UGA Mat406 2022

Examen du jeudi 19 mai, 8h30-10h30.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet est composé de 3 exercices (barême indicatif non contractuel : 7, 6, 7).

Exercice 1

On souhaite résoudre sur l'intervalle $I = [3/4, 1]$ l'équation

$$\tan(x^2) = x \quad (E)$$

On pose $f(x) = \tan(x^2)$ et $g(x) = \tan(x^2) - x$.

1. Calculer une valeur approchée de $g(3/4)$ et de $g(1)$. Déterminer g', en déduire que (E) admet sur I une solution unique r.
2. Déterminer le signe de g'' sur I et une valeur approchée de $g'(3/4)$.
3. Peut-on résoudre (E) par la méthode du point fixe $u_{n+1} = f(u_n)$? Si oui, donnez une valeur de u_0 pour laquelle on peut assurer que la méthode converge, si non, justifiez.
4. Peut-on résoudre (E) par la méthode de Newton $u_{n+1} = u_n - g(u_n)/g'(u_n)$? Si oui, donnez une valeur de u_0 pour laquelle on peut assurer que la méthode converge, si non, justifiez.
5. Donner une valeur approchée de r à 10^{-8} près, en précisant la méthode utilisée et en justifiant en détails l'encadrement.

Exercice 2

Soit

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

1. Donner le développement en séries entières de $\cos(t^2)$ en $t = 0$. Quel est son rayon de convergence ?
2. En déduire le développement en séries entières de $F(x)$ en $x = 0$.
3. Donner une majoration du reste de la somme de la série lorsque $|x| \leq 1$
4. Déterminer une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-8} près, justifier.

Exercice 3

Soit $x_0 = 10^4, x_1 = 10^4 + 1, x_2 = 10^4 + 2$ et $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 2$. Soit P le polynôme d'interpolation de degré au plus 2 passant par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

1. Déterminer P par l'algorithme des différences divisées sous la forme
$$N(x) = \alpha_0 + (x - x_0)(\alpha_1 + (x - x_1)\alpha_2)$$
2. Développer P sous la forme
$$D(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
3. Soit $x = 10^4 + 1/3$. Déterminer $P(x)$ en calcul exact.
4. On calcule maintenant en approché, $x = 1000.0 + 1.0/3.0$. Déterminer une valeur approchée de $P(x)$ en utilisant la forme $N(x)$ et la forme $D(x)$.
5. On suppose qu'on travaille avec des flottants avec une précision relative de 15 chiffres (`1e-15`). Estimer l'erreur absolue sur $x - x_0$ et $x - x_1$, en déduire l'erreur relative sur $N(x)$.
6. Estimer l'erreur relative sur $D(x)$ en comparant a_0 avec $D(x)$.
7. Expliquez la précision des résultats de la question 4. Quelle forme faut-il choisir pour minimiser les erreurs ?