UGA Mat406 2022

Examen du lundi 27 juin, 11h45-13h45.

*Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.*
*Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.*
*Ce sujet est composé de 3 exercices (barême indicatif non contractuel : 6, 8, 6).*

# Exercice 1

On s'intéresse aux racines du polynôme

$$P(x) = x^5 - x + 1$$

1. Calculer $P(-2)$ et $P(-1)$, déterminer le nombre de racines de $P$ dans $[-2,-1]$.
2. Donner la suite récurrente qui permet de déterminer une racine de $P$ par la méthode de Newton
3. Déterminer le signe de $P'$, $P''$ sur $[-2,-1]$, en déduire une valeur de $u_0$ pour laquelle on peut certifier que la méthode de Newton converge vers une racine $r$ de $P$.
4. Déterminer $u_4$, et donner un encadrement de $r$ (on justifiera).

# Exercice 2

Pour $x \in [0,1]$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

1. Calculer la dérivée seconde $F^{[2]}$ de $F$. Déterminer un majorant de $|F^{[2]}|$ sur $[0,1]$ (on justifiera rigoureusement).
2. Déterminer un nombre $N$ de subdivisions qui assure que la méthode du point milieu donne une valeur approchée de $F(x)$ avec une erreur absolue inférieure à `1e-5`.
3. Calculer la dérivée d'ordre 4 $F^{[4]}$ de $F$. Déterminer un majorant de $|F^{[4]}|$ sur $[0,1]$ (on justifiera rigoureusement).
4. Déterminer un nombre $N$ de subdivisions qui assure que la méthode de Simpson donne une valeur approchée de $F(x)$ avec une erreur absolue inférieure à `1e-5`.
5. Donner une valeur approchée de $F(1)$ par cette méthode.
6. Laquelle de ces deux méthodes vous semble-t-elle la plus efficace ?

# Exercice 3

On s'intéresse au calcul approché pour $x \in [0,+\infty[$ de

$$f(x) = \cos(\sqrt{x})$$

1. Rappeler le développement en séries entières de cosinus et son rayon de convergence.
   En déduire l'écriture de $f$ sous forme d'une série entière
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$
2. On fixe $x \in [0,1]$. Montrer que $f(x)$ est une série alternée.
3. Soit
   $$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n x^n$$
   Déterminer $N$ pour que $S_N$ soit une valeur approchée avec une erreur inférieure à `1e-6` de $f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
4. Déterminer par cette méthode une valeur approchée de $f(\frac{4}{5})$ à `1e-6` près.
5. On fixe $x > 1$. Montrer que $f(x)$ est une série alternée à partir d'un rang $N$ dépendant de $x$ que l'on déterminera.
6. Quel est l'ordre de grandeur de $N$ pour $x = 10^6\pi^2 + \frac{4}{5}$ ? Peut-on proposer une méthode plus efficace pour déterminer $f(x)$ ?