegré $(s\|\varphi\|, \|\varphi\|, 0, 0)$, alors les éléments de $j_2(\Sigma) = \Sigma$ sont des monômes sans coefficient, donc la hauteur de la famille formée par ceux-ci est nulle et le choix $\delta = 0$ convient pour satisfaire aux hypothèses du théorème.

Toutes les conditions sont désormais réunies pour appliquer le théorème principal de l'article [R2]. Néanmoins, celui-ci produit une inégalité où n'apparaît pas directement la hauteur $h \circ \beta$ qui nous intéresse. Il faut donc encore faire le lien entre $h \circ \beta$ et la hauteur $h_{\mathcal{M}}$ grâce à laquelle s'énonce l'inégalité de Vojta généralisée, hauteur définie par la formule $h_{\mathcal{M}}(P) = h \circ \iota(P) - h(\Sigma(P))$, pour tout point fermé P de $\mathcal{X}$.

Remarquons déjà qu'au vu de la composition de morphismes de Segre et de Veronese utilisée pour construire l'immersion ι on a, pour tout point $P = (P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)})$ de $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{Q}})$,

$$h \circ \iota(P) = s\|\varphi\| h(P^{(1)}) + \|\varphi\| h(P^{(2)}) + h(P^{(3)}).$$

D'autre part, pour un tel point P, on a aussi

$$h(\Sigma(P)) = h(\{(P^{(1)})^{\alpha}(P^{(2)})^{\beta} \mid |\alpha| = s\|\varphi\| \text{ et } |\beta| = \|\varphi\|\}).$$

Maintenant, si notre point P provient de $(x, y, \beta_{s,\varphi}(x,y)) \in G(\bar{\mathbb{Q}})$, alors des coordonnées de $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ sont données respectivement par les familles $((W_\omega/W_0)(x))_\omega$ et $((W_\omega/W_0)(y))_\omega$. Ainsi, en toute place v d'un corps de nombres contenant toutes les coordonnées x_i et y_i, on aura

$$\begin{aligned} \max_{\alpha,\beta} |(P^{(1)})^{\alpha}(P^{(2)})^{\beta}|_v &= \left(\max_\omega \left|\frac{W_\omega}{W_0}(x)\right|_v\right)^{s\|\varphi\|} \left(\max_\omega \left|\frac{W_\omega}{W_0}(y)\right|_v\right)^{\|\varphi\|} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{g} \max(1, |x_i|_v)\right)^{s\|\varphi\|} \left(\prod_{i=1}^{g} \max(1, |y_i|_v)\right)^{\|\varphi\|}, \end{aligned}$$

car la famille des $|(W_\omega/W_0)(x)|_v$ est formée de tous les produits qu'on peut obtenir en prenant un facteur dans la paire $\{1, |x_i|_v\}$ pour $i = 1, \dots, g$. Par suite, $h(\Sigma(P)) = s\|\varphi\| h(x) + \|\varphi\| h(y)$, de sorte que $h_{\mathcal{M}}(x,y) = h(\varphi(x)^s \varphi(y)^{-1})$. Ceci nous mène à l'inégalité de Vojta uniforme annoncée qui s'énonce de la façon suivante.

Théorème 7.2. *Soit C une courbe transverse tracée sur le tore A dont l'adhérence dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ est lisse. Alors, il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour tous points $x, y \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ satisfaisant $|x|, |y| \geq c_3$, tout entier $s \geq c_2$ et tout morphisme $\varphi \in \Phi$, on ait*

$$|\varphi(x)^s \, \varphi(y)^{-1}| \geq \frac{\|\varphi\|}{c_1}(s|x| + |y|).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Vojta généralisée [R2, thm. 1.2] en y choisissant $a = (s\|\varphi\|, \|\varphi\|)$, $\omega = 0$ et $\theta = 1/c$, où la constante c est donnée par le théorème 3.1. □

8 Majoration de la hauteur des points

Dans cette partie, nous démontrons qu'étant donnée une courbe transverse tracée sur le tore A, pour tout réel $\epsilon > 0$ assez petit, la hauteur des points est bornée sur les ensembles $E(C, \Gamma_\epsilon)$, pour tout sous-groupe de rang fini Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Commençons par un lemme préparatoire qui va nous permettre de remplacer Γ par un groupe Γ' saturé pour la divisibilité, au sens où tout point du tore dont l'une des puissances est dans Γ' appartient lui aussi à Γ'. En particulier, Γ' contiendra tous les points de torsion du tore.

Lemme 8.1. *Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors il existe des nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ multiplicativement indépendants dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ tel que le sous-groupe Γ_0 de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ défini comme l'ensemble des nombres x dont l'une des puissances appartient à $< \gamma_1, \ldots, \gamma_r >$ vérifie $\Gamma \subset (\Gamma_0)^g$.*

Démonstration. D'abord, quitte à agrandir un peu Γ, on peut supposer qu'il est stable par permutation des coordonnées du tore. En effet, si ce n'est pas déjà le cas, on lui substitue le sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ engendré par les $\{\sigma\Gamma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_g\}$ qui est encore de rang fini. Ainsi, la projection de Γ sur les différents facteurs de A est, à chaque fois, un même sous-groupe de rang fini H de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. Fixons maintenant une base $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ de $H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ provenant de H. Alors, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ sont multiplicativement indépendants et le groupe Γ_0 formé des nombres $x \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$ dont l'une des puissances appartient à $< \gamma_1, \ldots, \gamma_r >$ vérifie bien $\Gamma \subset (\Gamma_0)^g$. □

Le résultat suivant montre que la famille Φ est suffisament grande pour que tout point fermé P appartenant à un sous-tore de codimension 2 vérifie $\varphi(P) = 1$, pour un $\varphi \in \Phi$. Il nous permettra, d'autre part, de contrôler la hauteur lorsqu'on applique un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ à un point de $A(\bar{\mathbb{Q}})$.

Lemme 8.2. *(i) Pour tout sous-groupe algébrique B du tore avec $\mathrm{codim}(B) \geq 2$, il existe un élément φ de Φ dont le noyau contient B.*

(ii) Pour tout point x de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout morphisme de groupes algébriques $\varphi : A \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$, on a

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\||x|.$$

Démonstration. La première assertion est immédiate. En effet, l'hypothèse de codimension implique l'existence de deux vecteurs indépendants a et b de $\mathbb{Z}^g$ tels que $x^a = x^b = 1$ sur B. On remplace d'abord b par $\langle a, a\rangle b - \langle a, b\rangle a$ pour se ramener au cas où a et b sont orthogonaux. Il suffit alors de remplacer le couple (a, b) par $(\|b\|a, \|a\|b)$ pour s'assurer que le morphisme associé appartient bien à la famille Φ. Pour la seconde assertion, on a déjà :

$$|\varphi(x)| = h(1 : x_1^{a_1} \ldots x_g^{a_g}) + h(1 : x_1^{b_1} \ldots x_g^{b_g}) \leq \sum_{i=1}^{g} h(1 : x_i^{a_i}) + h(1 : x_i^{b_i}),$$

grâce à l'inégalité triangulaire satisfaite par $h(1 : x)$ sur $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. En utilisant ensuite le fait que $h(1 : x^n) = |n|h(1 : x)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que :

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^{g} (|a_i| + |b_i|)h(1 : x_i) \leq \|\varphi\||x|$$

□

Nous combinons maintenant les lemmes précédents pour simplifier le problème en imposant une condition supplémentaire sur les points de $E(C,\Gamma_\epsilon)$. Précisément, il suffira, pour un certain $\epsilon > 0$ fixé, de borner la hauteur sur les ensembles suivants

$$F(C,\Gamma_\epsilon) = C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\mathrm{codim}(B)=2} \{\gamma P \mid \gamma \in \Gamma_\epsilon,\ P \in B \text{ et } \max(|\gamma|,|P|) \le 4g|\gamma P|\},$$

où l'union porte sur les sous-tores satisfaisant la condition de codimension. Là encore, nous écrirons parfois $F(\Gamma_\epsilon)$ pour simplifier les notations.

Proposition 8.3. *Soit C une courbe tracée sur le tore A. Supposons donné un sous-groupe de rang fini Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors, on peut en choisir un autre Γ' en sorte que $E(C,\Gamma_\epsilon)$ soit contenu dans $F(C,\Gamma'_{3g\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$.*

Démonstration. D'après le lemme 8.1, Γ est contenu dans $\Gamma' = (\Gamma_0)^g$ pour un sous-groupe de rang fini Γ_0 de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ saturé pour la divisibilité et nous montrons qu'alors $E(\Gamma_\epsilon) \subset F(\Gamma'_{3g\epsilon})$.

D'abord, si un point x nous est donné dans $E(\Gamma_\epsilon)$, il se décompose $x = \gamma P$ pour un $\gamma \in \Gamma_\epsilon$ et un point P appartenant à un sous-tore B de codimension 2. Ensuite, on dispose d'un morphisme $\varphi : A \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ tel que $B = \mathrm{Ker}(\varphi)$ que nous représentons par une matrice à coefficients entiers $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_g \\ b_1 & \dots & b_g \end{pmatrix}$. Alors, comme les lignes de cette matrice sont indépendantes, la méthode du pivot de Gauss montre que, quitte à permuter les coordonnées du tore, il existe un entier positif a ainsi qu'une matrice M dans $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ telle que

$$M \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_g \\ b_1 & \dots & b_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & a'_3 & \dots & a'_g \\ 0 & a & b'_3 & \dots & b'_g \end{pmatrix},$$

avec $|a'_i| \le 2a$ et $|b'_i| \le a$ pour tout indice i.

Appelons de nouveau φ le morphisme donné par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & a'_3 & \dots & a'_g \\ 0 & a & b'_3 & \dots & b'_g \end{pmatrix}$. Alors, $\|\varphi\| \le 3g|a|$ et l'on a toujours $B \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Enfin appelons $\psi \in \mathrm{End}(A)$ la composée

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \xrightarrow{\imath} A$$

où $\imath(x,y) = (x,y,1,\dots,1)$ sur les points fermés ; notons que $\varphi \circ \psi = \varphi^a$ et $\|\psi\| \le 3g|a|$.

Décomposons maintenant γ sous la forme yz pour un point $y \in \Gamma$ et un point fermé z de A satisfaisant $|z| \le \epsilon$. Alors $\psi(y) \in \Gamma'$, donc, par divisibilité de ce groupe, il existe un y' dans Γ' avec $y'^{\,a} = \psi(y)$. Il existe aussi un point fermé z' de A avec $z'^{\,a} = \psi(z)$, donc $|a||z'| \le 3g|a||z|$ de sorte que $|z'| \le 3g\epsilon$. Ainsi, nous avons construit un point $\gamma' = y'\,z'$ de $\Gamma'_{3g\epsilon}$ tel que $\gamma'^{\,a} = \psi(\gamma)$ et le point $P' = x\,\gamma'^{\,-1}$ vérifie donc

$$\begin{aligned} \varphi(P'^{\,a}) &= \varphi(\gamma^a)\,\varphi(\gamma'^{\,a})^{-1} \\ &= \varphi^a(\gamma)\,\varphi\circ\psi(\gamma)^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

P' appartient donc à $\mathrm{Ker}(\varphi)A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ et, quitte à diviser P' par un point de torsion ζ et multiplier y' par ce dernier, on voit que $x = \gamma'\,P'$ où P' est un point fermé de B.

De plus, comme Γ' contient toute la torsion de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, on a toujours $y' \in \Gamma'$ et, comme la hauteur des points ne dépend que de leur classe modulo $A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$, la modification précédente n'affecte pas le calcul suivant :

$$|a||\gamma'| = |\psi(\gamma)| = |\psi(x)| \leq \|\psi\||x| \leq 3g|a||x|.$$

Ainsi, $|\gamma'| \leq 3g|x|$ et, pour conclure,

$$|P'| \leq |x| + |\gamma'| \leq (1+3g)|x| \leq 4g|x|.$$

□

On passe maintenant à un lemme d'extraction qui va nous permettre de rendre proches, au sens d'une distance ¡¡angulaire¿¿, les termes d'une suite à valeurs dans Φ ou bien Γ_ϵ.

Lemme 8.4. *(i) De toute suite d'éléments non nuls de* $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2)$ *on peut extraire une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques* φ *et* ψ *vérifient*

$$\|\varphi^{\frac{1}{\|\varphi\|}}\,\psi^{-\frac{1}{\|\psi\|}}\| \leq \frac{1}{8gc_1}\,.$$

(ii) De même, si $\epsilon \leq \frac{2^{-7}}{gc_1}$*, on peut extraire de toute suite d'éléments de* $\{\gamma \in \Gamma_\epsilon \mid |\gamma| \geq 1\}$ *une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques* γ *et* γ' *vérifient*

$$|\gamma^{\frac{1}{|\gamma|}}\,\gamma'^{-\frac{1}{|\gamma'|}}| \leq \frac{1}{16gc_1}\,.$$

Démonstration. Dans le premier cas, comme l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2) \otimes \mathbb{R}$ est de dimension finie, sa sphère unité est compacte. En recouvrant cette dernière par un nombre fini de boules de diamètre $\frac{1}{8gc_1}$, on voit qu'une infinité de termes de la suite obtenue en projetant radialement sur la sphère font partie d'une même boule, ce qui permet l'extraction annoncée. Dans le second cas, l'extraction se légitime par une application de [R1, lemme 2.1(2)] qui montre que $\{\gamma \in \Gamma_\epsilon \mid |\gamma| \geq 1\}$ se partitionne en un nombre fini d'ensembles dans lesquels deux points quelconques γ et γ' satisfont $|\gamma^{\frac{1}{|\gamma|}}\,\gamma'^{-\frac{1}{|\gamma'|}}| \leq \frac{1}{16gc_1}$. □

Voici maintenant le résultat final de cette partie.

Théorème 8.5. *Soit* C *une courbe transverse tracée sur le tore* A *dont l'adhérence dans* $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ *est lisse. Si l'on se donne un réel* $\epsilon \leq \frac{2^{-7}}{3g^2c_1}$ *strictement positif, alors l'ensemble* $E(C, \Gamma_\epsilon)$ *est de hauteur bornée, pour tout sous-groupe de rang fini* Γ *de* $A(\bar{\mathbb{Q}})$.

Démonstration. D'abord, le lemme 8.3 montre qu'il suffit de borner la hauteur sur l'ensemble $F(\Gamma_\epsilon)$ pour $\epsilon \leq \frac{2^{-7}}{gc_1}$. On raisonne alors par l'absurde en supposant l'existence d'une suite de points $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C(\bar{\mathbb{Q}})$ dont la hauteur tend vers l'infini et qui se décomposent $x_i = \gamma_i P_i$ avec $\gamma_i \in \Gamma_\epsilon$, $\varphi_i(P_i) = 1$ pour un morphisme $\varphi_i \in \Phi$ et $\max(|\gamma_i|, |P_i|) \leq 4g|x_i|$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ensuite, comme $|x_i|$ tend vers l'infini, on peut supposer $|x_i| \geq c_3$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Enfin, le point (i) du lemme d'extraction montre que, quitte à prendre une sous-suite, on aura pour tout couple d'entiers (i,j),

$$\|\varphi_i^{\frac{1}{\|\varphi_i\|}}\, \varphi_j^{-\frac{1}{\|\varphi_j\|}}\| \leq \frac{1}{8gc_1}.$$

On fixe ensuite un entier $s \geq c_2$ ainsi qu'un couple d'entiers (i,j) tel que $|\gamma_i^s\, \gamma_j^{-1}| \leq \frac{1}{2c_1} s|x_i|$. Ce choix se légitime de la façon suivante.

Si jamais la suite des $|\gamma_i|$ est bornée par un nombre T, alors on choisit $s \geq c_2$ quelconque ainsi qu'un entier i suffisament grand pour que $|x_i| \geq 2c_1 T$ et le couple (i,i) convient car

$$|\gamma_i^s\, \gamma_i^{-1}| = (s-1)|\gamma_i| \leq sT \leq \frac{1}{2c_1} s|x_i|.$$

Sinon, la suite des $|\gamma_i|$ n'est pas bornée et l'on peut supposer que $|\gamma_i| \geq 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La condition $\epsilon \leq \frac{2^{-7}}{gc_1}$ permet alors d'appliquer le point (ii) du lemme d'extraction de sorte que, quitte à prendre de nouveau une sous-suite, on peut supposer que $|\gamma_i^{\frac{1}{|\gamma_i|}}\, \gamma_j^{-\frac{1}{|\gamma_j|}}| \leq \frac{1}{16gc_1}$, pour tout couple d'entiers (i,j). D'autre part, en fixant $i \in \mathbb{N}$ quelconque, on peut trouver $j \in \mathbb{N}$ tel que $|\gamma_j| \geq (1 + \max(c_2, 8gc_1))|\gamma_i|$. Enfin, si s désigne l'entier le plus proche de $\frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|}$, alors $s \geq \max(c_2, 8gc_1)$ et il vient :

$$|\gamma_i^s\, \gamma_j^{-1}| = \left|(\gamma_i^{\frac{1}{|\gamma_i|}}\, \gamma_j^{-\frac{1}{|\gamma_j|}})^{s|\gamma_i|}\, (\gamma_j^{\frac{1}{|\gamma_j|}})^{|\gamma_i|(s-\frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|})}\right| \leq s|\gamma_i|(\frac{1}{16gc_1} + \frac{1}{2s}) \leq \frac{1}{2c_1} s|x_i|.$$

Ceci étant, l'inégalité $\|\varphi_i^{\frac{1}{\|\varphi_i\|}}\, \varphi_j^{-\frac{1}{\|\varphi_j\|}}\| \leq \frac{1}{8gc_1}$ entraîne que $\|\varphi_i^{\|\varphi_j\|}\, \varphi_j^{-\|\varphi_i\|}\| \leq \frac{\|\varphi_i\|\|\varphi_j\|}{8gc_1}$, donc, quitte à remplacer φ_i et φ_j par l'une de leur puissances, on peut supposer que $\|\varphi_i\, \varphi_j^{-1}\| \leq \frac{\|\varphi_i\|}{8gc_1}$. La contradiction cherchée résulte alors du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
|\varphi_i(x_i)^s \varphi_i(x_j)^{-1}| &= |\varphi_i(\gamma_i^s\, \gamma_j^{-1})\varphi_i(P_j)^{-1}| \\
&= |\varphi_i(\gamma_i^s\, \gamma_j^{-1})(\varphi_j\, \varphi_i^{-1})(P_j)| \\
&\leq \|\varphi_i\||\gamma_i^s\, \gamma_j^{-1}| + \|\varphi_j\, \varphi_i^{-1}\||P_j| \\
&\leq \|\varphi_i\|(\frac{1}{2c_1} s|x_i| + \frac{1}{8gc_1}|P_j|) \\
&\leq \frac{\|\varphi_i\|}{2c_1}(s|x_i| + |x_j|)
\end{aligned}$$

et ceci contredit clairement notre inégalité de Vojta uniforme 7.2. □

9 Réduction au cas non singulier

Dans cette partie, notre objectif est d'établir le résultat suivant qui permet de se ramener au cas d'une courbe satisfaisant notre hypothèse de lissité pour démontrer la finitude des ensembles $E(C, \Gamma_\epsilon)$.

Théorème 9.1. *Soient C une courbe transverse tracée sur A, Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\epsilon > 0$ un réel. Alors il existe une courbe transverse C', tracée sur un tore $A' = \mathbb{G}_m^d$ de dimension $d \geq g$, dont l'adhérence dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^d$ est lisse et qui vérifie la condition suivante. Notons $p : A' \to A$ la projection sur les g premiers facteurs du tore et Γ' le sous-groupe de rang fini de $A'(\bar{\mathbb{Q}})$ donné par $\Gamma' = \Gamma \times \{1\}^{d-g}$; alors l'ensemble $p(E(C', \Gamma'_\epsilon))$ contient $E(C, \Gamma_\epsilon)$ à l'exception possible d'un nombre fini de points .*

Considérons la normalisée $\pi : X' \to X$ et le morphisme $f : X' \to X \hookrightarrow (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$. Pour obtenir le théorème 9.1, nous allons construire une immersion fermée F de X' dans une puissance $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^d$ en ajoutant successivement des composantes $f_i : X' \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ au morphisme f. Dans cette perspective, nous utiliserons la proposition [H, II 7.3] qui nous donne un critère pour que le morphisme $F = (f_1, \ldots, f_d)$ soit une immersion fermée en termes des faisceaux $f_i^*\mathcal{O}(1)$ et de leurs sections globales $f_i^*T_0$ et $f_i^*T_1$. Soient $\mathcal{N}$ le faisceau inversible $\bigotimes_{i=1}^d f_i^*\mathcal{O}(1)$ et V le sous-$\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel de $\Gamma(X', \mathcal{N})$ engendré par les tenseurs $\bigotimes_{i=1}^d f_i^*T_{\beta_i}$, où $\beta \in \{0,1\}^d$. Alors, pour que F soit une immersion fermée, il suffit que V sépare les points et les vecteurs tangents.

Enfin, pour s'assurer que, dans le plongement ainsi obtenu, l'intersection de X' avec le tore multiplicatif soit transverse, il suffit d'imposer à chaque étape l'indépendance multiplicative des fonctions rationnelles $\alpha_i = f_i^*T_1/f_i^*T_0$ modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. Pour simplifier l'énoncé du lemme ci-dessous, introduisons la notion suivante.

Définition 9.1. Soient Y une courbe sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une suite d'éléments de $K(Y)^\times$ multiplicativement indépendants modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur Y et qu'on se donne un couple (s,t) de sections globales non nulles de $\mathcal{L}$, alors nous dirons que (s,t) est *α-transverse* si la famille $(s/t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est encore multiplicativement indépendante modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$.

Soit maintenant U l'ouvert des points réguliers de X et U' son image réciproque dans la normalisée ; alors π induit un isomorphisme $U' \to U$. Considérons un couple (P,Q) de points de X' tel que $f(P) = f(Q)$. Si l'une des composantes appartient à U', alors l'autre aussi et $P = Q$. Aussi, en posant $E = X' \setminus U'$ et en supposant que notre couple (P,Q) satisfait à la fois $f(P) = f(Q)$ et $P \neq Q$, on voit qu'il appartient nécessairement à l'ensemble $E \times E$; il n'y a donc qu'un nombre fini $(P_1,Q_1), \ldots, (P_k,Q_k)$ de tels couples. De même, en posant $Z = (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$, il n'existe qu'un nombre fini de points $x = R_1, \ldots, R_l$ sur X' où le morphisme $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Z,f(x)} \to \mathcal{O}_{X',x}$ n'est pas surjectif, car un tel point appartient nécessairement à l'ensemble E.

Lemme 9.2. *Si Y est une courbe projective non singulière sur $\bar{\mathbb{Q}}$, elle possède un faisceau inversible $\mathcal{L}$ satisfaisant les conditions suivantes. Si l'on fixe une suite $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ d'éléments de $K(Y)^\times$ multiplicativement indépendants modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, alors on a :*

(i) Pour tous points fermés $P \neq Q$ de Y, il existe un couple α-transverse (s,t) de sections globales de $\mathcal{L}$ qui l'engendre sur Y et tel que s sépare les points P et Q.

(ii) Pour tout point fermé R de Y, il existe un couple α-transverse (s,t) de sections globales de $\mathcal{L}$ qui l'engendre sur Y et tel que s sépare les vecteurs tangents au point R.

Démonstration. Soient $P \neq Q$ deux points fermés de Y et P' un point fermé de Y qui n'appartient pas à l'ensemble $\{Q\} \cup (\bigcup_{i=1}^n |\mathrm{div}(\alpha_i)|)$. Fixons ensuite un plongement $\imath$ de Y dans un espace projectif $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Alors, comme les points $\imath(P) = (x_0 : \ldots : x_N)$ et $\imath(P') = (y_0 : \ldots : y_N)$ sont différents de $\imath(Q) = (z_0 : \ldots : z_N)$, on a $z_i x_j - z_j x_i \neq 0$ et $z_k y_l - z_l y_k \neq 0$ pour certains indices i, j, k et l. Dans ces conditions, le polynôme homogène de degré 2

$$F(X) = (x_j X_i - x_i X_j)(y_l X_k - y_k X_l)$$

s'annule aux points $\imath(P)$ et $\imath(P')$, mais pas au point $\imath(Q)$. Ainsi, la section globale $s = \imath^* F$ du faisceau inversible très ample $\mathcal{L} = \imath^*\mathcal{O}(2)$ s'annule au point P' et sépare les points P et Q. Ensuite, en notant $x_1, \ldots, x_r$ les zéros de s et V le $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $\Gamma(Y, \mathcal{L})$ puis en introduisant les morphismes $h_i : V \to \mathcal{L}_{x_i}/\mathfrak{m}_{x_i}\mathcal{L}_{x_i}$, l'ensemble $V \setminus \bigcup_{i=1}^r \mathrm{Ker}(h_i)$ est non vide. En effet, $\mathcal{L}$ est engendré par ses sections globales, donc $\mathrm{Ker}(h_i)$ est un sous-$\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel propre de V, pour $i = 1, \ldots, r$, et $V \neq \bigcup_{i=1}^r \mathrm{Ker}(h_i)$ car $\bar{\mathbb{Q}}$ est infini. Fixons finalement une section t dans $V \setminus \bigcup_{i=1}^r \mathrm{Ker}(h_i)$. Alors, le couple (s, t) engendre le faisceau $\mathcal{L}$ sur Y et il ne reste plus qu'à vérifier que ce couple est α-transverse. Notons d'abord que le point P' a été choisi en sorte que $\mathrm{ord}_{P'}(\alpha_i) = 0$, pour $i = 1, \ldots, n$, et $\mathrm{ord}_{P'}(s/t) > 0$, par construction du couple (s, t). Maintenant, supposons donnée une relation $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}(s/t)^{k_{n+1}} = \lambda$ pour un nombre algébrique non nul λ. Alors l'ordre d'annulation de la fonction rationnelle $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}(s/t)^{k_{n+1}}$ est nul en chaque point de Y, ce qui force $k_{n+1} = 0$ car

$$\mathrm{ord}_{P'}(\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}(s/t)^{k_{n+1}}) = k_{n+1}\mathrm{ord}_{P'}(s/t).$$

Ainsi, $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} = \lambda$ et ceci entraîne $k_1 = \ldots = k_n = 0$ grâce à l'hypothèse faite sur la suite α.

On passe ensuite à la démonstration de (ii). Posons $\mathcal{L}' = \imath^*\mathcal{O}(1)$; par non-singularité de Y, le $\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}_x\mathcal{L}'_x/\mathfrak{m}_x^2\mathcal{L}'_x$ est de dimension 1 en chaque point x. De plus, d'après la proposition [H, II 7.3], comme $\mathcal{L}'$ est très ample sur Y, l'ensemble W des sections globales de $\mathcal{L}'$ sépare les vecteurs tangents en chacun des points de Y, donc en particulier au point R. Par suite, il existe un élément σ de W dont la fibre engendre l'espace $\mathfrak{m}_x\mathcal{L}'_x/\mathfrak{m}_x^2\mathcal{L}'_x$ au point $x = R$. D'autre part, en fixant un point P qui n'appartient pas à l'ensemble $\{R\} \cup (\bigcup_{i=1}^n |\mathrm{div}(\alpha_i)|)$, alors, comme W sépare les points de Y, il existe une section globale σ' de $\mathcal{L}'$ qui s'annule au point P mais pas au point R. Dans ces conditions, appelons s la section globale de $\mathcal{L} = \mathcal{L}'^{\otimes 2}$ associée au tenseur $\sigma \otimes \sigma'$. Comme le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est très ample, il possède une section globale t telle que (s, t) l'engendre sur Y et on vérifie comme précédemment que le couple (s, t) est α-transverse. □

En appliquant successivement l'assertion (i) du lemme précédent à chacun des couples (P_i, Q_i), on obtient une suite de morphismes $f_{g+1}, \ldots, f_{g+k} : X' \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ dont chaque terme f_{g+i} est défini par un couple (s_i, t_i) de sections globales de $\mathcal{L}$ telles que s_i sépare les points P_i et Q_i et telles que la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{g+k})$ définie par $\alpha_i = f_i^*T_1/f_i^*T_0$ est multiplicativement indépendante modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$.

De même, en posant $d = g+k+l$, l'assertion (ii) du lemme précédent nous donne par récurrence une suite de morphismes $f_{g+k+1}, \ldots, f_d : X' \to \mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}$ définis par des couples

(s_{k+i}, t_{k+i}) de sections globales de $\mathcal{L}$ telles que s_{k+i} sépare les vecteurs tangents au point R_i, pour $i = 1, \ldots, l$, et telles que la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, obtenue en posant de nouveau $\alpha_i = f_i^* T_1 / f_i^* T_0$, est multiplicativement indépendante modulo $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. Enfin, considérons le morphisme $F = (f_1, \ldots, f_d)$ de X vers $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^d$.

Proposition 9.3. *Le morphisme F est une immersion fermée dans laquelle $C' = F(X') \cap \mathbb{G}_\mathrm{m}^d$ est une courbe transverse et $p \circ F(X') = X$, en notant p la projection $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^d \to (\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ sur les g premiers facteurs.*

Démonstration. On considère le faisceau inversible $\mathcal{N} = \bigotimes_{i=1}^d f_i^* \mathcal{O}(1)$ ainsi que le sous-$\bar{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel V de $\Gamma(X', \mathcal{N})$ engendré par les tenseurs $\bigotimes_{i=1}^d f_i^* T_{\beta_i}$, où $\beta \in \{0,1\}^d$. Vérifions que V sépare les points et les vecteurs tangents. Soient $P \neq Q$ deux points fermés de X' ; alors ou bien ces points sont séparés par le morphisme f, ou bien $(P, Q) = (P_i, Q_i)$ pour un certain indice $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dans le premier cas, il existe une combinaison $\bar{\mathbb{Q}}$-linéaire σ des tenseurs $\{\bigotimes_{i=1}^g f_i^* T_{\beta_i} \mid \beta \in \{0,1\}^g\}$ qui, par exemple, s'annule au point P mais pas au point Q. Fixons ensuite un indice $i > g$; comme le faisceau inversible $f_i^* \mathcal{O}(1)$ est engendré par le couple $(f_i^* T_0, f_i^* T_1)$, il existe $\beta_i \in \{0,1\}$ tel que $f_i^* T_{\beta_i}$ ne s'annule pas au point Q. Alors le tenseur $\sigma \otimes \left(\bigotimes_{i=g+1}^d f_i^* T_{\beta_i} \right)$ donne un élément de V qui sépare les points P et Q. Dans le second cas, si l'on a $(P, Q) = (P_i, Q_i)$, alors $s_i = f_{g+i}^* T_0$ sépare nos points ; disons par exemple que s_i s'annule en P mais pas en Q. Comme précédemment, pour chaque indice $j \neq g + i$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$, on fixe un indice $\beta_j \in \{0,1\}$ tel que $f_j^* T_{\beta_j}$ ne s'annule pas au point Q et le tenseur $s_i \otimes \left(\bigotimes_{j \neq g+i} f_j^* T_{\beta_j} \right)$ est un élément de V qui sépare nos points.

On montre de la même manière que V sépare les vecteurs tangents et F est bien une immersion fermée. Enfin, C' est une courbe transverse car les coordonnées affines $f_i^* T_1 / f_i^* T_0$ de $\mathbb{G}_\mathrm{m}^d$ sont multiplicativement indépendantes dans $K(C')^\times / \bar{\mathbb{Q}}^\times$ et la dernière assertion résulte simplement du fait que $p \circ F = f$. □

Finalement, nous posons $A' = \mathbb{G}_\mathrm{m}^d$ et remarquons que la relation $p \circ F(X') = X$ entraîne clairement $p(C') \subset C$. Ainsi, la projection p induit un morphisme $C' \to C$ dont l'image est une partie constructible de C ; elle est même dense dans C car C' est transverse. Enfin, une partie constructible dense d'une courbe est ouverte, donc $C \backslash p(C')$ est réduit à un nombre fini de points. Pour conclure la preuve du théorème 9.1, il ne reste plus qu'à montrer que $p(E(C', \Gamma'_\epsilon))$ contient $E(C, \Gamma_\epsilon)$ à l'exception possible d'un nombre fini de points, pour Γ sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\epsilon > 0$ donnés. Il suffit donc de montrer que $E(C, \Gamma_\epsilon) \cap p(C')$ est contenu dans $p(E(C', \Gamma'_\epsilon))$. Soit x un point de $E(C, \Gamma_\epsilon) \cap p(C')$ qu'on décompose sous la forme $x = \gamma P$, où γ est un point de Γ_ϵ et P appartient à un sous-tore B de codimension 2. Il existe un point fermé x' de C' qui se projette sur x, autrement dit $x' = (x_1, \ldots, x_g, x'_{g+1}, \ldots, x'_d)$. Considérons maintenant les points $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g, 1, \ldots, 1)$ et $P' = (P_1, \ldots, P_g, x'_{g+1}, \ldots, x'_d)$ de $A'(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors $x' = \gamma' P'$ et, de manière évidente, γ' appartient à Γ'_ϵ. De plus, P' appartient à $B' = B \times \mathbb{G}_\mathrm{m}^{d-g}$ et ce dernier est un sous-tore de A' de codimension 2. Ainsi, x' appartient à l'ensemble $E(C', \Gamma'_\epsilon)$, de sorte que $x = p(x')$ appartient bien à $p(E(C', \Gamma'_\epsilon))$ et ceci termine la preuve du théorème 9.1.

10 Finitude des ensembles $E(C, \Gamma_\epsilon)$

Nous commençons par donner la démonstration du théorème 1.5 annoncé dans notre introduction. Puis, nous en déduirons que la conjecture de Zilber-Pink est vraie pour les courbes tracées sur un tore (conjecture A de Bombieri, Masser et Zannier). Citons d'abord le résultat de Philipp Habegger sur lequel s'appuie notre preuve.

Lemme 10.1. *Soit C une courbe transverse tracée sur le tore A. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_\epsilon$ soit fini. De plus, on peut choisir ϵ en sorte qu'il ne dépende que de la dimension g du tore, du degré de la courbe C et de sa hauteur.*

En particulier, si l'on considère une famille de courbes transverses $(C_i)_{i\in I}$ tracées sur A dont les degrés et hauteurs sont bornés, alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $C_i(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_\epsilon$ soit fini pour tout $i \in I$. Cette uniformité se révèle cruciale pour la démonstration du résultat principal de cet article dont nous rappelons maintenant l'énoncé.

Théorème 10.2. *Soit C une courbe transverse tracée sur le tore A. Si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $E(C, \Gamma_\epsilon)$ est fini.*

Démonstration. Remarquons déjà qu'il nous suffit de traiter le cas d'une courbe dont l'adhérence dans $(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}})^g$ est lisse. En effet, le théorème 9.1 fournit à partir de C une courbe C' vérifiant cette hypothèse et, avec les notations de son énoncé, $p(E(C', \Gamma'_\epsilon))$ contient $E(C, \Gamma_\epsilon)$ à l'exception possible d'un nombre fini de points, donc si $E(C', \Gamma'_\epsilon)$ est fini, il en est de même de $E(C, \Gamma_\epsilon)$. Nous nous plaçons donc sous cette hypothèse et commençons par appliquer la proposition 8.3 qui montre l'existence d'un sous-groupe de rang fini Γ' de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $E(\Gamma_\epsilon) \subset F(\Gamma'_{3g\epsilon})$. On peut donc désormais se contenter de démontrer qu'il existe, pour toute donnée Γ, un $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $F(\Gamma_\epsilon)$ soit fini. Choisissons maintenant un réel $0 < \delta < 1$ assez petit pour que la hauteur soit bornée sur l'ensemble $E(\Gamma_\delta)$, réel dont l'existence est assurée par le théorème 8.5, et fixons un nombre $B > 0$ tel que $|x| \le B$ pour tous les points x de $E(\Gamma_\delta)$. Introduisons ensuite, pour tout réel $\epsilon > 0$, la partie S^ϵ de Γ formée des points γ pour lesquels existe un point P_γ de $\mathcal{H}_\epsilon$ tel que γP_γ appartienne à $C(\bar{\mathbb{Q}})$ avec la condition $|\gamma| \le 4g|\gamma P_\gamma| + \epsilon$. Notons que, par construction, l'ensemble $F(\Gamma_\epsilon)$ est contenu dans $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap S^\epsilon \mathcal{H}_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Maintenant, si un point γ nous est donné dans S^δ, alors γP_γ appartient à $E(\Gamma_\delta)$, de sorte que $|\gamma| \le 4gB + 1$. Ainsi, la hauteur est bornée sur S^δ, donc le degré et la hauteur des courbes de la famille $(\gamma^{-1}C)_{\gamma\in S^\delta}$ sont bornés. Par le lemme 10.1 de Habegger, il existe donc un réel $0 < \epsilon < \delta$ tel que les ensembles $\gamma^{-1}C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_{2\epsilon}$ soient finis pour tout point $\gamma \in S^\delta$. De plus, comme $S^\epsilon \subset S^\delta$, la hauteur est encore bornée sur S^ϵ, donc son image dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, |\cdot|)$ est relativement compacte. Par suite, il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ dans S^ϵ tels que

$$S^\epsilon \subset \bigcup_{i=1}^r \{\gamma_i\}_\epsilon.$$

Dans ces conditions, $F(\Gamma_\epsilon)$ est contenu dans l'ensemble

$$C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{i=1}^r \{\gamma_i\}_\epsilon \mathcal{H}_\epsilon = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i \left((\gamma_i^{-1}C)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}_{2\epsilon}\right)$$

et ce dernier est fini grâce au choix du nombre ϵ. □

Soient maintenant C une courbe transverse et $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$ des nombres multiplicativement indépendants. Nous associerons à ces données le sous-groupe Γ_0 de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ défini comme l'ensemble des nombres x dont l'une des puissances appartient à $< \gamma_1, \ldots, \gamma_r >$, ainsi que $\Gamma = (\Gamma_0)^g$. Alors, Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ qui est saturé pour la divisibilité. Pour finir, définissons $C' = C \times \{\gamma_1\} \times \ldots \times \{\gamma_r\}$, courbe isomorphe à C tracée sur le tore multiplicatif $A' = \mathbb{G}_\mathrm{m}^{g+r}$. Le résultat suivant s'obtient en reformulant multiplicativement les arguments de Rémond et Viada. Comme ceci ne réserve aucune surprise, nous renvoyons le lecteur curieux à la proposition 4.2 de l'article [RV] et sa démonstration (voir aussi la démonstration du théorème 5.5. de [P]).

Proposition 10.3. *L'isomorphisme entre les courbes C et C' induit une bijection entre les ensembles $E(C, \Gamma)$ et $C'(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$.*

Tous les ingrédients sont maintenant réunis pour démontrer la conjecture de Zilber-Pink dans le cas des courbes tracées sur un tore. Rappelons-en d'abord l'énoncé.

Théorème 10.4. *Soit C une courbe faiblement transverse tracée sur le tore A. Alors l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$ est fini.*

Démonstration. Remarquons d'abord que le cas d'une courbe satisfaisant l'hypothèse forte de transversalité se déduit du théorème 10.2 en y choisissant $\Gamma = A(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$ et $\epsilon = 0$. On peut donc supposer que C est contenue dans le translaté d'un sous-tore propre de A. Soit B un tel sous-tore de dimension d minimale. Alors, il existe un automorphisme de A qui envoit B sur $\mathbb{G}_\mathrm{m}^d \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$. Ainsi, en notant $A' = \mathbb{G}_\mathrm{m}^d$, on peut supposer que C est contenue dans $A' \times \{\gamma_1\} \times \ldots \times \{\gamma_r\}$, pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$. Dans ces conditions, les nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ doivent être multiplicativement indépendants, sans quoi C serait contenue dans un sous-groupe algébrique propre de A. Ensuite, si C' désigne la courbe tracée sur A' telle que $C = C' \times \{\gamma_1\} \times \ldots \times \{\gamma_r\}$, alors C' satisfait l'hypothèse forte de transversalité par minimalité de d. Ainsi, en introduisant le groupe Γ associé aux nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ comme plus haut, l'ensemble $E(C', \Gamma)$ est fini, par application du théorème 10.2 avec $\epsilon = 0$. Enfin, la proposition 10.3 montre que $E(C', \Gamma)$ est en bijection avec $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \mathcal{H}$, ce qui montre que ce dernier ensemble est fini. □

Références

[BMZ1] E. Bombieri, D. W. Masser et U. Zannier, Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups, Internat. Math. Res. Notices 20 (1999), 1119–1140.

[BMZ2] E. Bombieri, D. W. Masser et U. Zannier, Finiteness results for multiplicatively dependent points on complex curves, Michigan Math. J. 51 (2003), 451–466.

[BMZ3] E. Bombieri, D. W. Masser et U. Zannier, Intersecting curves and algebraic subgroups : conjectures and more results, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 2247–2257.

[BMZ4] E. Bombieri, D. W. Masser et U. Zannier, Anomalous subvarieties - structure theorems and applications, (2006), prépublication.

[F] W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1984.

[H] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[M] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press, 1986.

[P] R. Pink, A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang (2005), prépublication.

[R1] G. Rémond, Sur les sous-variétés des tores, Comp. Math. 134 (2002), 337–366.

[R2] G. Rémond, Inégalité de Vojta généralisée, Bull. S.M.F. 133 (2005), 459–495.

[RV] G. Rémond et E. Viada, Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-varietés abéliennes, Internat. Math. Res. Notices 35 (2003), 1915–1931.

[S] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, Paris, Hermann, 1967.

[Z] B.Zilber, Intersecting varieties with tori, J. London Math. Soc. 65 (2002), 27–44.

Guillaume Maurin
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
Guillaume.Maurin@ujf-grenoble.fr