

Formes modulaires arithmétiques

Bertrand Gorsse et Gilles Robert

Prépublication de l'Institut Fourier n° 689 (2006)
www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé

On note \mathcal{S}_A l'anneau des polynômes en l'indéterminée R , à coefficients dans l'anneau $B = A[[q]]$ des séries formelles en q sur un anneau A . Sur \mathcal{S}_A , on définit :

- i) l'opérateur différentiel Θ en posant $\Theta q = q$ et $\Theta R = R^2$, d'où deux opérateurs différentiels ∂ et δ , dits respectivement de Serre et de Shimura, définis par

$$\delta_\lambda = \Theta - \lambda R, \quad \partial_\lambda = \Theta - \lambda \frac{E_2}{12}, \quad \text{avec } \lambda \in A,$$

où $\frac{E_2}{12}$, est la série formelle $\frac{1}{12} - 2 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n$,

- ii) pour chaque premier ℓ , deux applications A -linéaires $|U_\ell$ et $|V_\ell$ de \mathcal{S}_A dans lui-même, qui vérifient la relation dite "de Dwork"

$$(f(g|V_\ell))|U_\ell = (f|U_\ell)g \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{S}_A;$$

on a $|\delta|U_\ell = \ell|U_\ell|\delta$ et $|\delta|V_\ell = \frac{1}{\ell}|V_\ell|\delta$.

On sait *cf.* [11], en particulierisant q en $e^{2\pi iz}$ et R en $\frac{1}{4\pi y}$ avec z complexe et $y = \text{Im } z > 0$, que l'on a

$$\frac{E_2}{12}(e^{2\pi iz}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(cz+d)^2 |cz+d|^s}$$

ainsi $\eta := \frac{E_2}{12} - R$ se particularise de façon invariante par l'action de poids 2 du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$.

Ceci nous permet *dans le cas classique* du § 1, quand A contient $\overline{\mathbb{Q}}$, d'identifier (1.7) la notion de forme modulaire arithmétique de G. Shimura (en genre 1) [20] à celle de polynôme en η à coefficients formes modulaires classiques, et *dans le cas p -adique surconvergent* § 2 et 3, de la définir (2.15a) et (3.26), pour A approprié, comme polynôme en η à coefficients formes modulaires surconvergentes. Le § 2 considère le poids entier ; le § 3, les familles continues, *cf.* [4], [2], [5].

Nous soulignons certaines propriétés de stabilité de ces espaces de formes modulaires arithmétiques sous l'action de l'opérateur δ de Shimura : *le point fondamental*

étant que l'opérateur ∂ de Serre conserve la notion de modularité, aussi bien pour les formes modulaires classiques (c'est bien connu, cf. [22]) que pour les formes modulaires surconvergentes (dans le cas de poids entier cf. [2] § 4, et § 3 ci-dessous théorème 3.5 dans le cas général).

Les opérateurs de Hecke, dont l'action se déduit (3.25) de celle des applications A -linéaires $|U_\ell$ et $|V_\ell$ avec ℓ premier, laissent stables (lemme 3.1) ces espaces de formes modulaires arithmétiques ; ils sont compatibles avec δ .

Un autre fil conducteur, à travers les variations déclinées dans les §§ 1, 2 et 3, est la persistance d'un opérateur A -linéaire str , respectant la stratification par le poids, et coïncidant dans le cas classique avec la "projection holomorphe", cf. ci-dessous théorèmes 1.4 et 3.10.

Les points non détaillés, ainsi que beaucoup d'autres résultats, peuvent être trouvés dans [8], thèse.

Une grille de lecture des résultats est la suivante : pour le paragraphe 1, les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 ; pour le paragraphe 2 le théorème 2.1 ; pour le paragraphe 3 les théorèmes 3.5 et 3.10.

Mots-clés : forme modulaire classique ; opérateur différentiel gradué ; opérateur différentiel de Serre (resp. Shimura) ; isomorphisme différentiel gradué ; projection holomorphe ; forme modulaire surconvergente p -adique ; forme modulaire arithmétique ; projection stratifiée.

Abstract

In genus one, this text describe a particular presentation of nearly holomorphic (or arithmetical) modular forms of Goro Shimura [20], which can be extended with essentially no changes to the p -adic overconvergent modular forms.

Let R correspond to $\frac{1}{4\pi y}$, with $y = \text{Im}z > 0$, and q correspond to $e^{2\pi iz}$; then the almost holomorphic form

$$\eta := \frac{E_2}{12} - R$$

can be seen as an element of the ring \mathcal{S}_A , defined by $\mathcal{S}_A := B[R]$ with $B := A[[q]]$. We ask that $\text{weight}(\eta) := 2$.

Then the other arithmetical modular forms do form a graduated ring (resp. module) of polynomial in η with coefficients in the ring (resp. module) of classical (resp. p -adic overconvergent) modular forms.

Hence see Alexei A. Panchishkin [15] for each of them we have a " (q, R) -development" with value in \mathcal{S}_A , for convenient ring A . Over \mathcal{S}_A the partial differential operator $\Theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$ takes the shape $\Theta q = q$ and $\Theta R = R^2$. We define over \mathcal{S}_A two graduated differential operators δ and ∂ , respectively said of Shimura and of Serre, and describe their action on our arithmetical forms : the definition of them is to twist Θf by adding $-f \text{weight}(f) E_2/12$, resp. $-f \text{weight}(f) R$, so that $\delta f = \partial f + f \text{weight}(f) \eta$.

That they respect our arithmetical forms comes from i) the very simple fact that

$$\delta_2 \eta = \eta^2 - \frac{E_4}{144}$$

(this coming from the well known fact that $\Theta(\frac{E_2}{12}) = (\frac{E_2}{12})^2 - \frac{E_4}{144}$) and ii) the respect by differential Serre's operator of both classical and p -adic overconvergent modular structures, pushing the weight by +2, see theorem 3.5.

One of the important interest of Shimura's differential operator is its compatibility with the action of the usual Hecke's operators (up to a rational factor, it commutes with them).

Keywords : classical modular form; graduated differential operator; Shimura's (resp. Serre's) differential operator; graduated differential isomorphism; holomorphic projection; p -adic overconvergent modular form; arithmetical modular form; stratified projection.

2000 Mathematics Subject Classification: 11Fxx ; 14Hxx ; 32Wxx

1 Cas classique

1.1 Sur l'anneau \mathcal{S}_A des polynômes en R à coefficients dans l'anneau $B = A[[q]]$ des séries formelles en q sur l'anneau A , on définit l'opérateur différentiel Θ par $\Theta R = R^2$ et $\Theta q = q$ cf. e.g. pour $A = \mathbb{Q}$ [15] § 2.5 et 2.8.

Ainsi Θ agit sur $A[[q]]$ par $q \frac{d}{dq}$.

Ceci permet, pour tout élément λ de A , de définir l'opérateur δ_λ , de Shimura, par

$$\delta_\lambda f = \Theta f - \lambda f R. \quad (1.1)$$

Par ailleurs l'opérateur de Serre

$$\partial_\lambda f = \Theta f - \lambda f \frac{E_2}{12} \quad (1.2)$$

avec $\frac{E_2}{12} = \frac{1}{12} - 2 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n$, et $\sigma_1(n) = \sum_{d|n, d > 0} d$, peut également être étendu formellement à \mathcal{S}_A (pourvu que $\frac{1}{6} \in A$). On a

$$\delta_\lambda f = \partial_\lambda f + \lambda f \left(\frac{E_2}{12} - R \right). \quad (1.3)$$

En attribuant à $\frac{E_2}{12}$ et à R le poids 2, ces opérateurs différentiels peuvent bien sûr être itérés : $\delta_\lambda^{(r+1)} = \delta_{\lambda+2r} \circ \delta_\lambda^{(r)}$ et $\partial_\lambda^{(r+1)} = \partial_{\lambda+2r} \circ \partial_\lambda^{(r)}$ pour r entier ≥ 0 , où $\delta_\lambda^{(0)}$ et $\partial_\lambda^{(0)}$ sont les opérateurs identité.

Or pour A contenant $\overline{\mathbb{Q}}$, l'application q -développement (= développement en série de Fourier au voisinage de $i\infty$) permet de définir un plongement de l'anneau $M\mathcal{C}\ell(N)$, gradué par k entier ≥ 0 , des formes modulaires classiques, de niveau N c'est-à-dire stables sous l'action de $\Gamma_1(N)$, dans $A[[q]]$; on identifie $M\mathcal{C}\ell(N)$ à son image dans $A[[q]]$ par ce plongement.

Plus généralement, à l'aide de la particularisation de q en $e^{2\pi iz}$, de R en $\frac{1}{4\pi y}$ avec $y = \text{Im } z$, pour z élément du $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im } z > 0\}$, l'opérateur Θ devenant $\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$, on sait définir ([19] § 3, Lemme 7, ou [8] § 1.1), un anneau $\mathfrak{A}M(N) \subseteq \mathcal{S}_A$, gradué par k entier ≥ 0 , des formes presque modulaires (ou arithmétiques) de niveau N .

La strate $\mathfrak{A}M(N)_k$ de poids k de $\mathfrak{A}M(N)$ est appliquée par δ_k dans la strate $\mathfrak{A}M(N)_{k+2}$ de poids $k+2$ cf. [19] § 2, par ailleurs, la strate $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ de poids k de $M\mathcal{C}\ell(N)$ est appliquée par ∂_k dans la strate $M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2}$ de poids $k+2$ cf. [17], [22].

1.2 Posons $\eta = \frac{E_2}{12} - R$: il est bien connu (c'est écrit dans [11]; cela a probablement [23] été vu par L. Kronecker avant 1890; c'est rappelé dans [20] formule (0.7)) que

$$\frac{E_2}{12}(e^{2\pi iz}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(cz+d)^2 |cz+d|^s}, \quad (1.4)$$

et par suite $\eta = \frac{E_2}{12} - R \in \mathfrak{A}M_{1,2}(1)$. Une preuve élémentaire de ce fait se trouve aussi dans [16] § 4.4 formule (45) et (46).

Or par un calcul immédiat, on déduit de la formule classique $\Theta(\frac{E_2}{12}) = (\frac{E_2}{12})^2 - \frac{E_4}{144}$ cf. [14] cor. A.1.4.3, [22] § 3 l'identité

$$\delta_2 \eta = \eta^2 - \frac{E_4}{144}, \quad (1.5)$$

avec $E_4/144 = 1/144 + \frac{5}{3} \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n)q^n$, et $\sigma_3(n) = \sum_{d|n, d>0} d^3$.

En effet, on a

$$\delta_2 \eta = \Theta\left(\frac{E_2}{12} - R\right) - 2\left(\frac{E_2}{12} - R\right)R = \left(\frac{E_2}{12}\right)^2 - 2\frac{E_2}{12}R + R^2 - \frac{E_4}{144} = \eta^2 - \frac{E_4}{144}.$$

Par ailleurs, appliquant (1.3) avec $\lambda = k$ à la forme modulaire classique v de poids k , on obtient

$$\delta_k v = \partial_k v + k v \eta \quad (1.6)$$

avec $\partial_k v$ forme modulaire classique de poids $k + 2$.

Il résulte donc de (1.5) et (1.6) que l'anneau $M\mathcal{C}\ell(N)[\eta]$ des polynômes en η à coefficients formes modulaires classiques est stable sous l'action de l'opérateur différentiel δ de Shimura : précisément, sa strate de poids k est appliquée par δ_k dans sa strate de poids $k + 2$.

De plus, comme il est bien connu [19] Lemme 7, cf. aussi [12] Th. 2 § 10, le coefficient du terme de plus haut degré en R d'une forme arithmétique $h \in \mathfrak{A}M(N)$ est une forme classique $v \in M\mathcal{C}\ell(N)$; par suite, une récurrence facile sur le degré en R prouve l'identité

$$\mathfrak{A}M(N)_k = (M\mathcal{C}\ell(N)[\eta])_k, \quad (1.7)$$

pour chaque entier $k \geq 0$.

Le théorème 1.1 ci-dessous décrit, à partir de (1.5) et (1.6), la formule de récurrence liant les $(w_i)_{0 \leq i \leq r+1}$ aux $(v_i)_{0 \leq i \leq r}$ lorsque l'on explicite l'action de δ_k sur un élément

$$\sum_{i=0}^r v_i \eta^i \in \mathfrak{A}M_{r,k}(N),$$

avec $v_i \in M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i}$, sous la forme

$$\sum_{i=0}^{r+1} w_i \eta^i \in \mathfrak{A}M_{r+1,k+2}(N),$$

avec $w_i \in M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i}$.

Théorème 1.1 *Soit $v = \sum_{i=0}^r v_i \eta^i$ un élément de $\mathfrak{A}M_{r,k}(N)$, avec v_i dans $M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i}$.*

Écrivons l'élément $\delta_k v$ de $\mathfrak{A}M_{r+1,k+2}(N)$ sous la forme $\delta_k v = \sum_{i=0}^{r+1} w_i \eta^i$, avec w_i dans $M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i}$. Alors on a les formules de récurrence :

$$w_0 = \partial_k v_0 - v_1 \phi;$$

pour $i = 1, \dots, r-1$, on a

$$w_i = (k+1-i)v_{i-1} + \partial_{k-2i} v_i - (i+1)v_{i+1} \phi;$$

et enfin si $r \geq 1$

$$w_r = (k+1-r)v_{r-1} + \partial_{k-2r} v_r, \quad w_{r+1} = (k-r)v_r;$$

avec $\phi = \frac{E_4}{144}$.

En fait, si l'on substitue (δ, η) avec $\delta = (\delta_\ell)_\ell$ entier l'indice ℓ étant égal au poids de la forme sur laquelle δ_ℓ agit, en lieu et place de $(q \frac{d}{dq}, \frac{E_2}{12})$; les formules du Théorème 1.1 coïncident avec celles donnant l'action de $q \frac{d}{dq}$ sur l'anneau gradué $M\mathcal{C}\ell[\frac{E_2}{12}]$ (cf. aussi [3], § 9 p.34).

D'ailleurs par [4] on sait que $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur l'anneau gradué des formes modulaires p -adiques surconvergentes (de poids entier) cf. § 2; *a fortiori* $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur l'anneau gradué $M\mathcal{C}\ell$ des formes modulaires classiques.

Pour définir un isomorphisme i de l'anneau gradué $M\mathcal{A}[\frac{E_2}{12}]$, muni de l'opérateur $q \frac{d}{dq}$, sur l'anneau gradué $M\mathcal{A}[\eta]$, muni de l'opérateur différentiel δ agissant strate par strate, il suffit donc de demander :

- i) i agit sur $M\mathcal{A}$ par l'application identique;
- ii) i applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta = \frac{E_2}{12} - R$;

Bien évidemment cet isomorphisme respecte la stratification par le poids. De plus, il vient :

- iii) sur un élément homogène de $M\mathcal{C}\ell[\frac{E_2}{12}]$ de poids ℓ , on a $i^*(q \frac{d}{dq}) = \delta_\ell$.

En effet, par i) et ii) le monôme $v(\frac{E_2}{12})^a$, où $v \in M\mathcal{C}\ell_{\ell-2a}$, est appliqué par i sur le monôme $v\eta^a$; et vu les propriétés des opérateurs différentiels $q \frac{d}{dq}$ d'une part et δ_ℓ d'autre part, il suffit de prouver les deux identités suivantes, déduites de (1.5) et de (1.3),

$$\delta_2\left(i\left(\frac{E_2}{12}\right)\right) = \eta^2 - \frac{E_4}{144} = i\left(\frac{E_2}{12}\right)^2 - \frac{E_4}{144} = i\left(q \frac{d}{dq} \frac{E_2}{12}\right) := i^*\left(q \frac{d}{dq}\right)\left(\frac{E_2}{12}\right) \quad (1.8)$$

et pour v forme modulaire classique de poids k

$$\begin{aligned} \delta_k(i(v)) &= \partial_k v + k v \eta = \partial_k v + k v i\left(\frac{E_2}{12}\right) \\ &= i\left(q \frac{d}{dq} v\right) := i^*\left(q \frac{d}{dq}\right)(v). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Autrement dit, on a :

Théorème 1.2 *L'homomorphisme i de l'anneau $M\mathcal{C}\ell[\frac{E_2}{12}]$ dans l'anneau $M\mathcal{C}\ell[\eta]$ qui applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta = \frac{E_2}{12} - R$, et qui agit sur les coefficients dans $M\mathcal{C}\ell$ par l'identité, est un isomorphisme.*

Il respecte la stratification par le poids, et sur la strate de poids k on a

$$i^* \left(q \frac{d}{dq} \right) = \delta_k,$$

de sorte que i est un isomorphisme de l'anneau différentiel $(M\mathcal{C}\ell[\frac{E_2}{12}], q \frac{d}{dq})$ sur l'anneau différentiel $(M\mathcal{C}\ell[\eta], \delta)$.

Soit ν_k le plongement naturel de $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ dans $\mathfrak{A}M(N)_k$. Alors pour k entier > 2 , il résulte des formules du Théorème 1.1, que l'application A -linéaire

$$(\nu_k, \delta_{k-2}) : M\mathcal{C}\ell(N)_k \oplus \mathfrak{A}M(N)_{k-2} \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)_k$$

est un isomorphisme *cf.* Théorème 1.4.

Ainsi pour chaque $h \in \mathfrak{A}M(N)_k$, avec k entier > 2 , il existe un élément unique $str_k(h) \in M\mathcal{C}\ell(N)_k$ tel que

$$h = str_k(h) + \delta_{k-2} g \tag{1.10}$$

avec $g \in \mathfrak{A}M(N)_{k-2}$. L'application $h \mapsto str_k(h)$ de $\mathfrak{A}M(N)_k$ vers $M\mathcal{C}\ell(N)_k$ est A -linéaire, et on a $str_k \circ \nu_k = id_{M\mathcal{C}\ell}$, avec $M\mathcal{C}\ell = M\mathcal{C}\ell(N)_k$.

Comme pour $f \in M\mathcal{C}\ell(N)_k$, f parabolique, on a $\langle f, \delta_{k-2}(g) \rangle_N = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ désigne le produit scalaire de Petersson, comme observé dans [19], Lemme 6, *cf.* aussi [12]; il résulte de (1.10) que str_k coïncide avec la projection holomorphe [21] §3, Prop. 3.1 p. 590, [12] § 10, ou [6], thèse th. 1.2.2, de $\mathfrak{A}M(N)_k$ sur $M\mathcal{C}\ell_k(N)$, $k > 2$.

Exemple 1.3

1. *Vu (1.5) on a $str_4(\eta^2) = \frac{E_4}{144}$.*
2. *En poids $k = 2$, l'image de (id, δ_{k-2}) est $M\mathcal{C}\ell(N)_2 \subsetneq \mathfrak{A}M(N)_2 (= M\mathcal{C}\ell(N)_2 + A\eta)$ et $str_2(\eta)$ n'est pas défini.*

Théorème 1.4 *Pour k entier ≥ 2 et $r \geq 0$ tel que $2r \leq k - 2$, l'application de récurrence ϕ_r donnant (w_1, \dots, w_{r+1}) à partir de (v_0, \dots, v_r) décrite dans le théorème 1.1 (avec k remplacé par $k - 2$) est A -linéaire.*

Si de plus $k > 2$, alors ϕ_r est inversible : en effet, sa matrice est triangulaire et sa diagonale fait apparaître les entiers $(k - 2, \dots, k - 2 - r)$; ceux-ci sous l'hypothèse faite sont tous ≥ 1 , et donc inversibles (dans A).

Il s'ensuit que l'application A -linéaire

$$(\nu_k, \delta_{k-2}) : M\mathcal{C}\ell(N)_k \oplus \mathfrak{A}M(N)_{k-2} \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)_k$$

est un isomorphisme, d'où l'existence d'une unique application A -linéaire str_k caractérisée par (1.10)

$$str_k : \mathfrak{A}M(N)_k \longrightarrow MC\ell_k$$

telle que $str_k \circ \nu_k = id_{MC\ell}$, avec $MC\ell = MC\ell(N)_k$.

Cette application $str_k, k > 2$, n'est autre que la projection holomorphe de [21] § 3, [12] §10, [6], th 1.2.2.

1.3 Conséquences et variations

Remarque 1.5 Faisant $A = \mathbb{C}$, on déduit donc du théorème 1.2 un isomorphisme de l'anneau différentiel des formes modulaires quasi holomorphes de niveau N dont on sait [13] § 1, Prop. 1, qu'il est identique à $(MC\ell(N)[\frac{E_2}{12}], D = q\frac{d}{dq})$, avec $D(\frac{E_2}{12}) = (\frac{E_2}{12})^2 - \frac{E_4}{144}$, sur l'anneau des formes modulaires arithmétiques $(MC\ell(N)[\eta], \delta)$, avec $\delta = (\delta_\ell)_\ell$ entier, l'action de δ se faisant strate par strate.

Remarque 1.6 Le point de vue précédent peut être adapté aux formes modulaires de poids $\frac{1}{2}$ -entier (comme d'ailleurs la théorie des formes quasi-holomorphes peut l'être).

On notera qu'en poids $k = \frac{1}{2} + \lambda$ avec λ entier ≥ 0 , la projection A -linéaire $str_k : \mathfrak{A}M(N)_{1/2+\lambda} \longrightarrow MC\ell(N)_{1/2+\lambda}$ avec $4|N$ est toujours définie.

Remarque 1.7 L'isomorphisme i du théorème 1.2 peut être qualifié de canonique, car le A -module $MC\ell_2(1)$ est réduit à $\{0\}$. Il commute avec les opérateurs de Hecke, cf. Rmq 2.2.

Cependant pour N arbitraire, considérons $\rho \in MC\ell_2(N)$ une forme modulaire classique de poids 2, et de niveau N . Alors

$$\eta_\rho := \eta - \rho$$

est une forme modulaire de $\mathfrak{A}M_{1,2}(N)$, et l'on a les relations analogues à (1.5) et (1.6) :

$$\delta_2(\eta_\rho) = (\eta_\rho)^2 - \phi(\rho), \tag{1.5a}$$

avec $\phi(\rho) = \rho^2 + \partial_2\rho + \frac{E_4}{144} \in MC\ell_4(N)$; et pour v une forme modulaire classique de poids k ,

$$\delta_k v = \partial_k^{(\rho)} v + k v \eta_\rho, \tag{1.6a}$$

avec $\partial_k^{(\rho)}$ lié à ∂_k par $\partial_k^{(\rho)} = \partial_k + k\rho$; l'opérateur différentiel $\partial_k^{(\rho)}$ applique donc à nouveau $MC\ell(N)_k$ dans $MC\ell(N)_{k+2}$. De plus, l'isomorphisme

$$\mathfrak{A}M(N) \simeq MC\ell(N)[\eta_\rho]$$

ne modifie pas la stratification par le poids.

On peut alors définir un isomorphisme d'anneaux gradués

$$i_\rho : M\mathcal{C}\ell(N) \left[\frac{E_2}{12} \right] \longrightarrow \mathfrak{A}M(N)$$

en posant

i) i_ρ agit sur $M\mathcal{C}\ell(N)$ par l'application identiques ;

ii) i_ρ applique $\frac{E_2}{12}$ sur $\eta_\rho = \eta - \rho$.

Pour obtenir un isomorphisme d'anneaux différentiels, redonnant du côté arithmétique l'opérateur de Shimura δ , il convient sur $M\mathcal{C}\ell(N) \left[\frac{E_2}{12} \right]$ de tordre l'opérateur $q \frac{d}{dq}$ en l'opérateur $(q \frac{d}{dq})^{(\rho)}$ de la façon suivante :

$$\text{iv)} \quad (q \frac{d}{dq})^{(\rho)} \left(\frac{E_2}{12} \right) := (q \frac{d}{dq}) \left(\frac{E_2}{12} \right) - \partial_2 \rho - \rho^2 ;$$

$$v_\rho) \quad \text{pour } v \text{ forme modulaire classique de poids } k, \quad (q \frac{d}{dq})^{(\rho)}(v) := (q \frac{d}{dq})(v) + k \rho v.$$

Vu (1.5a) et (1.6a), on vérifie alors sans peine les identités

$$\delta_2 \left(i_\rho \left(\frac{E_2}{12} \right) \right) = i_\rho^* \left(\left(q \frac{d}{dq} \right)^{(\rho)} \right) \left(\frac{E_2}{12} \right), \quad (1.8a)$$

$$\delta_k(i_\rho(v)) = i_\rho^* \left(\left(q \frac{d}{dq} \right)^{(\rho)} \right) (v), \quad (1.9a)$$

analogues de (1.8) et (1.9). Par suite, il vient :

iii) sur un élément homogène de $M\mathcal{C}\ell(N) \left[\frac{E_2}{12} \right]$ de poids ℓ , on a $i_\rho^* \left(\left(q \frac{d}{dq} \right)^{(\rho)} \right) = \delta_\ell$.

Remarque 1.8 On peut se demander dans la remarque précédente si l'on peut trouver ρ de façon que

$$\phi(\rho) = \rho^2 + \partial_2 \rho + \frac{E_4}{144} = 0.$$

Autrement dit, comme $\partial_2 \rho = \Theta \rho - 2\rho \frac{E_2}{12}$, a-t-on

$$\Theta \rho = - \left(\rho - \frac{E_2}{12} \right)^2 + \left(\frac{E_2}{12} \right)^2 - \frac{E_4}{144} \quad ? \quad (1.11)$$

Or cette équation différentielle définit la série $\rho \in A[[q]]$ de façon unique, et une solution en est déjà connue $\rho = \frac{E_2}{12}$; c'est donc la seule, mais comme on le sait $\frac{E_2}{12}$ n'est pas modulaire.

2 Cas p -adique surconvergent : poids entier

2.1 Soit p un nombre premier, et K une extension finie de \mathbb{Q}_p dans le corps \mathbb{C}_p (= corps de Tate). Soit N entier, $(N, p) = 1$.

On note

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(K, N, v)$$

l'anneau des formes modulaires p -adiques v -surconvergentes au-dessus de K , de poids $k \in \mathbb{Z}$, et de niveau N . La proposition 8 de [4] prouve que $\frac{E_2}{12}$ est transcendant sur \mathcal{M} ; ce résultat est complété par la preuve de la stabilité de l'anneau de polynôme $\mathcal{M}[\frac{E_2}{12}]$ dans loc. cit., à la fois par l'opérateur d'Atkin $|U_p$ et par $\Theta = q \frac{d}{dq}$.

En fait, pour ℓ premier, les opérateurs $|U_\ell$ et $|V_\ell$ peuvent être définis sur l'anneau de polynômes $\mathcal{S}_A = B[R]$ avec $B = A[[q]]$ en posant, pour tout monôme $h R^m$ avec m entier ≥ 0 et $h = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$, $a_n \in A$,

$$h R^m |U_\ell = \ell^m \left(\sum_{n \geq 0} a_{n\ell} q^n \right) R^m, \quad (2.12)$$

$$h R^m |V_\ell = \frac{1}{\ell^m} \left(\sum_{n \geq 0} a_n q^{\ell n} \right) R^m, \quad (2.13)$$

et en les étendant par linéarité à \mathcal{S}_A .

Leur compatibilité avec l'opérateur de Shimura δ_λ , $\lambda \in A$, cf. [8] Chap. I, est donnée par

$$\ell |U_\ell | \delta_\lambda = | \delta_\lambda | U_\ell \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ell} |V_\ell | \delta_\lambda = | \delta_\lambda | V_\ell ; \quad (2.14)$$

on vérifie de plus sans difficulté (en la ramenant par linéarité au cas de monômes $f_1 R^a$ et $g_1 R^b$, avec $f_1, g_1 \in B$ et a, b entiers ≥ 0) la relation

$$(f(g|V_\ell))|U_\ell = (f|U_\ell)g \quad (2.15)$$

pour tous $f, g \in \mathcal{S}_A$. Autrement dit, pour ℓ premier, les opérateurs $|U_\ell$ et $|V_\ell$ vérifient sur \mathcal{S}_A la "relation de Dwork".

Pour que le q -développement des éléments de l'anneau \mathcal{M} des formes modulaires surconvergentes appartienne à $A[[q]]$, on choisit pour A le corps K , ou bien \mathbb{C}_p .

La transcendance de $\frac{E_2}{12}$ sur \mathcal{M} rappelée ci-dessus permet d'étendre les isomorphismes $i_\rho, \rho \in M\mathcal{C}\ell_2(N)$, du § 1 en des isomorphismes différentiels

$$i_\rho^s : \left(\mathcal{M} \left[\frac{E_2}{12} \right], \left(q \frac{d}{dq} \right)^{(\rho)} \right) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}[\eta_\rho], \delta) \quad (2.15a)$$

avec $\eta_\rho = \left(\frac{E_2}{12} - \rho \right) - R$, et l'action de δ se faisant toujours strate par strate.

Ainsi, on a la conséquence suivante du théorème 2, p.33 de loc.cit.

Théorème 2.1 *Soit n un entier ≥ 0 , et notons $\delta^{(n+1)}$ l'opérateur de Shimura itéré $(n+1)$ -fois.*

Alors les restrictions aux éléments de $M_{-n}(K, N, v)$ des opérateurs différentiels Θ^{n+1} et $\delta_{-n}^{(n+1)}$ coïncident, et par [4] appliquent le module $M_{-n}(K, N, v)$ dans $M_{n+2}(K, N, v)$.

Remarque 2.2

1. L'isomorphisme (2.15a) reste valable pour $\rho \in M_2(K, N, v)$ surconvergente (de poids 2, et niveau N).
2. L'isomorphisme canonique i_0^s avec $\rho = 0$ commute avec les opérateurs de Hecke T_ℓ , ℓ premier (définis dans [4] d'une part, et ci-dessous identité (2.19) d'autre part).

2.2 Une forme modulaire particulière

$$\rho = \frac{E_2^*}{12} = \frac{1}{12} + \frac{2}{p-1} \sum_{n \geq 1} \sigma_1^*(n) q^n \tag{2.16}$$

avec $\sigma_1^*(n) = \sum_{\substack{d > 0, d|n \\ (d,p)=1}} d$, qui appartient à $M\mathcal{C}\ell_2(p)$ et est invariante par $\Gamma_0(p)$, paraît ici particulièrement intéressante.

En effet, en posant $\tilde{E}_2 = E_2 - E_2^*$, on a l'identité

$$\frac{\tilde{E}_2}{12} (e^{2\pi iz}) - R(z) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p}{p-1} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} \sum_{\substack{(c,d) \\ (c,p)=1}} \frac{1}{(cz+d)^2 |cz+d|^s} \tag{2.17}$$

qui implique l'appartenance de $\frac{\tilde{E}_2}{12} - R$ à $\mathfrak{A}M_{1,2}(p)$, et son invariance par $\Gamma_0(p)$ (sous l'action de poids 2); ainsi par différence il résulte de (1.4) et (2.17) que

$$\frac{E_2^*}{12} = \left(\frac{E_2}{12} - R \right) - \left(\frac{\tilde{E}_2}{12} - R \right)$$

appartient bien à $M\mathcal{C}\ell_2(p)$.

Comme $\frac{\tilde{E}_2}{12} = \frac{p}{p-1} \frac{E_2}{12} |(1 - V_p)$, l'identité (2.17) ci-dessus résulte de (1.4) en appliquant l'opérateur $|(1 - V_p)$ à ses deux membres, où V_p transforme z en pz ; on ajuste le résultat en multipliant par $\frac{p}{p-1}$.

Le q -développement de $\tilde{E}_2/12$ est donné par

$$\frac{\tilde{E}_2}{12} (q) = -2 \frac{p}{p-1} \sum_{n \geq 1} p^{v_p(n)} \sigma_1^*(n) q^n. \tag{2.18}$$

Remarque 2.3 Si $\tilde{\eta} := \eta_\rho = \eta - \frac{E_2^*}{12}$, on a l'isomorphisme $\mathfrak{A}M(Np^n) \simeq M\mathcal{C}\ell(Np^n)[\tilde{\eta}]$, n entier ≥ 1 .

2.3 Sur l'image par l'application q -développement des éléments de $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]$, de poids k niveau N avec $(N, p) = 1$ et caractère $\psi \pmod{Np^n}$ sous l'action de $\Gamma_0(Np^n)$, posons

$$|_{k,\psi} T_\ell = |U_\ell + \psi(\ell) \ell^{k-1} |V_\ell \tag{2.19}$$

(bien sûr, le caractère multiplicatif $\psi \bmod Np^n$ doit prendre ses valeurs dans l'anneau A).

La compatibilité de l'opérateur de Hecke $|T_\ell$ avec l'opérateur de Shimura δ_λ , $\lambda \in A$, est donnée par

$$\ell|_k T_\ell | \delta_\lambda = |\delta_\lambda|_{k+2} T_\ell \quad (2.20)$$

cf. [8], chap. I; rappelons que pour $\lambda = k$ l'opérateur δ_k applique $\mathcal{M}[\eta]_k$ dans $\mathcal{M}[\eta]_{k+2}$: en effet, pour chaque poids entier t , on a $\delta_t = \partial_t + t\eta$ et l'opérateur de Serre ∂_t applique \mathcal{M}_t dans \mathcal{M}_{t+2} cf. [2], p. 222, identité (4.2) et aussi ci-dessous § 3, théorème 3.5. Notons en particulier

$$\begin{aligned} \left(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\right)\Big|_{2, id} T_\ell &= (1 + \ell)\left(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\right), \ell \neq p, \\ \left(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\right)\Big|_{U_p} &= p\left(\frac{\widetilde{E}_2}{12} - R\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Plus généralement, en raisonnant comme pour prouver l'identité (1) p. 32 de [4], on a

$$(h\tilde{\eta})\Big|_{\frac{1}{p}U_p} = (h|U_p)\tilde{\eta} + (h|U_p)\frac{E_2^*}{12} - \left(\frac{hE_2^*}{12}\right)\Big|_{U_p} \quad (2.22)$$

pour tout élément h de \mathcal{S}_A , avec $\tilde{\eta} = \frac{\widetilde{E}_2}{12} - R$; en effet, à l'aide pour $\ell = p$ de notre version (2.14) de la "relation de Dwork", comme $\eta = \tilde{\eta} + \frac{E_2^*}{12}$ et $\tilde{\eta} = \frac{p}{p-1}\eta|(1 - V_p)$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p}(h\tilde{\eta})\Big|_{U_p} &= (h\eta)\Big|_{U_p} - (h(\eta|V_p))\Big|_{U_p} \\ &= (h\tilde{\eta})\Big|_{U_p} + \left(h\frac{E_2^*}{12}\right)\Big|_{U_p} - (h|U_p)\frac{E_2^*}{12} - (h|U_p)\tilde{\eta}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

d'où (2.22) résulte immédiatement.

Fixons r entier ≥ 0 ; comme noté dans loc. cit. Remark 2, p. 32-33, il résulte de (2.22) que la restriction de l'opérateur $|U_p$ à la partie de degré en $\tilde{\eta}$ inférieure à r de la strate $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]_k$ de poids k est complètement continue; de polynôme caractéristique

$$\prod_{s=0}^r P(k - 2s, p^s T), \quad (2.24)$$

où $P(k, T)$ désigne le polynôme caractéristique de la restriction à $\mathcal{M}_k(v) := M_k(K, N, v)$ de $|U_p$ — que l'on sait complètement continu [7], [13] et [9].

D'où un polynôme caractéristique pour $|U_p$ agissant sur $\mathcal{M}[\tilde{\eta}]_k$, à savoir

$$\prod_{s \geq 0} P(k - 2s, p^s T).$$

3 Cas p -adique surconvergent : familles continues

3.1 Beaucoup des difficultés qui pourraient maintenant surgir pour étendre cet opérateur $|U_p$ — quand les familles de formes modulaires p -adiques surconvergentes sont substituées aux formes modulaires surconvergentes de poids entier (cas du § 2) — semblent déjà avoir été surmontées par les travaux fondateurs de [3] et [5].

Dorénavant on suppose que l'anneau A des coefficients de \mathcal{S}_A est l'anneau des fonctions rigides sur le groupe rigide analytique \mathcal{B} (= isomorphe au disque ouvert de rayon 1, centré en l'élément unité et muni de sa structure de groupe multiplicatif, dans K^x (resp. \mathbb{C}_p^x)) à coefficients dans K (resp. \mathbb{C}_p) cf. [5], § 1.4.

Nous identifions le A -module des (familles de) formes modulaires surconvergentes de niveau $N, p \nmid N$, soit $\mathcal{M}^\dagger(N)$, à leurs q -développements à valeurs dans $A(\mathcal{U})[[q]]$, où \mathcal{U} est un sous-espace ouvert admissible de \mathcal{B} cf. [5] §2.4.

Dans la définition (2.19) de $|T_\ell$, pour ℓ premier, on se libère de la contrainte de la multiplication par $\psi(\ell)\ell^{k-1}$ en la remplaçant cf. [5] lemme 3.4.1, par l'action d'un opérateur diamant $\langle \ell \rangle^\star$ cf. loc. cit. et [3] § B5 qui permet de poser :

$$\begin{cases} |T_\ell & := |U_\ell + \frac{1}{\ell}| \langle \ell \rangle^\star |V_\ell, & \text{si } \ell \nmid pN \\ |T_\ell & := |U_\ell, & \text{si } \ell | pN \end{cases} \quad (3.25)$$

agissant sur les éléments de $\mathcal{M}^\dagger(N)$.

On introduit alors $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N)$ le A -module des formes modulaires arithmétiques surconvergentes, en posant

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N) := \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]. \quad (3.26)$$

Bien sûr, on attribue à η le poids 2 (la multiplication par η décale le caractère-poids par multiplication par (τ^2, η_2) les notations étant celles de [5] § 1.4, en particulier τ désigne le caractère de Teichmüller).

Si $\ell = (\ell_N, \pi(\ell)) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\star \times \mathbb{Z}_p^\star$ nous définissons l'action de $\langle \ell \rangle^\star$ sur les monômes $F\eta^a$ avec $F \in \mathcal{M}^\dagger(N)$ et a entier ≥ 0 par l'identité

$$(F\eta^a) | \langle \ell \rangle^\star := \pi(\ell)^{2a} (F | \langle \ell \rangle^\star) \eta^a \quad (3.27)$$

(car η est invariant de poids 2 sous $S\ell_2(\mathbb{Z})$); puis nous étendons $\langle \ell \rangle^\star$ à $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]$ par linéarité.

Les opérateurs différentiels δ et ∂ , cf. définition 3.3 ci-dessous sont compatibles sur $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N)$ à l'action de $\langle \ell \rangle^\star$, et l'on a

$$|D| \langle \ell \rangle^\star = \pi(\ell)^2 | \langle \ell \rangle^\star | D \quad (3.28)$$

où D désigne au choix ∂ ou δ .

Comme $|U_\ell$ et $|V_\ell$ pour ℓ premier ont déjà été définis sur l'anneau $\mathcal{S}_A = (A[[q]])[[R]]$, il s'ensuit :

Lemme 3.1

- a) Sur les éléments de $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\eta]$, on définit les opérateurs de Hecke $|T_\ell$, ℓ premier, à l'aide des identités (3.25) et (3.27) (si $\ell \nmid pN$, on a donc $\pi(\ell) = \ell$).
- b) Il résulte alors de (2.13) et de (3.28) que l'on a $f|\delta|T_\ell = \ell f|T_\ell|\delta$ pour tout $f \in \mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N)$.

3.2

Définition 3.2 On décompose chaque caractère-poids $\kappa \in W_N$, avec

$$W_N = \text{Hom}_{\text{cont}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^x \times \mathbb{Z}_p^x, \mathbb{C}_p^x)$$

muni de sa structure de groupe analytique rigide cf. [5] § 1.4, comme un couple $\kappa = (\psi, \langle \kappa \rangle)$ où $\psi \in \text{Hom}((\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^x, \mathbb{C}_p^x)$ et où $\langle \kappa \rangle$ est un élément de $\mathcal{B} = \text{Hom}_{\text{cont}}(1 + p\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p^x)$.

Sur \mathcal{B} on définit un homomorphisme

$$\log : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

en posant

$$\log \theta := \log_p(\theta(u)) / \log_p(u), \quad \theta \in \mathcal{B}; \quad (3.29)$$

ici $u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ et $v_p(u - 1) \geq 1$ et le membre de droite de (3.29) est indépendant du choix de u . Le noyau de l'homomorphisme $\log : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est le sous-groupe $\mathcal{B}_{\text{tors}}$ de torsion de \mathcal{B} , formé des caractères d'ordre fini à valeurs racines p^n -ièmes de l'unité (pour n entier suffisamment grand).

Si $\theta \in \mathcal{B}$ est défini sur K , alors $\log \theta \in K$.

Définition 3.3 Sur \mathcal{S}_A on définit les opérateurs de dérivation de Serre, resp. Shimura, par

$$\begin{aligned} \partial_{\langle \kappa \rangle} &= \Theta - \log \langle \kappa \rangle \frac{E_2}{12}, \quad \langle \kappa \rangle \in \mathcal{B}, \\ \text{resp. } \delta_{\langle \kappa \rangle} &= \Theta - \log \langle \kappa \rangle R, \quad \langle \kappa \rangle \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\delta_{\langle \kappa \rangle} = \partial_{\langle \kappa \rangle} + \log \langle \kappa \rangle \eta.$$

On pose aussi $\tilde{\delta}_{\langle \kappa \rangle} = \Theta - \log \langle \kappa \rangle \frac{\tilde{E}_2}{12}$ de sorte que $\delta_{\langle \kappa \rangle} = \tilde{\delta}_{\langle \kappa \rangle} + \log \langle \kappa \rangle \tilde{\eta}$.

Définition 3.4 Pour k entier rationnel, on note n_k le caractère de poids entier k : avec les rotations de [5] § 1.4, on a donc $n_k := \tau^k \eta_k$ où η_k est l'homomorphisme

$$x \longmapsto x^k$$

de $1 + p\mathbb{Z}_p$ dans \mathbb{C}_p^x .

Si l'on prouve que $\partial_{\langle \kappa \rangle}$ (et donc $\tilde{\partial}_{\langle \kappa \rangle}$) applique la strate $\mathcal{M}(N)_\kappa$ de caractère-poids κ dans la strate $\mathcal{M}(N)_{n_2\kappa}$ de caractère-poids $n_2\kappa$ (cf. théorème 3.5 ci-dessous), on saura que l'opérateur de Shimura δ qui vérifie aussi

$$\delta_2(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^2 - \phi\left(\frac{E_2^*}{12}\right), \text{ avec } \delta_2 = \delta_{\langle n_2 \rangle},$$

cf. (1.5a), préservera le A -module $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N) = \mathcal{M}^\dagger(N)[\tilde{\eta}]$ tout en gardant l'essentiel des propriétés décrites dans le paragraphe 1 (cf. théorème 3.10 ci-dessous).

Il vient :

Théorème 3.5 *L'opérateur $\partial_{\langle \kappa \rangle}$ préserve la surconvergence ; précisément, avec les notations de [5] § 2.4, p. 46, on a*

$$\partial_{\langle \kappa \rangle} M_\kappa(K, N, v) \subseteq M_{n_2\kappa}(K, N, v).$$

Il en va bien sûr de même sur les familles : ∂ décale alors le caractère-poids en le multipliant par n_2 .

3.3 Preuve : on note ci-dessous M_κ les espaces notés $M_\kappa(K, N, v)$ dans [5] loc. cit.

L'argument repose sur le fait suivant :

Fait : pour tout $\psi \in \text{Hom}((\mathbb{Z}/N_p\mathbb{Z})^x, \mathbb{C}_p^x)$, on a

$$\Theta M_{(\psi,0)} \subseteq M_{n_2(\psi,0)} = M_{(\tau^2\psi, \eta_2)}. \quad (3.30)$$

Sous preuve : l'indication du caractère ψ correspond à la réaction de notre fonction modulaire, vis-à-vis de la transformation sous $\Gamma_0(Np^n)$ de la courbe elliptique sous-jacente.

Or pour f de poids zéro, particularisant q en $e^{2\pi iz}$ et l'action de Θ sur $A[[q]]$ en $\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$, pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur z par $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$, on a par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\Theta(f(e^{2\pi i\gamma z})) = \left(q \frac{d}{dq} f\right)(\gamma z) \times \frac{d}{dz} \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{1}{(cz+d)^2} (\Theta f)(e^{2\pi i\gamma z});$$

d'où si $\gamma \in \Gamma_0(Np^n)$ l'identité

$$\psi(\gamma)(\Theta f)(z) = \frac{1}{(cz+d)^2} (\Theta f)(\gamma z),$$

et par suite (continuité p -adique de l'opérateur Θ) l'identité (3.30) proposée ci-dessus. \square

Par ailleurs, observons que pour

$$E_{\langle \kappa \rangle}(q) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\zeta^{\star\langle \kappa \rangle}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\langle \kappa \rangle}^{\star}(n) q^n, & \text{si } \langle \kappa \rangle \neq 1, \\ 1, & \text{si } \langle \kappa \rangle = 1, \end{cases}$$

cf. [5] § 2.2 ou [2] § B1 avec

$$v_p\left(\frac{1}{\zeta^* \langle \kappa \rangle}\right) > 0, \quad (3.31)$$

on a pour $F(q)$ surconvergente de caractère-poids κ

$$\partial_{\langle \kappa \rangle} F(q) = E_{\langle \kappa \rangle}(q) \Theta\left(\frac{F(q)}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)}\right) + \partial_{\langle \kappa \rangle}(E_{\langle \kappa \rangle}(q)) \frac{F(q)}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)}. \quad (3.32)$$

Vu l'identité (3.30), ceci prouve donc qu'il suffit de montrer que pour tout $\langle \kappa \rangle$ dans \mathcal{B} la série

$$\partial_{\langle \kappa \rangle}(E_{\langle \kappa \rangle}(q))/E_{\langle \kappa \rangle}(q) \quad (3.33)$$

est surconvergente et appartient à $M_{n_2}(K, 1, v)$, avec $0 \leq v < p/(p+1)$ rationnel arbitraire.

Nous faisons donc ci-dessous $N = 1$, et nous posons $s = \log \langle \kappa \rangle$.

Si $s = 0$, alors il existe n tel que la puissance p^n de $\langle \kappa \rangle$ soit l'unité, et comme

$$\frac{\Theta E_{\langle \kappa \rangle}(q)}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)} = \frac{1}{p^n} \frac{\Theta(E_{\langle \kappa \rangle}(q)^{p^n})}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)^{p^n}}$$

avec $\partial_{\langle \kappa \rangle} = \Theta$, on peut appliquer (3.30) à $\Theta(E_{\langle \kappa \rangle}(q)^{p^n})$ d'où la propriété (3.33) dans ce cas là.

Supposons maintenant $s \neq 0$, et choisissons a entier ≥ 0 suffisamment grand de façon que

$$a + v_p\left(\frac{12}{s}\right) > \frac{1}{p-1}.$$

Nous reprenons les notations de [5] chap. 2, et particulièrement th. 2.2.2. On a :

Proposition 3.6 (homogénéité) *Il existe une fonction analytique rigide sur $Z_{\mathcal{B} \times \mathcal{B}^*}$, bornée par 1 et surconvergente sur $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^*$ (i.e. un élément de $A^0(Z_{\mathcal{B} \times \mathcal{B}^*}/\mathcal{B} \times \mathcal{B}^*)^\dagger$); de q -développement*

$$(E_\alpha(q))^{pt}/E_{\alpha^{pt}}(q), \quad (\alpha, t) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}^*,$$

Sous preuve : on pose $E = E_{(\tau^0, 1)}$ où $E_{(\tau^0, 1)}$ est la série d'Eisenstein classique de poids 1, utilisée dans [2] chap. B, bas p. 447.

Pour $v_p(u) > \frac{1}{p-1} - 1$ nous savons [3] cor. B. 4.5.2. que $E_{(\tau^0, u)}(q)/E(q)^u$ est le q -développement d'une fonction sur $Z_{\mathcal{B}^*}$, surconvergente sur \mathcal{B}^* ; lorsque

$$\begin{aligned} \alpha &= (\tau^0, s) \in \mathcal{B}^* & \text{avec } s &= \log \alpha, \\ \beta &= (\tau^0, s) \in \mathcal{B}^* & \text{avec } t &= \log \beta, \end{aligned}$$

ceci vaut pour $u = s$, comme pour $u = \log(\alpha^{pt}) = pst$.

De plus, par le même argument que dans [5] loc. cit. p. 41, ces deux fonctions sont sans zéros sur un voisinage affinoïde $Z(v), v > 0$, de Z ; donc le quotient

$$(E_\alpha(q)/E(q)^s)^{pt}/(E_{\alpha^{pt}}(q)/E(q)^{pst})$$

est le q -développement d'une fonction sur $Z_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*}$, surconvergente sur $Z_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*}$.

On conclut la preuve de la Proposition 3.6 en utilisant le principe du prolongement analytique (par une variante du th. 2.2.4. de [5]). \square

[[Ci-dessus cette proposition est utilisée avec

$$\alpha = \langle \kappa \rangle \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad pt = p^a 12/s$$

où $s = \log \langle \kappa \rangle$ qui vérifie $v_p(t) > \frac{1}{p-1} - 1$ i.e. $(\tau^0, t) \in \mathcal{B}^*$.]]

Alors d'après (3.31) la série

$$G(q) := E_{\langle \kappa \rangle}(q)^{12p^a/s} \tag{3.34}$$

est convergente; comme $E_{\langle \kappa \rangle}$ est une forme modulaire p -adique surconvergente de caractère-poids $\langle \kappa \rangle \in \mathcal{B}$, la série (3.34) est une forme modulaire surconvergente; d'après la Proposition 3.6 son caractère-poids ρ appartient à \mathcal{B} et vérifie

$$\log \rho = \frac{12p^a}{s} \log \langle \kappa \rangle = 12p^a.$$

Le caractère-poids ρ de (3.34) coïncide donc à un élément de $\mathcal{B}_{\text{tors}}$ près avec la projection dans \mathcal{B} de la puissance p^a du poids (τ^{12}, η_{12}) de la forme modulaire parabolique classique

$$\Delta(q) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

Quitte à augmenter l'entier a , nous pouvons donc supposer qu'il y a égalité : alors, le quotient

$$G(q)/\Delta^{p^a}(q) \tag{3.35}$$

est une fonction modulaire surconvergente de caractère-poids la puissance p^a de $(\tau^{-12}, 0)$.

En lui appliquant Θ , on trouve donc d'après (3.30) un élément de

$$M_{n_2(\tau^{-b}, 0)} = M_{(\tau^{2-b}, \eta_2)}$$

avec $b = 12p^a$, à savoir

$$\frac{\Theta G(q)}{\Delta^{p^a}(q)} = G(q) \frac{\Theta(\Delta^{p^a}(q))}{\Delta^{2p^a}(q)} \tag{3.36}$$

Or on a $\Theta(\Delta^{p^a})/\Delta^{p^a} = p^a \Theta(\Delta)/\Delta$, et comme Θ est p -adiquement continu on a aussi

$$\Theta(G(q)) = \frac{12p^a}{s} G(q) \frac{\Theta(E_{\langle \kappa \rangle}(q))}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)}.$$

Multipliant alors la différence (3.36) par la fonction modulaire surconvergente

$$\frac{s}{12p^a} \Delta^{p^a}(q)/G(q)$$

(dérivation logarithmique), il s'ensuit que

$$\frac{\Theta E_{\langle \kappa \rangle}(q)}{E_{\langle \kappa \rangle}(q)} - \frac{s}{12} \frac{\Theta \Delta}{\Delta} \quad (3.37)$$

est un élément de $M_{n_2}(K, 1, v)$, avec comme ci-dessus $0 \leq v < p/(p+1)$ rationnel arbitraire.

Mais il est bien connu (Ramanujan, cf. [14] corollary A.1.4.4., ou [22] lemme 3) que $\Theta \Delta / \Delta = E_2$. Ainsi (3.37) est une autre écriture de la propriété (3.33), qui se trouve complètement démontrée et avec elle le théorème 3.5. \square

Corollaire 3.7 *Le A -module $\mathfrak{A}\mathfrak{M}^\dagger(N)$ est stable par l'opérateur différentiel δ de Shimura.*

3.4 Plus précisément, l'opérateur δ de Shimura vérifiant les identités

$$\begin{cases} \delta_{\langle \kappa \rangle} = \partial_{\langle \kappa \rangle} + \log \langle \kappa \rangle \eta, \\ \delta_2(\eta) = \eta^2 - \frac{E_4}{144}, \text{ avec } \delta_2 := \delta_{\langle n_2 \rangle}, \end{cases} \quad (3.38)$$

il résulte du théorème 3.5 — comme déjà indiqué — que les identités établies dans le théorème 1.1 valent encore pour un élément de

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}(N)_\kappa := (\mathcal{M}(N)[\eta])_\kappa,$$

où ici l'indice κ désigne la strate de caractère-poids κ ; voici les modifications à faire :

i) travailler avec des coefficients

$$\begin{aligned} (v_i)_{0 \leq i \leq r} & \text{ dans } \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2i}}, \text{ au lieu de } M\mathcal{C}\ell(N)_{k-2i}, \\ (w_i)_{0 \leq i \leq r+1} & \text{ dans } \mathcal{M}(N)_{n_2\kappa/n_{2i}}, \text{ au lieu de } M\mathcal{C}\ell(N)_{k+2-2i}, \end{aligned}$$

ii) écrire $\partial_{\langle \kappa/n_{2i} \rangle}$ au lieu de ∂_{k-2i} , $0 \leq i \leq r$;

iii) dans les coefficients des formules de récurrence $\log \langle \kappa \rangle$ doit être substitué au poids k .

En particulier, pour $\log \langle \kappa \rangle$ différent d'un entier ≥ 2 , l'application A -linéaire

$$(\nu_\kappa, \delta_{\langle \kappa/n_2 \rangle}) : \mathcal{M}(N)_\kappa \oplus \mathfrak{A}\mathfrak{M}(N)_{\kappa/n_2} \longrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{M}(N)_\kappa \quad (3.39)$$

où ν_κ désigne l'injection naturelle de $\mathcal{M}(N)_\kappa$ dans $\mathfrak{A}\mathfrak{M}(N)_\kappa$ est un isomorphisme. D'où bien sûr, résulte une application A -linéaire

$$str_\kappa : \mathfrak{A}\mathfrak{M}(N)_\kappa \longrightarrow \mathcal{M}(N)_\kappa \quad (3.40)$$

telle que $str_\kappa \circ \nu_\kappa = id_{\mathcal{M}(N)_\kappa}$

Pour $\log \langle \kappa \rangle$ entier ≥ 2 , l'obstruction est désignée par le théorème 2.1; les identités menant à celui-ci (cf. aussi [1] § 9 p. 34) impliquent en effet :

Corollaire 3.8 *Soit a un entier ≥ 0 et notons $\delta^{(a+1)}$ l'opérateur de Shimura itéré $(a+1)$ -fois.*

Alors, si $\log \langle \kappa \rangle = a+2$, les restrictions à $M_{\kappa/n_{2+2a}}(K, N, v)$ des opérateurs Θ^{a+1} et $\delta_{\kappa/n_{2+2a}}^{(a+1)}$ coïncident, et appliquent ce module dans le module $M_{\kappa}(K, N, v)$ des formes modulaires surconvergentes de caractère-poids κ .

Une manifestation de ceci pour $r = a$, dans l'itération définissant

$$\delta_{\langle \kappa/n_{2+2a} \rangle}^{(a+1)} = \delta_{\langle \kappa/n_2 \rangle} \circ \delta_{\langle \kappa/n_{2+2a} \rangle}^{(a)}$$

est la division par $s - a$ avec $s = \log \langle \kappa/n_2 \rangle$ s'approchant p -adiquement de a , qui est une nécessité dans la dernière récurrence du théorème 1.1 pour déduire v_a de w_{a+1} .

Toutefois str_{κ} peut être défini sur le A -module homogène de caractère-poids κ

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1(N)_{\kappa} = \bigoplus_{\alpha=0}^a \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2\alpha}} \eta^{\alpha} \quad (3.41)$$

où l'on suppose toujours $\log \langle \kappa \rangle = a+2$; on a $str_{\kappa} \circ \nu_{\kappa}^1 = id_{\mathcal{M}(N)_{\kappa}}$, où ν_{κ}^1 désigne l'injection naturelle de $\mathcal{M}(N)_{\kappa}$ dans $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1(N)_{\kappa}$.

Remarque 3.9 *Le module $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1(N)_{\kappa}$ s'écrit aussi bien*

$$\bigoplus_{\alpha=0}^a \mathcal{M}(N)_{\kappa/n_{2\alpha}} \eta_{\rho}^{\alpha}$$

avec $\eta_{\rho} := \eta - \rho$, où $\rho \in \mathcal{M}(N)_{n_2}$ est modulaire surconvergente (de poids entier n_2 , et niveau N).

D'une façon plus générale, il semble que

$$str_{\kappa/n_{2+2a}}(p(w)) \equiv 0 \quad (3.42)$$

avec $p(w) = \sum_{\alpha \geq a+1} w_{\alpha} \eta^{\alpha-(a+1)}$, soit une condition nécessaire pour que $str_{\kappa}(w)$ avec $w = \sum_{\alpha \geq 0} w_{\alpha} \eta^{\alpha}$ puisse être définie (on suppose w homogène de caractère-poids κ , et $\log \langle \kappa \rangle = a+2$).

Ceci mérite étude plus approfondie.

Ici, notons simplement $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1^{\dagger}(N)$ le A -module formé des éléments de $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1^{\dagger}(N)$ dont les spécialisations éventuelles en κ , lorsque le caractère-poids κ vérifie $\log \langle \kappa \rangle$ entier ≥ 2 , appartiennent à $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1(N)_{\kappa}$. Alors, on a :

Théorème 3.10 *Le module $\mathcal{M}^{\dagger}(N)$ des familles de formes modulaires surconvergentes s'injecte naturellement dans $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1^{\dagger}$*

$$\nu : \mathcal{M}^{\dagger}(N) \hookrightarrow \mathfrak{A}\mathfrak{M}_1^{\dagger}(N);$$

et il existe str , application A -linéaire compatible avec la stratification

$$str : \mathfrak{A}\mathfrak{M}_1^{\dagger}(N) \longrightarrow \mathcal{M}^{\dagger}(N)$$

telle que $str \circ \nu = id_{\mathcal{M}^{\dagger}(N)}$.

Références

- [1] R. F. COLEMAN, *A p -adic Shimura isomorphism and p -adic periods of modular forms*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, Contemp. Math., 165 (1994), p. 21-51.
- [2] R. F. COLEMAN, *Classical and Overconvergent modular forms*, Inv. math., 124 (1996), p. 215-241.
- [3] R. F. COLEMAN, *p -adic Banach spaces and families of modular forms*, Inv. math., 127 (1997), p. 417-479.
- [4] R. F. COLEMAN, F. Q. GOUVÊA AND N. JOCHNOWITZ, *E_2, Θ and Overconvergence*, IMRN (1995) n°1, p. 23-41.
- [5] R. F. COLEMAN AND B. MAZUR, *The Eigencurve*, London Math. Soc., 254 (1998), p.1-113.
- [6] M. COURTIEU, *Familles d'opérateurs sur les formes modulaires de Siegel et fonction L p -adiques*, thèse (juin 2000), Institut Fourier, Université Grenoble 1.
- [7] B. DWORK, *The U_p operator of Atkin on modular functions of level 2 with growth condition*, Antwerp, July 17 - August 3, 1972, LNM 350 (1973) p. 57-67.
- [8] B. GORSSE, *Mesures p -adiques associés au carré symétrique*, thèse (octobre 2006), Institut Fourier, Université Grenoble 1.
- [9] F. Q. GOUVÊA, *Arithmetic of p -adic modular forms*, LNM 1304, (1988).
- [10] F. Q. GOUVÊA, B. MAZUR, *On the characteristic power series of the U -operator*, Ann. Institut Fourier **43**, (1993), p. 301-312.
- [11] H. HECKE, *Werke*, n°21 §3, p. 411-413 et n°24 §2, p. 469, [= Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd 4 (1925), p. 211-223; Bd 5 (1927), p. 199-224].
- [12] H. HIDA, *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*, London Math. Soc., Student Texts 26 (1993) Cambridge Univ. Press.
- [13] M. KANEKO, D. ZAGIER, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, Prog. in Math., 129, (1995), p. 165-172.
- [14] N. KATZ, *p -adic properties of modular schemes and modular forms*, Antwerp, July 17 - August 3, (1972), LNM 350 (1973) p. 69-190.
- [15] A. A. PANCHISHKIN, *Two variables p -adic L -functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Inv. Math., 154, (2003), p. 551-615.
- [16] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, PUF, (1970).
- [17] J.-P. SERRE, *Congruences et formes modulaires (d'après H.P.F. Swinnerton-Dyer)*, Sémin. Bourbaki (1971/72), exposé 416, LNM 317 (1973), p. 319-338.
- [18] G. SHIMURA, *On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables*, Ann. of Math. 102 (1975), p. 491-515.
- [19] G. SHIMURA, *The special values of the Zeta functions associated with cusp forms*, Comm. pure and applied math. 29 (1976), p. 783-804.
- [20] G. SHIMURA, *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, Math. Surveys and Monographs 82, AMS 2000.

- [21] J. STURM, *Evaluation of the symmetric square at the near center point*, Amer. J. Math 111 (1989), p. 585-598.
- [22] H. P. F. SWINNERTON-DYER, *On ℓ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, Antwerp, July 17 - August 3 (1972), LNM 350 (1973), p. 1-55.
- [23] A. WEIL, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgebiete 88, Springer-Verlag (1976).

Bertrand Gorsse
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
bertrand.gorsse@ujf-grenoble.fr

Gilles Robert
Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74
38402 Saint Martin d'Hères - France
Gilles.Robert@ujf-grenoble.fr