

Modélisation

Contrôle continu du 17 octobre 2018, de 13h à 15h.

Calculatrices autorisées.

Les exercices sont indépendants.

1. STÉRILISATION (D'APRÈS BAC S PONDICHÉRY 2016, 7 POINTS)

On souhaite stériliser une boîte de conserve dont la température initiale est de 25 degrés. On la place dans un four à une température de $T_F = 100$ degrés. La stérilisation débute 10 minutes après, lorsque la température de la boîte est supérieure à 85 degrés. La température $T(t)$ de la boîte évolue en fonction du temps t (en minutes) selon la loi

$$\frac{dT}{dt} = k(T_F - T)$$

- (1) Déterminer la valeur de $T(t)$ (au bout de 10 minutes, $T(10) = 85$).
- (2) Représenter l'allure du graphe de $T(t)$.
- (3) On considère que la stérilisation est terminée si

$$I(t) := \int_{10}^t T(u) du \text{ vérifie } I(t_s) = 80 \text{ (minutes fois degrés)}$$

Représenter I sur le graphe, calculer I en fonction de t .

- (4) Justifier que t_s est compris entre 20 et 25 minutes.
- (5) Proposer un algorithme permettant de calculer à 1 seconde près la valeur de t_s .
- (6) Bonus : Proposer un modèle discret correspondant à ce modèle continu.

2. MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR (D'APRÈS BAC S AMÉRIQUE 2018, 6 POINTS)

On modélise la population de compagnols (proie) et de renards (prédateurs) par deux suites u_n et v_n . On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- (1) On suppose que :

$$u_{n+1} = 1.1u_n - 2000v_n, \quad v_{n+1} = 2 \times 10^{-5}u_n + 0.6v_n$$

Traduire cette récurrence sous la forme $U_{n+1} = AU_n$. Diagonaliser A . En déduire l'expression de U_n en fonction de n lorsque $u_0 = 2$ millions et $v_0 = 120$.

- (2) Une modélisation plus réaliste est donnée par :

$$u_{n+1} = 1.1u_n - 0.001u_nv_n, \quad v_{n+1} = 2 \times 10^{-7}u_nv_n + 0.6v_n$$

Déterminer les points d'équilibre (ou points fixes) de la suite U_n (i.e. tels que $U_1 = U_0$)

Bonus : déterminer le modèle linéarisé en ces équilibres et le comportement du modèle linéarisé si U_0 est proche d'un point d'équilibre.

3. ÉNERGIE SOLAIRE (8 POINTS)

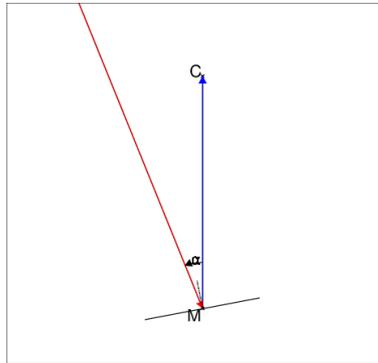
3.1. Cout du kWh. Unités et notation : la puissance électrique a pour unité le W (Watt), un GW équivaut à mille MW ou à un million de kW. Une puissance de 1kW produit pendant 1 heure 1kWh d'électricité.

Sandstone Energy est un projet de centrale solaire à concentration dans le désert du Nevada, d'une puissance totale de 1.6GW (8 tours de 200MW) pour une prévision de production annuelle de 5600GWh (données : Wikipedia).

- (1) Calculer le nombre de GWh que pourrait fournir la centrale en un an si elle pouvait fonctionner 24h sur 24 à la puissance maximale. En déduire le facteur de charge de la centrale, c'est-à-dire la production annuelle prévue divisée par la production annuelle correspondant à la puissance maximale 24h sur 24.
- (2) On estime que la centrale coûtera 5 milliards de dollars. Si la centrale est financée par un emprunt sur 30 ans à un taux annuel de 3% remboursé en 30 annuités, déterminer le montant d'une annuité.
- (3) En déduire le coût par kWh produit correspondant.

3.2. **Rendement.** Dans une centrale solaire à concentration avec tour, le rayonnement solaire est réfléchi par plusieurs miroirs orientables vers un unique point de concentration C , situé au sommet d'une tour d'une grande hauteur. On s'intéresse à un des ces miroirs situé sur le sol au point M , en première approximation **on suppose que C est à la verticale de M** . La figure ci-dessous est faite dans le plan défini par M , C et la direction du Soleil, on a représenté le miroir par un petit segment de droite légèrement incliné, un rayon incident venant du Soleil et le rayon réfléchi par le miroir vers C .

- (1) Soit α l'angle entre la verticale et la direction du Soleil.



On suppose qu'à une heure h comprise entre 0 et 24h, l'angle α est déterminé par

$$\alpha = \frac{h - 12}{12} \pi$$

Ainsi à 12h, le Soleil est à la verticale du lieu (midi solaire), le miroir est horizontal et $\alpha = 0$. Déterminer l'heure de lever et de coucher du Soleil.

- (2) Déterminer l'angle β entre le rayon solaire incident et la perpendiculaire au miroir (on rappelle que c 'est l'une des bissectrices des rayons incidents et réfléchis). Donner la valeur de β au lever et au coucher du Soleil.
- (3) On suppose que le Soleil brille sans interruption entre son lever et son coucher. Montrer que la puissance solaire réfléchi par le miroir vers la tour vaut :

$$P = P_m \cos(\beta)$$

- (4) Déterminer la puissance moyenne reçue entre le lever et le coucher du Soleil en fonction de P_m . En déduire la puissance moyenne reçue pendant 24h (donc en tenant compte de la période où il fait nuit).
- (5) Estimer la surface minimale de miroir nécessaire pour construire une tour solaire de puissance maximale 200MW en prenant $P_m = 0.3kW$ par mètre carré de miroir. Si les miroirs occupent toute la surface d'un disque, à quel rayon cela correspond-il ?
- (6) Bonus : Discuter la pertinence des hypothèses de calculs pour une centrale solaire située dans le désert du Nevada, à 38 degrés de latitude Nord.