UGA Mat406 2023

Examen du 26 mai, 13h15-15h15.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet comporte deux pages (barème indicatif non contractuel : 7+7, 7).

1 Intégrale

On souhaite calculer une valeur approchée de

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt, \quad x \in [0,1]$$

On pose

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

1.1 Série entière

1. Donner le développement en séries entières de f et son rayon de convergence
2. En déduire le développement en série entière de F
3. Déterminer une majoration du reste d'ordre N du développement en série de F en fonction de x.
4. En déduire une valeur de N pour laquelle le reste d'ordre N est plus petit que `1e-5` pour tout $x \in [0,1/2]$
5. Donner un rationnel dont on peut certifier qu'il s'agit d'une valeur approchée de $F(1/2)$ à `1e-5` près
6. Que se passe-t-il si $x = 1$?

1.2 Méthode du point milieu et de Simpson

On a

$$F(1) = F(\frac{1}{2}) + I, \quad I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$$

et on va déterminer une valeur approchée de I, l'intégrale de f entre 1/2 et 1, par la méthode du point milieu ou de Simpson.

1. Déterminer f'' (on pourra utiliser sans justifications le résultat de la calculatrice). En déduire M_2 un majorant de $|f''|$ sur $[1/2,1]$ (justifiez).
2. Combien de subdivisions sont-elles nécessaires pour avoir une valeur approchée de I à `1e-5` près par la méthode du point milieu ?
3. Reprendre les deux questions précédentes en utilisant la méthode de Simpson.
4. Déterminer une valeur approchée de I à `1e-5` par la méthode du point milieu ou par la méthode de Simpson. On donnera cette valeur d'abord sous la forme d'une somme puis sa valeur approchée obtenue à la calculatrice.

2 Polynômes

On cherche des valeurs approchées des racines de

$$P = x^4 + x - 1$$

1. Déterminer le nombre de racines réelles de P
2. Donner une valeur initiale u_0 pour laquelle on peut certifier que la suite de la méthode de Newton appliquée à P converge vers r, une racine réelle de P. Justifier.

3. Déterminer une valeur approchée de r en calculant u_4 sous forme d'un rationnel et donner une majoration de $|u_4 - r|$.
4. Soit Q le quotient de P par $x - r$. Montrer que

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{P'}{P} - \frac{1}{x-r}$$

   En déduire une méthode de calcul de la suite de Newton pour déterminer les racines de Q ne faisant pas intervenir les coefficients de Q.
5. Comment peut-on calculer de manière approchée les coefficients de Q ? Comparer la précision numérique de la méthode de Newton appliquée à Q en utilisant la question précédente ou en utilisant le calcul approché des coefficients de Q.